Archiv der Mathematik und Physik

Archiv der Mathematik und Physik



Schriften.

herausgegeben von G. Mitt
u. G. Beijer. Berlin, Maye

gender:

sse von Functionen, die d

von Functionen zweier u

symmetrischer Curven 6. Cl
tionen zweier Variabeln.
zweier unabhängigen Varia
ind.
der Raumcurven.
ndente Function $Q(x)$.
Gleichung 2. Ordnung mit

schen Integrale und einige
e eulerschen Functionen.
itz: Ueber einige Punkte i

schaft des Systems aller r
g zur Theorie der Gesamth
hen. — Erweiterung eines
schen Reihen. — Ueber di
von Punkten. I—IV. — G
er Gesamtheiten. — Ueber
esamtheiten von Punkten,
nsionen liegen. Erste Mitt
der Theorie der Gesamthei

à l'usage des écoles spéci
enne publié par P. Man
de Gand, Docteur spéc
euberg, Professeur à l'A
Liège. Avec la collaborat
angers. Tome troisième.
Villars.

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe.

Siebzigster Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1884.



Inhalts-Verzeichniss

des siebzigsten Teils.

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.

Integralrechnung.

Geometrie der Ebene.

Geometrie des Raumes.

Mechanik.

Optik, Akustik und Elasticität.



№ der Abhandlung.

$$\vartheta_{g+2,h}(v) = \vartheta_{gh}(v), \quad \vartheta_{g,h+2}(v) = (-1)^g \vartheta_{gh}(v)$$

$$\vartheta_{00}(v) = 0, \quad \vartheta_{11}(v) = 0 \qquad (2)$$

des Quotienten zweier ϑ-Functionen ... v und w dargestellt durch

... wenn wir $v = w$ setzen, ... unter Benutzung dieser ... Ausführung der Rechnung

$$\frac{\vartheta_{00}(3v)}{\vartheta_{01}(3v)} = \frac{\vartheta_{00}(v)}{\vartheta_{01}(v)} \; \frac{1 - 4\dfrac{\vartheta_{10}^{2}}{\vartheta_{00}^{2}}\dfrac{\vartheta_{11}^{2}(v)}{\vartheta_{01}^{2}(v)} + 6\dfrac{\vartheta_{11}^{4}(v)}{\vartheta_{01}^{4}(v)} - 4\dfrac{\vartheta_{00}^{2}}{\vartheta_{10}^{2}}\dfrac{\vartheta_{11}^{6}(v)}{\vartheta_{01}^{6}(v)} + \dfrac{\vartheta_{11}^{8}(v)}{\vartheta_{01}^{8}(v)}}{1 - 6\dfrac{\vartheta_{11}^{4}(v)}{\vartheta_{01}^{4}(v)} + 4\dfrac{\vartheta_{00}^{2} - \vartheta_{10}^{2}}{\vartheta_{00}^{2}\,\vartheta_{10}^{2}}\dfrac{\vartheta_{11}^{6}(v)}{\vartheta_{01}^{6}(v)} - 3\dfrac{\vartheta_{11}^{8}(v)}{\vartheta_{01}^{8}(v)}}$$

Durch diese Gleichungen sind die Quotienten je zweier ϑ-Functionen des dreifachen Argumentes ausgedrückt durch die Quotienten je zweier ϑ-Functionen des einfachen Argumentes.

Diese Quotienten der ϑ-Functionen stehen nun mit den elliptischen Functionen sin am, cos am, δ am, wofür wir abkürzend schreiben werden s, c, δ, wenn wir

$$v = \frac{u}{2K}, \quad u = \int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-k^2\mu^2)}}$$
$$K = \int_0^1 \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-k^2\mu^2)}}, \quad K' = \int_0^1 \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-k'^2\mu^2)}} \tag{5}$$

setzen, in folgender Beziehung

$$-\frac{\vartheta_{00}}{\vartheta_{10}}\frac{\vartheta_{11}(v)}{\vartheta_{01}(v)} = s(u), \quad \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{10}}\frac{\vartheta_{10}(v)}{\vartheta_{01}(v)} = c(u)$$
$$\frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{00}}\frac{\vartheta_{00}(v)}{\vartheta_{01}(v)} = \delta(u), \quad \frac{\vartheta_{10}}{\vartheta_{00}} = \sqrt{k}, \quad \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{00}} = \sqrt{k'} \tag{6}$$

Führen wir diese Zeichen ein und setzen wir $u = \frac{u}{3}$, so erhalten wir …s (4) die allgemeine Dreiteilungsgleichung in der bekannten Form

$$\ldots = s\left(\frac{u}{3}\right) \frac{3 - 4(1+k^2)\,s^2\left(\frac{u}{3}\right) + 6k^2 s^4\left(\frac{u}{3}\right) - k^4 s^8\left(\frac{u}{3}\right)}{1 - 6k^2 s^4\left(\frac{u}{3}\right) + 4k^2(1+k^2)\,s^6\left(\frac{u}{3}\right) - 3k^4 s^8\left(\frac{u}{3}\right)} \tag{7}$$

…über zur Ableitung des Additionstheorems …Hermite'schen Form [1]), und setzen

… $q_m\,\vartheta_{11}^{2m}(v)\,\vartheta_{01}^{2n-2m-1}(v)$ … 0

… elliptischen F… (übers.
…etric. Her… …a. 1876.

Berichtigungen.

Teil LXVIII.

Seite	Zeile		statt	setze
[Seit]e 218	Zeile 6 u. 16	v. ob.	$\frac{\partial x_i}{\partial v}$	$-\frac{\partial x_i}{\partial v}$
	„	„	$\frac{\partial p_i}{\partial v}$	$-\frac{\partial p_i}{\partial v}$
	„ 11	v. u	$-x_{10}$	$+x_{10}$
	„ 10	„	$-\frac{\partial p_i}{\partial v}$	$+\frac{\partial p_i}{\partial v}$
			$+\sin v$	$-\sin v$
			$-v\sin v$	$v\sin v$
„ 307	„ 13	„	p_3	p'''
	12	„	p_1	p'
„ 312	Gl. (7)		$\left(\frac{p_1}{3}\right)^4 x^2$	$\left(\frac{p_1}{3}\right)^5 x$
„ 313	„ (12)		$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{16}$

Teil LXIX.

Seite	Zeile	statt	setze
Seite 13	Gl. (d)	a	$-a$
	in (IV) ebenso, und n muss wegfallen.		
„ 187	Zeile 9 v. u.	$h^4-\frac{a}{2}h^2$	$h^2-\frac{a}{2}h$
	„ 7 „	$k^4-\frac{a}{2}k^2$	$k^2-\frac{a}{2}k$
„ 211	„ 18 v. ob.	nicht	leicht
„ 401	Gl. (17) u. (18)	λ	ϱ
	Zeile 5 v. ob.	für	für die Werte des gemeinsamen Parameters.

Teil LXX.

Seite	Zeile	statt	setze
Seite 75	Zeile 1 v. u.	$9 . 2^{2n-1}$	$9 . 2^{2n-1}-1$
„ 77	Gl. (2)	C	c
	Gl. (3) links	$=$	$-$
„ 79	Zeile 7 v. ob.	$xy =$	$xy -$

Seite	Zeile		statt		setze
Seite 79	Zeile 8 v. u.	statt	23	setze	27
		„	Factoren	„	Factoren von
	„ 4 „	„	0,49	„	9,49
„ 80	„ 8 „	„	$\frac{f}{2f-F}$	„	$\frac{c}{2c-C}$
	„ 1 „	„	Für	„	1 und
„ 81	„ 9 „	„	C	„	c
	„ 1 „	„	w	„	a
„ 82	„ 10 v. ob.	„	C	„	c
„ 83	im Zahlenbeisp.	„	139	„	193
„ 84	Zeile 5 v. u.	„	2^{n+1} (rechts)	„	$2^{n+1}-1$
„ 89	„ 5 v. ob.	„	k	„	m
„ 97	„ 4 v. u.	„	n oder	„	a oder
„ 103	„ 5 v. ob.	„	>1	„	>-1
„ 239	„ 22 v. u.	„	aufwirft	„	aufweist
„ 242	„ 2 „	„	Tangenten	„	Tangentenebene
„ 243	„ 2 v. ob.	„	$\frac{\partial X}{\partial Z}, \frac{\partial Y}{\partial Z}$	„	$\frac{dX}{dZ}, \frac{dY}{dZ}$
	„ 13 v. u.	„	beleuchtenden	„	beleuchteten
„ 245	„ 1 d. Anm.	statt	$1879.^0$	setze	1879.0
	„ 8 „	„	der	„	der der
„ 247	„ 7 v. u.	„	Beobachtungs	„	Erleuchtungs
„ 248	„ 1 v. ob.	„	f'	„	f^2
			das Wurzelzeichen bis über den letzten Term.		
	„ 3 v. u.		statt des Exp. λ setze 2		
„ 250	„ 14 „	„	gedachte	„	gedrehte
„ 251	„ 1 v. ob.	„	YZ	„	XZ
	„ 5, 7, 8 „	„	b	„	$\mathfrak{b}$
„ 71	Der letzte Absatz von §. 4.: „Die Kreise ... = COE“ soll wegfallen.				

I.

Beiträge zur Anwendung der Dreiteilung der elliptischen Functionen auf die Theorie der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung.

Von

Louis Heinze.

§ 1.

Als Einleitung sei es mir gestattet, ausgehend von den von Herrn Prof. H. Weber in seiner Vorlesung „über die Theorie der elliptischen Functionen“ eingeführten ϑ-Functionen erstens die Dreiteilungsgleichung und zweitens das Additionstheorem der elliptischen Functionen in der Hermite'schen Form kurz herzuleiten.

Herr Prof. Weber, dem ich durch die mir vielfach gebotene Anregung bei meinen Studien ohnehin zu grossem Danke verpflichtet bin, hat mir auch gütigst gestattet, das, was ich zur vorliegenden Arbeit aus seinen Vorlesungen entnommen hatte, zu veröffentlichen.

Ich gehe von folgender Definitionsgleichung aus:

$$\vartheta_{gh}(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i\omega\left(m+\frac{g}{2}\right)^2 + 2\pi i\left(m+\frac{g}{2}\right)\left(v+\frac{h}{2}\right)}$$

wo m wie nachher stets die laufende Zahl der Reihe bedeutet. Es folgt

$$\vartheta_{gh}\left(v + \frac{g'\omega + h'}{2}\right) = e^{-\frac{\pi i\omega}{4}g'^2 - \pi i g'\frac{h+h'}{2} - \pi i g' v}\,\vartheta_{g+g', h+h'}(v)$$

ferner

$$\vartheta_{g+2,h}(v) = \vartheta_{gh}(v), \quad \vartheta_{g,h+2}(v) = (-1)^g \vartheta_{gh}(v)$$

$$\vartheta_{01}(v) = \Sigma(-1)^m e^{\pi i\omega m^2 + 2\pi i m v}$$

$$\vartheta_{11}(v) = i\,\Sigma(-1)^m e^{\pi i\omega m^2 + \pi i\omega m + \frac{\pi i\omega}{4} + 2\pi i m v + \pi i v}$$

$$\vartheta_{00}(v) = \Sigma e^{\pi i\omega m^2 + 2\pi i v m}$$

$$\vartheta_{10}(v) = \Sigma e^{\pi i\omega m^2 + \pi i\omega m + \frac{\pi i\omega}{4} + 2\pi i m v + \pi i v}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_{01}(v+2) &= \vartheta_{01}(v), & \vartheta_{01}(v+\omega) &= -e^{-\pi i\omega - 2\pi i v}\vartheta_{01}(v)\\
\vartheta_{11}(v+2) &= \vartheta_{11}(v), & \vartheta_{11}(v+\omega) &= -e^{-\pi i\omega - 2\pi i v}\vartheta_{11}(v)\\
\vartheta_{00}(v+2) &= \vartheta_{00}(v), & \vartheta_{00}(v+\omega) &= e^{-\pi i\omega - 2\pi i v}\vartheta_{00}(v)\\
\vartheta_{10}(v+2) &= \vartheta_{10}(v), & \vartheta_{10}(v+\omega) &= e^{-\pi i\omega - 2\pi i v}\vartheta_{10}(v)
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\vartheta_{00}(v) = \vartheta_{00}, \quad \vartheta_{10}(v) = \vartheta_{10}, \quad \vartheta_{01}(v) = \vartheta_{01}, \quad \vartheta_{11}(v) = 0 \tag{2}$$

$$\begin{cases}
\vartheta_{01}^2\vartheta_{10}^2(v) = \vartheta_{10}^2\vartheta_{01}^2(v) - \vartheta_{00}^2\vartheta_{11}^2(v)\\
\vartheta_{01}^2\vartheta_{00}^2(v) = \vartheta_{00}^2\vartheta_{01}^2(v) - \vartheta_{10}^2\vartheta_{11}^2(v)
\end{cases}$$

$$\frac{\vartheta_{01}^4}{\vartheta_{10}^2\vartheta_{00}^2}\,\frac{\vartheta_{10}^2(v)\,\vartheta_{00}^2(v)}{\vartheta_{01}^4(v)} = \left(1 - \frac{\vartheta_{00}^2}{\vartheta_{10}^2}\,\frac{\vartheta_{11}^2(v)}{\vartheta_{01}^2(v)}\right)\left(1 - \frac{\vartheta_{10}^2}{\vartheta_{00}^2}\,\frac{\vartheta_{11}^2(v)}{\vartheta_{01}^2(v)}\right) \tag{3}$$

Ferner wird das Additionstheorem des Quotienten zweier ϑ-Functionen für die beiden Argumente v und w dargestellt durch

$$\frac{\vartheta_{00}\vartheta_{10}}{\vartheta_{01}^2}\,\frac{\vartheta_{11}(v+w)}{\vartheta_{01}(v+w)} = \frac{\vartheta_{00}(v)\vartheta_{10}(v)\vartheta_{11}(w)\vartheta_{01}(w) + \vartheta_{00}(w)\vartheta_{10}(w)\vartheta_{11}(v)\vartheta_{01}(v)}{\vartheta_{01}^2(v)\vartheta_{01}^2(w) - \vartheta_{11}^2(v)\vartheta_{11}^2(w)}$$

$$\frac{\vartheta_{10}}{\vartheta_{01}}\,\frac{\vartheta_{10}(v+w)}{\vartheta_{01}(v+w)} = \frac{\vartheta_{10}(v)\vartheta_{01}(v)\vartheta_{10}(w)\vartheta_{01}(w) - \vartheta_{11}(v)\vartheta_{00}(v)\vartheta_{11}(w)\vartheta_{00}(w)}{\vartheta_{01}^2(v)\vartheta_{01}^2(w) - \vartheta_{11}^2(v)\vartheta_{11}^2(w)}$$

$$\frac{\vartheta_{00}}{\vartheta_{01}}\,\frac{\vartheta_{00}(v+w)}{\vartheta_{01}(v+w)} = \frac{\vartheta_{00}(v)\vartheta_{01}(v)\vartheta_{00}(w)\vartheta_{01}(w) - \vartheta_{11}(v)\vartheta_{10}(v)\vartheta_{11}(w)\vartheta_{10}(w)}{\vartheta_{01}^2(v)\vartheta_{01}^2(w) - \vartheta_{11}^2(v)\vartheta_{11}^2(w)}$$

Aus diesen drei Gleichungen erhalten wir, wenn wir $v = w$ setzen, Formeln für das doppelte Argument, und unter Benutzung dieser letzteren, wenn wir $w = 2v$ setzen, nach Ausführung der Rechnung folgende drei Gleichungen:

$$\frac{\vartheta_{11}(3v)}{\vartheta_{01}(3v)} = \frac{\vartheta_{11}(v)}{\vartheta_{01}(v)}\,\frac{3 - 4\dfrac{\vartheta_{00}^4+\vartheta_{10}^4}{\vartheta_{00}^2\vartheta_{10}^2}\,\dfrac{\vartheta_{11}^2(v)}{\vartheta_{01}^2(v)} + 6\dfrac{\vartheta_{11}^4(v)}{\vartheta_{01}^4(v)} - \dfrac{\vartheta_{11}^8(v)}{\vartheta_{01}^8(v)}}{1 - 6\dfrac{\vartheta_{11}^4(v)}{\vartheta_{01}^4(v)} + 4\dfrac{\vartheta_{00}^4+\vartheta_{10}^4}{\vartheta_{00}^2\vartheta_{10}^2}\,\dfrac{\vartheta_{11}^6(v)}{\vartheta_{01}^6(v)} - 3\dfrac{\vartheta_{11}^8(v)}{\vartheta_{01}^8(v)}}$$

(4)

$$\frac{\vartheta_{10}(3v)}{\vartheta_{01}(3v)} = \frac{\vartheta_{10}(v)}{\vartheta_{01}(v)}\,\frac{1 - 4\dfrac{\vartheta_{00}^2}{\vartheta_{10}^2}\,\dfrac{\vartheta_{11}^2(v)}{\vartheta_{01}^2(v)} + 6\dfrac{\vartheta_{11}^4(v)}{\vartheta_{01}^4(v)} - 4\dfrac{\vartheta_{10}^2}{\vartheta_{00}^2}\,\dfrac{\vartheta_{11}^6(v)}{\vartheta_{01}^6(v)} + \dfrac{\vartheta_{11}^8(v)}{\vartheta_{01}^8(v)}}{1 - 6\dfrac{\vartheta_{11}^4(v)}{\vartheta_{01}^4(v)} + 4\dfrac{\vartheta_{00}^4+\vartheta_{10}^4}{\vartheta_{00}^2\vartheta_{10}^2}\,\dfrac{\vartheta_{11}^6(v)}{\vartheta_{01}^6(v)} - 3\dfrac{\vartheta_{11}^8(v)}{\vartheta_{01}^8(v)}}$$

$$\frac{\vartheta_{00}(3v)}{\vartheta_{01}(3v)} = \frac{\vartheta_{00}(v)}{\vartheta_{01}(v)} \frac{1-4\frac{\vartheta_{10}^2}{\vartheta_{00}^2}\frac{\vartheta_{11}^2(v)}{\vartheta_{01}^2(v)}+6\frac{\vartheta_{11}^4(v)}{\vartheta_{01}^4(v)}-4\frac{\vartheta_{00}^2}{\vartheta_{10}^2}\frac{\vartheta_{11}^6(v)}{\vartheta_{01}^6(v)}+\frac{\vartheta_{11}^8(v)}{\vartheta_{01}^8(v)}}{1-6\frac{\vartheta_{11}^4(v)}{\vartheta_{01}^4(v)}+4\frac{\vartheta_{00}^2-\vartheta_{10}^2}{\vartheta_{00}^2\vartheta_{10}^2}\frac{\vartheta_{11}^6(v)}{\vartheta_{01}^6(v)}-3\frac{\vartheta_{11}^8(v)}{\vartheta_{01}^8(v)}}$$

Durch diese Gleichungen sind die Quotienten je zweier ϑ-Functionen des dreifachen Argumentes ausgedrückt durch die Quotienten je zweier ϑ-Functionen des einfachen Argumentes.

Diese Quotienten der ϑ-Functionen stehen nun mit den elliptischen Functionen sinam, cosam, δam, wofür wir abkürzend schreiben werden s, c, δ, wenn wir

$$v = \frac{u}{2K}, \quad u = \int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-k^2\mu^2)}}$$

$$K = \int_0^1 \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-k^2\mu^2)}}, \quad K' = \int_0^1 \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-k'^2\mu^2)}} \tag{5}$$

setzen, in folgender Beziehung

$$-\frac{\vartheta_{00}}{\vartheta_{10}}\frac{\vartheta_{11}(v)}{\vartheta_{01}(v)} = s(u), \quad \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{10}}\frac{\vartheta_{10}(v)}{\vartheta_{01}(v)} = c(u)$$

$$\frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{00}}\frac{\vartheta_{00}(v)}{\vartheta_{01}(v)} = \delta(u), \quad \frac{\vartheta_{10}}{\vartheta_{00}} = \sqrt{k}, \quad \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{00}} = \sqrt{k'} \tag{6}$$

Führen wir diese Zeichen ein und setzen wir $u = \frac{u}{3}$, so erhalten wir aus (4) die allgemeine Dreiteilungsgleichung in der bekannten Form

$$s(u) = s\left(\frac{u}{3}\right)\frac{3-4(1+k^2)s^2\left(\frac{u}{3}\right)+6k^2s^4\left(\frac{u}{3}\right)-k^4s^8\left(\frac{u}{3}\right)}{1-6k^2s^4\left(\frac{u}{3}\right)+4k^2(1+k^2)s^6\left(\frac{u}{3}\right)-3k^4s^8\left(\frac{u}{3}\right)} \tag{7}$$

Wir gehen nunmehr über zur Ableitung des Additionstheorems der elliptischen Functionen in der Hermite'schen Form [1]), und setzen zu diesem Zwecke

$$\Phi(v) = \vartheta_{11}(v)\sum_0^n p_m\vartheta_{11}^{2m}(v)\,\vartheta_{01}^{2n-2m}(v) + \vartheta_{10}(v)\,\vartheta_{00}(v)\sum_0^{n-1} q_m\vartheta_{11}^{2m}(v)\,\vartheta_{01}^{2n-2m-1}(v)$$

---

1) Hermite, Uebersicht d. Theorie d. elliptischen Functionen. 1863. (übers. v. Natani). — Clebsch, Vorles. über Geometrie. Herausg. v. Lindemann. 1876. pag. 605 ff.

Es folgt dann aus (1)

$$\Phi(v+2) = \Phi(v), \quad \Phi(v+\omega) = -e^{-(2n+1)(\pi i\omega+2\pi iv)}\Phi(v)$$

Definiren wir ferner durch

$$X(v) = \vartheta_{11}(v-v_1)\,\vartheta_{11}(v-v_2)\,\ldots\,\vartheta_{11}(v-v_{2n+1})$$

eine Function von v, deren Verschwindungswerte nach (2) v_1, v_2, .. v_{2n+1} sind, so erhalten wir unter der Annahme der Gleichung

$$v_1+v_2+\ldots+v_{2n+1} = 0$$

$$X(v+2) = X(v), \quad X(v+\omega) = -e^{-(2n+1)(\pi i\omega+2\pi iv)}X(v)$$

Wir können daher bei passender Bestimmung der p_m und q_m

$$\Phi(v) = A\,.\,X(v)$$

setzen, wo A eine Constante bedeutet. Führen wir nun zwei neue Functionen $\varphi(v)$ und $\varphi_1(v)$ durch die Gleichungen

$$\varphi(v) = \frac{\Phi(v)}{\vartheta_{01}^{2n+1}(v)}, \quad \varphi_1(v) = \frac{\Phi_1(v)}{\vartheta_{01}^{2n+1}(v)}$$

ein, wo $\Phi_1(v) = -\Phi(-v)$ ist, so erhalten wir

$$\varphi(v)\,\varphi_1(v) = \frac{\vartheta_{11}^2(v)}{\vartheta_{01}^2(v)}\left(\sum_0^n p_m\frac{\vartheta_{11}^{2m}(v)}{\vartheta_{01}^{2m}(v)}\right)^2 - \frac{\vartheta_{10}^2(v)\,\vartheta_{00}^2(v)}{\vartheta_{01}^4(v)}\left(\sum_0^{n-1} q_m\frac{\vartheta_{11}^{2m}(v)}{\vartheta_{01}^{2m}(v)}\right)^2$$

Hieraus folgt nach den Formeln (2) für $v = 0$

$$\varphi(0)\,.\,\varphi_1(0) = -\varphi^2(0) = -q_0^2$$

Da nun $v_1 \ldots v_{2n+1}$ die Verschwindungswerte von $X(v)$ sind, sind sie das auch von $\Phi(v)$, also auch von $\varphi(v)$, also auch von $\varphi(v)\,.\,\varphi_1(v)$. Nehmen wir ferner in dem Ausdruck für $\varphi(v)\,.\,\varphi_1(v)$ die Factoren in die Summenzeichen hinein und berücksichtigen (3), so ist sofort ersichtlich, dass $\varphi(v)\,.\,\varphi_1(v)$ eine Function ist, welche nach Potenzen von $\dfrac{\vartheta_{11}^2(v)}{\vartheta_{01}^2(v)}$ geordnet werden kann und vom Grade $2n+1$ ist. Wir können sie daher, wenn wir den Coefficienten der höchsten Potenz gleich 1 annehmen, in die Form schreiben

$$\varphi(v)\,.\,\varphi_1(v) = \prod_{1,2n+1}^{i}\left(\frac{\vartheta_{11}^2(v)}{\vartheta_{01}^2(v)} - \frac{\vartheta_{11}^2(v_i)}{\vartheta_{01}^2(v_i)}\right)$$

Hieraus folgt für $v = 0$

$$\varphi(0)\,.\,\varphi_1(0) = -\varphi^2(0) = -\prod_{1,2n+1}^{i}\frac{\vartheta_{11}^2(v_i)}{\vartheta_{01}^2(v_i)}$$

Wenn wir in dieser Gleichung gemäss obiger Relation

$$v_{2n+1} = -(v_1 + \dots + v_{2n})$$

setzen und bei dem Wurzelziehen aus beiden Seiten aus einem leicht einzusehenden Grunde das positive Zeichen nur berücksichtigen, so wird

$$\frac{\vartheta_{11}(v_1 + \dots + v_{2n})}{\vartheta_{01}(v_1 + \dots + v_{2n})} = \frac{\varphi(0)}{\prod\limits_{1,2n}^{i} \frac{\vartheta_{11}(v_i)}{\vartheta_{01}(v_i)}} \tag{8}$$

Wir haben ferner, da $p_n = 1$ angenommen war,

$$\varphi(v) = \frac{\vartheta_{11}(v)}{\vartheta_{01}(v)} \left(\sum_0^{n-1} p_m \frac{\vartheta_{11}{}^{2m}(v)}{\vartheta_{01}{}^{2m}(v)} + \frac{\vartheta_{11}{}^{2n}(v)}{\vartheta_{01}{}^{2n}(v)} \right)$$
$$+ \frac{\vartheta_{10}(v)\,\vartheta_{00}(v)}{\vartheta_{01}{}^{2}(v)} \sum_0^{n-1} q_m \frac{\vartheta_{11}{}^{2m}(v)}{\vartheta_{01}{}^{2m}(v)} \tag{9}$$

Setzen wir hierin $v = v_i$, wo i die Werte 1, 2, ... $2n$ hat, und berücksichtigen wir, dass sich für $v_i = 0$ der Wert von $q_0 = 0$ bestimmt, so erhalten wir, wenn wir noch durch den Factor $\frac{\vartheta_{11}(v_i)}{\vartheta_{01}(v_i)}$ dividiren, folgendes Gleichungssystem:

$$0 = \sum_0^{n-1} p_m \frac{\vartheta_{11}{}^{2m}(v_i)}{\vartheta_{01}{}^{2m}(v_i)} + \frac{\vartheta_{11}{}^{2n}(v_i)}{\vartheta_{01}{}^{2n}(v_i)} + \frac{\vartheta_{10}(v_i)\,\vartheta_{00}(v_i)}{\vartheta_{01}{}^{2}(v_i)} \sum_1^{n-1} q_m \frac{\vartheta_{11}{}^{2m-1}(v_i)}{\vartheta_{01}{}^{2m-1}(v_i)} \tag{10}$$

$$i = 1,\ 2,\ \dots\ 2n$$

In den Formeln (8), (9), (10) ist aber das Additionstheorem in der Hermite'schen Form schon enthalten. Setzen wir nämlich $v_{2n} = 0$, so haben wir folgende Gleichungen:

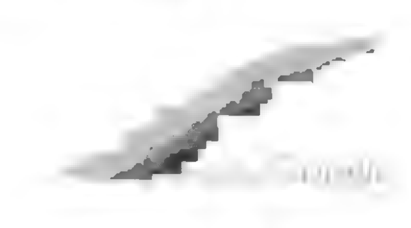
$$\frac{\varphi(0)}{0} = \frac{\vartheta_{11}(v_1 + \dots + v_{2n-1})}{\vartheta_{01}(v_1 + \dots + v_{2n-1})} \tag{11}$$

$$\frac{\varphi(v)}{\frac{\vartheta_{11}(v)}{\vartheta_{01}(v)}} = \sum_0^{n-1} p_m \frac{\vartheta_{11}{}^{2m}(v)}{\vartheta_{01}{}^{2m}(v)} + \frac{\vartheta_{11}{}^{2n}(v)}{\vartheta_{01}{}^{2n}(v)} + \frac{\vartheta_{00}(v)\,\vartheta_{10}(v)}{\vartheta_{01}{}^{2}(v)} \sum_1^{n-1} q_m \frac{\vartheta_{11}{}^{2m-1}(v)}{\vartheta_{01}{}^{2m-1}(v)}$$

$$0 = \sum_0^{n-1} p_m \frac{\vartheta_{11}{}^{2m}(v_i)}{\vartheta_{01}{}^{2m}(v_i)} + \frac{\vartheta_{11}{}^{2n}(v_i)}{\vartheta_{01}{}^{2n}(v_i)} + \frac{\vartheta_{00}(v_i)\,\vartheta_{10}(v_i)}{\vartheta_{01}{}^{2}(v_i)} \sum_1^{n-1} q_m \frac{\vartheta_{11}{}^{2m-1}(v_i)}{\vartheta_{01}{}^{2m-1}(v_i)}$$

$$i = 1,\ 2,\ \dots\ 2n-1$$

Die letzte Gleichung von (11) repräsentirt ein System von $2n-1$ Gleichungen, aus denen sich die $2n-1$ Unbekannten p_m und q_m nach den bekannten Regeln der Determinantentheorie bestimmen lassen. Die Werte von p_m und q_m setzen wir in die zweite Gleichung



von (11) ein und lassen dann in ihr $v = 0$ werden. Dadurch erhalten wir linker Hand $\frac{\varphi(0)}{0}$ und somit mit Hilfe der ersten Gleichung von (11) eine Formel für das Additionstheorem des Quotienten $\frac{\vartheta_{11}}{\vartheta_{01}}$ für eine ungerade Anzahl der Argumente v_i. Der Uebergang von den ϑ-Functionen auf die gebräuchlichen Functionen s, c, δ geschieht durch die Formeln (6).

Uns interessirt im Folgenden hauptsächlich der Fall $n = 2$. Die Constanten p_0, p_1, q_1 bestimmen sich aus den drei Gleichungen

$$0 = p_0 + p_1 \frac{\vartheta_{11}^2(v_i)}{\vartheta_{01}^2(v_i)} + \frac{\vartheta_{11}^4(v_i)}{\vartheta_{01}^4(v_i)} + q_1 \frac{\vartheta_{00}(v_i)\,\vartheta_{10}(v_i)}{\vartheta_{01}^2(v_i)} \frac{\vartheta_{11}(v_i)}{\vartheta_{01}(v_i)}$$
$$i = 1, 2, 3$$

Setzen wir die Werte von p_0, p_1, q_1 in die zweite Gleichung (11) ein und lassen $v = 0$ werden, so erhalten wir unter Berücksichtigung der ersten Gleichung (11) eine Formel für

$$\frac{\vartheta_{11}(v_1 + v_2 + v_3)}{\vartheta_{01}(v_1 + v_2 + v_3)}$$

von der wir mit Hilfe von (5) und (6), wenn wir den v_1, v_2, v_3 die Argumentwerte u_1, u_2, u_3 entsprechen lassen, leicht auf die bekannte Form kommen:

$$s(u_1 + u_2 + u_3) = \frac{\begin{vmatrix} s^3(u_1) & s(u_1) & c(u_1)\,\delta(u_1) \\ s^3(u_2) & s(u_2) & c(u_2)\,\delta(u_2) \\ s^3(u_3) & s(u_3) & c(u_3)\,\delta(u_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2(u_1) & 1 & s(u_1)\,c(u_1)\,\delta(u_1) \\ s^2(u_2) & 1 & s(u_2)\,c(u_2)\,\delta(u_2) \\ s^2(u_3) & 1 & s(u_3)\,c(u_3)\,\delta(u_3) \end{vmatrix}} \tag{12}$$

Es zieht daher die Bedingung, dass der Zähler verschwinden soll, die Folge nach sich, dass

$$s(u_1 + u_2 + u_3) = 0$$

oder

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0 \quad (\text{mod } 4K,\ 4iK') \tag{13}$$

ist. Ich schliesse mit diesem wichtigen Hermite'schen Satze die einleitenden Betrachtungen.

§ 2.

Die Behandlung des Problemes der Wendepunkte einer zweiteiligen Curve dritter Ordnung mit Hilfe der Dreiteilung der elliptischen Functionen unter Zugrundelegung der Normalform

$$F \equiv y_3^2 y_1 - y_2(y_2 - y_1)(y_2 - k^2 y_1) = 0 \tag{14}$$

ist bisher am weitesten geführt worden in den von Lindemann herausgegebenen „Vorlesungen über Geometric" von Clebsch (pag. 602 bis 609). Für diese Normalform[1]) ist der eine Eckpunkt des Coordinatendreiecks $\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$ gleichzeitig ein Wendepunkt, der mithin als bekannt vorausgesetzt wird, $y_1 = 0$ seine Wendetangente; die drei Geraden

$$y_2 = 0, \quad y_2 - y_1 = 0, \quad y_2 - k^2 y_1 = 0$$

sind die vom Wendepunkt $\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$ an die Curve zu ziehenden Tangenten; $y_3 = 0$ ist die harmonische Polare. Die drei Seiten des Coordinatendreiecks sind also

Wendetangente $y_1 = 0$, Tangente $y_2 = 0$, harmonische Polare $y_3 = 0$.

k^2, das Doppelverhältniss der vier Tangenten

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_2 - y_1 = 0, \quad y_2 - k^2 y_1 = 0$$

ist reell und genügt der Ungleichung

$$0 < k^2 < 1$$

Der Gleichung $F = 0$ wird genügt durch

$$\varrho y_1 = s^3(u), \quad \varrho y_2 = s(u), \quad \varrho y_3 = c(u)\,\delta(u) \tag{15}$$

und es sind daher dadurch die Coordinaten eines Punktes der Curve $F = 0$ als elliptische Functionen eines Parameters dargestellt. Bezeichnen wir nun die Coordinatenwerte von drei Punkten der Curve durch

$$\varrho' y_i', \quad \varrho'' y_i'', \quad \varrho''' y_i''' \quad (i = 1, 2, 3)$$

und entsprechend die Parameter mit $u_1\, u_2\, u_3$, so muss, wenn die drei Punkte auf einer Geraden liegen sollen

$$\begin{vmatrix} y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix} = 0$$

oder nach (15), (12) und (13)

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0 \pmod{4K,\ 4iK'}$$

---

1) Vergl. Clebsch u. Gordan, Theorie d. Abel'schen Functionen, Leipzig 1866, pag. 72, und Harnack, Mathem. Annalen, Bd. 9, pag. 2 ff.

sein. Als Bedingung für einen Wendepunkt ergiebt sich daher, wenn wir $u_1 = u_2 = u_3 = \omega$ setzen,

$$3\omega \equiv 0 \pmod{4K,\ 4iK'} \quad \text{oder} \quad \omega = \frac{4mK + 4niK'}{3} \tag{16}$$

Dadurch, dass wir hierin m und n die Werte

$$\begin{matrix} 00 & 01 & 02 \\ 10 & 11 & 12 \\ 20 & 21 & 22 \end{matrix}$$

zuerteilen, gewinnen wir die Parameterwerte der neun Wendepunkte der Curve in der Form:

$$\begin{matrix} 0 & \frac{4iK'}{3} & \frac{8iK'}{3} \\ \frac{4K}{3} & \frac{4K+4iK'}{3} & \frac{4K+8iK'}{3} \\ \frac{8K}{3} & \frac{8K+4iK'}{3} & \frac{8K+8iK'}{3} \end{matrix}$$

Setzen wir diese Argumentwerte für u in die Gleichungen (15) ein, so erhalten wir die Coordinatenwerte sämmtlicher neun Wendepunkte. Die Bestimmung dieser Coordinatenwerte soll nunmehr der Untersuchungsgegenstand des Folgenden sein.

Berücksichtigen wir, dass die Functionen $s(u)$, $c(u)$, $\delta(u)$, welche einzig und allein in den Formeln für die Coordinatenwerte vorkommen, die Perioden $4K$ und $4iK'$ haben, so können wir das obige System der Argumentwerte auch in die Form

$$\begin{matrix} 0 & \frac{4iK'}{3} & -\frac{4iK'}{3} \\ \frac{4K}{3} & \frac{4K+4iK'}{3} & \frac{4K-4iK'}{3} \\ -\frac{4K}{3} & -\frac{4K-4iK'}{3} & -\frac{4K+4iK'}{3} \end{matrix} \tag{17}$$

schreiben und sehen also, dass je zwei von den von Null verschiedenen Argumentwerten einander gleich sind, aber entgegengesetztes Zeichen haben. Dann lautet aber das System der Coordinatenwerte der neun Wendepunkte der Curve $F = 0$ folgendermassen:

$$\begin{aligned} \varrho_h y_1^{(h)} &= s^3(\omega) \\ \varrho_h y_2^{(h)} &= s(\omega) \\ \varrho_h y_3^{(h)} &= c(\omega)\,\delta(\omega) \end{aligned} \tag{18}$$

wo ω einen der Werte von (17) bedeutet. In der obigen Gleichung der Curve dritter Ordnung sind uns jedoch nicht die elliptischen Functionen obiger Argumente gegeben, sondern es ist als bekannt vorausgesetzt das Doppelverhältniss k^2, der zu diesen Functionen gehörige Modul. Wenn wir daher die Coordinatenwerte der Wendepunkte durch gegebene Grössen bestimmen wollen, wird es unsere Aufgabe sein, die elliptischen Functionen obiger Argumente auszudrücken durch k^2 oder wenigstens solche Grössen, welche aus k^2 berechenbar sind. Zu diesem Zwecke kann man sich zweier Wege bedienen. Man benutzt entweder die unendlichen Summen oder Productformeln für die elliptischen Functionen und erhält dann für die Coordinatenwerte unendliche Summen oder Producte, oder man bedient sich der Wurzeln der speciellen Dreiteilungsgleichung und erhält für die Coordinatenwerte geschlossene, aber irrationale Ausdrücke. Beide Wege werden im Folgenden eingeschlagen werden.

Durch eine der soeben gegebenen ganz analoge Behandlungsweise ist das Problem der Wendepunkte der einteiligen Curve dritter Ordnung auch auf die Dreiteilung der elliptischen Functionen zurückgeführt worden von Harnack (Math. Ann. Bd. 9. pag. 19). Es tritt die Normalform

$$\frac{y_1 y_3^2}{\alpha + i\beta} - y_2(y_2 - y_1)(y_2 - k^2 y_1) = 0$$

auf, wo $k^2 = \dfrac{\alpha - i\beta}{\alpha + i\beta}$ ist, also einen complex imaginären Wert hat. Die Coordinaten eines beliebigen Punktes einer solchen Curve sind, wenn u einen ganz beliebigen Parameter bedeutet,

$$\varrho y_1 = s^3(u), \quad \varrho y_2 = s(u), \quad \varrho y_3 = \sqrt{\alpha + i\beta}\, c(u)\, \delta(u)$$

und daher die Coordinatenwerte der neun Wendepunkte in der Form

$$\varrho_h y_1^{(h)} = s^3(\omega)$$
$$\varrho_h y_2^{(h)} = s(\omega)$$
$$\varrho_h y_3^{(h)} = \sqrt{\alpha + i\beta}\, c(\omega)\, \delta(\omega)$$

enthalten, wo ω einen der Werte aus (17) bedeutet. Da nun aber auch die einteilige Curve dritter Ordnung reelle Wendepunkte hat, ist es notwendig, das Imaginäre auch wirklich aus den Coordinatenwerten herauszuschaffen. Der Fall der einteiligen Curve unterscheidet sich aber von dem vorhergehenden noch dadurch, dass zu den in den Coordinatenwerten vorkommenden, elliptischen Functionen ein imaginärer Modul gehört. Für einen solchen Modul gelten aber ohne weiteres nicht alle im Folgenden angewendeten Formeln. Ich überlasse daher die Untersuchung des Falles der einteiligen Curve einer späteren Arbeit.

§ 3.

Für den Fall einer zweiteiligen Curve dritter Ordnung ist das Doppelverhältniss k^2 reell und genügt der Ungleichung $0 < k^2 < 1$. Unsere Aufgabe ist zunächst, die Coordinatenwerte der Wendepunkte durch k^2 oder durch Grössen, welche aus k^2 berechenbar sind, auszudrücken. Zu diesem Zwecke setzen wir aus der Theorie der elliptischen Functionen folgende Formeln als bekannt voraus:

$$k^2 + k'^2 = 1$$

$$\lambda = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}$$

$$q = \frac{\lambda}{2} + 2\left(\frac{\lambda}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{\lambda}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{13} + \dots$$

$$lq \,.\, lq_1 = \pi^2 \quad \text{oder} \quad \log q \,.\, \log q_1 = (\pi \log e)^2$$

$$s(u) = \sin\frac{\pi u}{2K} \prod_1^\infty \left(\frac{1+q^{2h-1}}{1+q^{2h}}\right)^2 \frac{1-2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}}$$

$$c(u) = \cos\frac{\pi u}{2K} \prod_1^\infty \left(\frac{1-q^{2h-1}}{1+q^{2h}}\right)^2 \frac{1+2q^{2h}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}}$$

$$\delta(u) = \prod_1^\infty \left(\frac{1-q^{2h-1}}{1+q^{2h-1}}\right)^2 \frac{1+2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}}{1-2q^{2h-1}\cos\frac{\pi u}{K} + q^{4h-2}}$$

Diese Formeln gelten für einen reellen Modul k und für ein reelles Argument u. Um sie in Formeln für den Modul k' umzuformen, haben wir K in K', K' in K, und da

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}, \quad q_1 = e^{-\frac{\pi K}{K'}}$$

ist, q in q_1 übergehen zu lassen. Wir erhalten dann $s(u, k')$, $c(u, k')$, $\delta(u, k')$ ausgedrückt durch ganz analoge Formeln wie $s(u)$, $c(u)$, $\delta(u)$, nur dass in ihnen statt K, K', q steht K', K, q_1. Aus der Theorie der elliptischen Functionen sind ferner bekannt die Formeln

$$s(iu, k) = i\,\frac{s(u, k')}{c(u, k')}$$

und daher unter Berücksichtigung von [illegible] [illegible]

schreiben,

$$s\left(-\frac{4K+4iK'}{3}\right)=-D-iE$$

$$c\left(-\frac{4K+4iK'}{3}\right)\delta\left(-\frac{4K+4iK'}{3}\right)=\mp F+iG \qquad (k^2A^2A_1^2 \lesseqgtr 1)$$

$$s\left(\frac{4K-4iK'}{3}\right)=D-iE$$

$$c\left(\frac{4K-4iK'}{3}\right)\delta\left(\frac{4K-4iK'}{3}\right)=\mp F-iG \qquad (k^2A^2A_1^2 \lesseqgtr 1)$$

$$s\left(-\frac{4K-4iK'}{3}\right)=-D+iE$$

$$c\left(-\frac{4K-4iK'}{3}\right)\delta\left(-\frac{4K-4iK'}{3}\right)=\mp F-iG \qquad (k^2A^2A_1^2 \lesseqgtr 1)$$

Andere Grössen, als die in (19) aufgeführten, kommen in dem System (18) nicht vor, wir können somit das Problem der Bestimmung der Coordinaten der Wendepunkte durch eindeutige Ausdrücke als gelöst betrachten.

Nun lassen sich zwar aus k^2 die Grössen q und q_1, und aus diesen wieder die in (18) vorkommenden Werte von $s(\omega)$ und $c(\omega).\delta(\omega)$ mit beliebiger Genauigkeit berechnen, und zwar sind die Formeln (19), wie ich noch später zu zeigen gedenke, zu einer etwaigen Berechnung der Coordinatenwerte sehr wohl brauchbar, aber Ausdrücke für die Coordinatenwerte in k^2 selbst bietet diese Lösung des Problems nicht. Auf einem anderen Wege werden wir für die Coordinatenwerte eindeutige Ausdrücke in k^2 selbst erhalten und zwar geschlossene Ausdrücke, nicht, wie hier, nur Annäherungsformeln. Doch das System (19) hat nicht allein den Zweck, brauchbare Rechenformeln zu bieten, sondern noch einen anderen, der im Verlauf der folgenden Untersuchung klar werden wird. Ich bemerke vorläufig, dass es uns später hauptsächlich auf die Vorzeichen in obigen Ausdrücken ankommen wird.

§ 4.

Wie schon oben angedeutet wurde, lässt sich das Problem der Bestimmung der Coordinaten der Wendepunkte der Curve 3. Ordnung noch auf einem anderen Wege in Angriff nehmen, welcher für die Coordinatenwerte geschlossene Ausdrücke aus dem Doppelverhältniss k^2 und numerischen Coefficienten ergiebt. Die Grundlage, auf der diese ganze folgende Untersuchung beruht, ist ein Satz von Abel aus seinen „Recherches sur les fonctions elliptiques" (oeuvres complètes 1881. T. I. pag. 277 ff. 285 ff. 305), der für die $2n+1$ Teilung abgeleitet ist und hier, für den Fall der Dreiteilung specialisirt, ange-

geben werden soll. Nach diesem Satze sind sämmtliche neun Wurzeln der allgemeinen Dreiteilungsgleichung (7) dargestellt durch die Form

$$(-1)^{\mu+\mu'} s\left(\frac{u}{3} + \frac{2\mu K + 2\mu' iK'}{3}\right)$$

Wir erhalten die einzelnen Wurzelwerte, wenn wir μ und μ' die Werte -1, 0 und $+1$ durchlaufen lassen. Setzen wir nun

$$u = 2\mu K + 2\mu' iK' \quad \text{und} \quad s\left(\frac{2\mu K + 2\mu' iK'}{3}\right) = z$$

so geht die allgemeine Dreiteilungsgleichung (7) über in die specielle, welche die Form

$$z(k^4 z^8 - 6k^2 z^4 + 4(1+k^2)z^2 - 3) = 0 \tag{20}$$

annimmt, und deren Wurzeln in der Form

$$z = (-1)^{\mu+\mu'} s\left(\frac{4\mu K + 4\mu' iK'}{3}\right)$$

enthalten sein werden, wenn μ und μ' die Werte -1, 0 und $+1$ durchlaufen. Durch Einsetzen der neun verschiedenen Wertepaare für μ und μ' überzeugt man sich leicht, dass die in der letzten Gleichung enthaltenen Argumentwerte vollständig übereinstimmen mit denen des Systems (17), dass also die Wurzeln von (20) auch in der Form

$$z = s\left(\frac{4mK + 4niK'}{3}\right) \tag{21}$$

enthalten sind, wo m und n ein vollständiges Restsystem nach dem Modul 3 durchlaufen. Wir können somit die Behauptung aufstellen, dass die neun Wurzelwerte der speciellen Dreiteilungsgleichung (20), welche wir durch Auflösung von (20) durch k^2 ausgedrückt erhalten können, identisch sind mit den neun Werten des Ausdruckes $s\left(\frac{4mK + 4niK'}{3}\right)$, welche wir erhalten, wenn wir m und n ein vollständiges Restsystem nach dem Modul 3 durchlaufen lassen.

Im Hinblick auf diesen von Abel hergeleiteten und hier nur in etwas anderer Form ausgesprochenen Satz kann in den schon erwähnten „Vorlesungen über Geometrie von Clebsch“ pag. 609 folgende Behauptung ausgesprochen werden: „Das Problem der Bestimmung der Wendepunkte ist sonach, wenn ein Wendepunkt $u \equiv 0$ bekannt ist, identisch mit dem Problem der sogenannten speciellen Dreiteilung der elliptischen Functionen.“ Damit ist der Weg für eine neue Durchführung dieses Problemes eröffnet; da dieselbe bisher meines

Wissens noch nicht erfolgt ist, soll sie nunmehr der Zweck des folgenden Teiles dieser Arbeit werden.

Gehen wir zur Auflösung der speciellen Dreiteilungsgleichung (20) über, so ist erstens ersichtlich, dass sich sämmtliche neun Wurzeln derselben ausdrücken lassen durch k^2 und numerische Coefficienten, ferner, dass sich eine Wurzel

$$z_0 = 0$$

sofort absondern lässt und die anderen acht sich aus der Gleichung achten Grades

$$z^8 - \frac{6}{k^2} z^4 + 4 \frac{1+k^2}{k^4} z^2 - \frac{3}{k^4} = 0$$

ergeben, die in Bezug auf z^2 vom vierten Grade ist. Setzen wir

$$z^2 = x$$

so ergiebt sich

$$x^4 - \frac{6}{k^2} x^2 + 4 \frac{1+k^2}{k^4} x - \frac{3}{k^4} = 0 \tag{22}$$

also eine biquadratische Gleichung[1]), in welcher der Coefficient der dritten Potenz von x gleich Null ist, und welche zu der Gruppe von biquadratischen Gleichungen gehört, deren erste Invariante, welche hier die Form

$$-\frac{3}{k^4} + 3\left(-\frac{1}{k^2}\right)^2$$

haben würde, verschwindet.

Hermite[2]) hat diese Gruppe von Gleichungen in Zusammenhang mit der aus der Theorie der Transformation dritten Grades bekannten Multiplicatorgleichung

$$\left(\frac{1}{M}\right)^4 - 6\left(\frac{1}{M}\right)^2 + 8(1-2\lambda^2)\frac{1}{M} - 3 = 0 \tag{23}$$

gebracht, und den Wert, welchen Jacobi für den Multiplicator M angegeben hat, zur Bestimmung der Wurzeln dieser Gleichungen *vierten* Grades durch elliptische Functionen verwandt. Hermite giebt zwei Arten von Wurzelausdrücken an; die eine enthält die von ihm *in die* Theorie der elliptischen Functionen eingeführte φ-Function, welche durch die Gleichung

$$\sqrt[4]{\lambda} = \varphi(\omega)$$

1) Abel (a. a. O. T. I. pag. 305) hat schon alle diese Eigenschaften für den Fall der $2n+1$ Teilung angegeben.

2) Hermite, Sur la théorie des équations modulaires. Paris 1859, pag. 10 ff.

definirt wird und eine eindeutige Function von ω ist (ω hat den Wert $\frac{iK'}{K}$), die andere enthält ähnlich, wie die oben gegebene Abel'sche Lösung der speciellen Dreiteilungsgleichung elliptische Functionen und zwar s, c und δ des Argumentes $\frac{4\mu K + 4\mu' iK'}{3}$, wo hier natürlich K und K' für einen anderen Modul zu nehmen sind als bei der Lösung der Dreiteilungsgleichung. Die Gleichung, deren Wurzeln Hermite angeben will, ist

$$f(x) \equiv x^4 - 6Sx^2 - 8Tx - 3S^2 = 0$$

Die erste Lösung beruht nun auf folgendem: In den aus der Transformationstheorie dritter Ordnung bekannten Formeln

$$\frac{1}{M} = 1 + 2\frac{u^3}{v}, \quad u^4 - 2u^3v^3 + 2uv - v^4 = 0$$

und der Multiplicatorgleichung (23) setzt Hermite an Stelle von λ^2 $\frac{1}{\lambda^2}$ und erhält dann, wenn $u = \varphi(\omega)$ gesetzt wird, die vier zur Modulargleichung gehörigen Werte von v in der Form [1])

$$v = \left(\frac{2}{t}\right) \varphi\left(\frac{t\omega - 16\xi}{t'}\right)$$

und daher die vier Werte von $\frac{1}{M}$ in der Form

$$\frac{1}{M} = 1 + 2\frac{v}{u^3} = 1 + 2\frac{\left(\frac{2}{t}\right) \varphi\left(\frac{t\omega - 16\xi}{t'}\right)}{\varphi^3(\omega)}$$

Die Gleichung $f(x) = 0$ entsteht aber aus der Multiplicatorgleichung, in welcher λ^2 in $\frac{1}{\lambda^2}$ verwandelt wurde, dadurch dass man

$$\frac{\sqrt{S}}{M} = x, \quad \lambda^2 = \frac{2\sqrt{S^3}}{T + \sqrt{S^3}}$$

setzt. Mithin werden die Wurzeln von $f(x) = 0$ in der Form

$$x = \sqrt{S}\left(1 + 2\frac{\left(\frac{2}{t}\right) \varphi\left(\frac{t\omega - 16\xi}{t'}\right)}{\varphi^3(\omega)}\right)$$

enthalten sein.

---

1) Vergl. Königsberger, Vorles. über die Theorie d. ellipt. Functionen, Teil II, pag. 138.

Die zweite Art der Wurzelbestimmung von $f(x) = 0$ beruht auf dem in den „Fundamenta“ gegebenen Wert des Multiplicators

$$\frac{1}{M} = -\frac{s^2(w)\,\delta^2(w)}{c^2(w)}$$

wo w die Form $\frac{4\mu K + 4\mu' iK'}{3}$ hat. Die hierin enthaltenen vier Werte von $\frac{1}{M}$ müssen Wurzeln unserer Multiplicatorgleichung (23) sein. Durch die Substitution

$$\frac{\sqrt{S}}{M} = x, \quad \lambda^2 = \frac{T + \sqrt{S^3}}{2\sqrt{S^3}}$$

geht dieselbe aber über in $f(x) = 0$, und die Wurzeln dieser Gleichung sind daher in der Form

$$x = -\sqrt{S}.\frac{s^2(w)\delta^2(w)}{c^2(w)}$$

enthalten [1]).

Das Princip bei diesen Wurzelbestimmungen war also das: Man transformirte durch lineare Substitutionen die Multiplicatorgleichung in die Gleichung, deren Wurzeln zu bestimmen waren, und bestimmte dann diese Wurzeln durch Anwendung derselben Substitutionen auf die Wurzelwerte der Multiplicatorgleichung. Es liegt nun der Gedanke nahe, etwas ähnliches auch für unsere Gleichung auszuführen, und das Resultat zu vergleichen mit dem in (21) enthaltenen Abel'schen. Die Multiplicatorgleichung (23) geht in unsere Gleichung (22) über, wenn wir

$$\frac{k}{M} = x, \qquad 8(1 - 2\lambda^2) = 4\frac{1 + k^2}{k}$$

setzen. Die letzte Gleichung ergiebt aber für k den Wert

---

1) Hermite erhält hier (vergl. auch pag. 24) an Stelle des negativen Zeichens ein positives. Das liegt daran, dass er nicht

$$\frac{1}{M} = z$$

sondern

$$\frac{1}{M} = -z$$

setzt. Seine Multiplicatorgleichung geht über in $f(x) = 0$ durch die Substitution $-\sqrt{S}z = x$. z ist aber jetzt gleich

$$\frac{s^2(w)\,\delta^2(w)}{c^2(w)}$$

und es muss daher für x die oben angegebene Form stehen.

$$k = (\lambda'^2 - \lambda^2) \pm 2i\lambda\lambda'$$

also einen complex imaginären Wert. Ein solcher ist aber für unseren Fall der zweiteiligen Curve dritter Ordnung vollständig ausgeschlosssen und daher eine der von Hermite angegebenen, ähnliche Bestimmungsart der Ausdrücke für die Wurzeln von (22) für uns unbrauchbar.

Wir gehen nun dazu über, die Gleichung (22) und damit die specielle Dreiteilungsgleichung (20) wirklich aufzulösen, die Wurzeln durch k^2 und numerische Coefficienten auszudrücken. Wenn auch nicht für dieselbe, so hat doch für eine ganz ähnliche Gleichung Clebsch eine Auflösung gegeben [1]). Ich will bis zur Aufstellung der kubischen Resolvente einer Behandlungsweise folgen, welche eine Gleichung dieser Art von Herrn Prof. H. Weber erfahren hat [2]).

Sind $x_0 x_1 x_2 x_3$ die vier Wurzeln der Gleichung (22), so bestehen zwischen denselben die Relationen

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_0x_1 + x_0x_2 + x_0x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\frac{6}{k^2}$$

$$x_0x_1x_2 + x_0x_1x_3 + x_0x_2x_3 + x_1x_2x_3 = -4\frac{1+k^2}{k^4}$$

$$x_0x_1x_2x_3 = -\frac{3}{k^4}$$

Definiren wir Θ durch die Gleichung

$$(x_0 - x_1 + x_2 - x_3)^2 = 16\Theta$$

so erhalten wir zur Bestimmung von Θ eine kubische Gleichung, welche wir in die Form

$$\Theta^3 + p\Theta^2 + q\Theta + r = 0$$

schreiben können. Nennen wir die drei Wurzeln dieser Gleichung $\Theta_0 \Theta_1 \Theta_2$, so erhalten wir zur Bestimmung der x durch die Θ folgende vier Gleichungen:

---

1) Clebsch „Theorie d. bin. Formen", 1871, pag. 171, und „Vorles. über Geometrie", pag. 566. Die von ihm behandelte Gleichung lautet

$$x^4 - Sx^2 + \tfrac{4}{3}Tx - \tfrac{1}{12}S^2 = 0.$$

2) Weber in seinen „Vorlesungen über d. analytische Theorie d. algebraischen Curven u. Flächen", S. S. 1880. Auch dort ist die Lösung für die Clebsch'sche Gleichungsform gegeben. Zu vergl. auch Serret, Handb. d. h. Analysis, Bd. 2, pag. 364.

$$x_0+x_1+x_2+x_3=0$$
$$x_0+x_1-x_2-x_3=\pm 4\sqrt{\Theta_0}$$
$$x_0-x_1+x_2-x_3=\pm 4\sqrt{\Theta_1}$$
$$x_0-x_1-x_2+x_3=\pm 4\sqrt{\Theta_2}$$

Es würden daher die Werte für die vier Wurzeln x_0, x_1, x_2, x_3 in der Form

$$x=\pm\sqrt{\Theta_0}\pm\sqrt{\Theta_1}\pm\sqrt{\Theta_2}$$

enthalten sein müssen. Diese giebt aber nicht vier sondern **acht** verschiedene Werte. Es werden daher nur bestimmte Vorzeichencombinationen gestattet sein. In der Tat lässt sich folgende Relation ableiten:

$$\pm 8\sqrt{\Theta_0\Theta_1\Theta_2}=(x_0+x_1)(x_0+x_2)(x_0+x_3)$$
$$=x_0x_1x_2+x_0x_1x_3+x_0x_2x_3+x_1x_2x_3$$

mithin

$$\pm 8\sqrt{\Theta_0\Theta_1\Theta_2}=-4\frac{1+k^2}{k^4}$$

Diese Gleichung legt aber die Zeichenabhängigkeit klar. Da die rechte Seite der Gleichung negativ ist, muss es auch die linke sein. Ist daher das Vorzeichen in zweien der Wurzeln festgelegt, so ist das der dritten vollständig durch obige Gleichung bestimmt. Wir werden, während wir das Zeichen von $\sqrt{\Theta_1}$ und $\sqrt{\Theta_2}$ willkürlich festlegen, ihr durch geeignete Bestimmung des Zeichens von $\sqrt{\Theta_0}$ in den einzelnen Fällen genügen. Es sei

$$\begin{aligned} x_0&=\pm\sqrt{\Theta_0}+\sqrt{\Theta_1}+\sqrt{\Theta_2}\\ x_1&=\pm\sqrt{\Theta_0}-\sqrt{\Theta_1}-\sqrt{\Theta_2}\\ x_2&=\mp\sqrt{\Theta_0}+\sqrt{\Theta_1}-\sqrt{\Theta_2}\\ x_3&=\mp\sqrt{\Theta_0}-\sqrt{\Theta_1}+\sqrt{\Theta_2}\end{aligned}\quad\text{und daher}\quad\begin{aligned}4\Theta_0&=(x_0+x_1)^2\\ 4\Theta_1&=(x_0+x_2)^2\\ 4\Theta_2&=(x_0+x_3)^2\end{aligned}$$

In der Gleichung

$$\Theta^3+p\Theta^2+q\Theta+r=0$$

ist ferner

$$p=-(\Theta_0+\Theta_1+\Theta_2),\quad q=\Theta_0\Theta_1+\Theta_0\Theta_2+\Theta_1\Theta_2,\quad r=-\Theta_0\Theta_1\Theta_2$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}4(\Theta_0+\Theta_1+\Theta_2)&=(x_0+x_1)^2+(x_0+x_2)^2+(x_0+x_3)^2\\&=(x_0+x_1+x_2+x_3)^2-2(x_0x_1+x_0x_2+x_0x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)\\&\qquad+2x_0(x_0+x_1+x_2+x_3)=\frac{12}{k^2}\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}16(\Theta_0\Theta_1+\Theta_0\Theta_2+\Theta_1\Theta_2)&=(x_1x_2-x_0x_3)^2+(x_1x_3-x_0x_2)^2+(x_2x_3-x_0x_1)^2\\&=x_1^2x_2^2+x_0^2x_3^2+x_1^2x_3^2+x_0^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_0^2x_1^2-6x_0x_1x_2x_3\end{aligned}$$

Die ersten sechs Glieder dieses Ausdrucks lassen sich auffassen als symmetrische Function der Wurzeln einer Gleichung vierten Grades, deren Wurzeln x_0^2, x_1^2, x_2^2, x_3^2 sind. Die Gleichung, welche diese Grössen zu Wurzeln hat, folgert man aus der ursprünglichen vierten Grades dadurch, dass man

$$-4\frac{1+k^2}{k^4}x = -\frac{3}{k^4} - \frac{6}{k^2}x^2 + x^4$$

ins Quadrat erhebt. Das giebt, wenn wir $x^2 = \mu$ setzen,

$$16\left(\frac{1+k^2}{k^4}\right)^2\mu = \left(\mu^2 - \frac{6}{k^2}\mu - \frac{3}{k^4}\right)^2$$

Hierin ist der Coefficient von $\mu^4 = 1$ und der von $\mu^2 = \frac{30}{k^4}$, folglich erhalten wir

$$\Theta_0\Theta_1 + \Theta_0\Theta_2 + \Theta_1\Theta_2 = \frac{3}{k^4}$$

Unsere kubische Resolvente hat daher die Form

$$\Theta^3 - \frac{3}{k^4}\Theta^2 + \frac{3}{k^4}\Theta - \tfrac{1}{4}\left(\frac{1+k^2}{k^4}\right)^2 = 0$$

Von dieser lässt sich gemäss der aus der Theorie der kubischen Gleichung bekannten Bedingung leicht einsehen, dass sie eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln hat. Schreiben wir sie in die Form

$$\left(\Theta - \frac{1}{k^2}\right)^3 = \tfrac{1}{4}\left(\frac{1+k^2}{k^4}\right)^2 - \frac{1}{k^6} = \frac{1}{k^6}R$$

wo also R den Wert hat

$$R = \frac{1}{4k^2}(1 + 2k^2 + k^4 - 4k^2) = \frac{k'^4}{4k^2}$$

so erhalten wir für die Wurzeln folgende Werte:

$$\Theta_0 = \frac{1}{k^2}(1 + \sqrt[3]{R})$$

$$\Theta_1 = \frac{1}{k^2}\left((1 - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{R}) + i\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{R}\right)$$

$$\Theta_2 = \frac{1}{k^2}\left((1 - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{R}) - i\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{R}\right)$$

Diese Werte von Θ_0, Θ_1, Θ_2 sind nun einzusetzen in die obigen Gleichungen für x_0, x_1, x_2, x_3. Dann sind die Wurzeln der Gleichung (22) ausgedrückt durch k^2 und numerische Coefficienten.

Da nun ferner

$$z = \pm \sqrt{x}$$

ist, erhalten wir die Wurzeln der speciellen Dreiteilungsgleichung (20) ausgedrückt durch k^2 und numerische Coefficienten, wenn wir die Werte für Θ_0, Θ_1, Θ_2 einsetzen in

$$\begin{aligned}
z_0 &= 0 \\
z_1 &= \sqrt{x_0} = \sqrt{\pm\sqrt{\Theta_0}+\sqrt{\Theta_1}+\sqrt{\Theta_2}} \\
z_2 &= -\sqrt{x_0} = -\sqrt{\pm\sqrt{\Theta_0}+\sqrt{\Theta_1}+\sqrt{\Theta_2}} \\
z_3 &= \sqrt{x_1} = \sqrt{\pm\sqrt{\Theta_0}-\sqrt{\Theta_1}-\sqrt{\Theta_2}} \\
z_4 &= -\sqrt{x_1} = -\sqrt{\pm\sqrt{\Theta_0}-\sqrt{\Theta_1}-\sqrt{\Theta_2}} \\
z_5 &= \sqrt{x_2} = \sqrt{\mp\sqrt{\Theta_0}+\sqrt{\Theta_1}-\sqrt{\Theta_2}} \\
z_6 &= -\sqrt{x_2} = -\sqrt{\mp\sqrt{\Theta_0}+\sqrt{\Theta_1}-\sqrt{\Theta_2}} \\
z_7 &= \sqrt{x_3} = \sqrt{\mp\sqrt{\Theta_0}-\sqrt{\Theta_1}+\sqrt{\Theta_2}} \\
z_8 &= -\sqrt{x_3} = -\sqrt{\mp\sqrt{\Theta_0}-\sqrt{\Theta_1}+\sqrt{\Theta_2}}
\end{aligned}$$

Wir haben somit eine neue Form für die Wurzelwerte der speciellen Dreiteilungsgleichung gefunden, die im Resultat jedoch vollständig übereinstimmen muss mit dem Resultat von (21). Um aber wirklich die Coordinatenwerte der Wendepunkte durch eindeutige, geschlossene Ausdrücke darzustellen, sind noch einige Voruntersuchungen auszuführen.

Die in obigen Ausdrücken vorkommenden Wurzeln müssen in Bezug auf ihre Eindeutigkeit untersucht werden. Ueber die in den Ausdrücken für Θ_0, Θ_1, Θ_2 vorkommende Wurzelgrösse

$$\sqrt[3]{R} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}\frac{k'^4}{k^2}}$$

lässt sich folgendes aussagen: $\sqrt[3]{R}$ ist eine eindeutige Function von

$$\omega = \frac{iK'}{K}.$$

Um dieses nachzuweisen, bedienen wir uns der von Hermite (a. a. O. pag. 3 und pag. 15) eingeführten Functionen

$$\varphi(\omega), \quad \psi(\omega), \quad \chi(\omega)$$

Die schon oben erwähnte Grösse $q = e^{i\pi\omega}$ setzend, bezeichnet er

$$\sqrt[4]{k} = \varphi(\omega); \qquad \sqrt[4]{k'} = \psi(\omega)$$

$$\varphi(\omega) \, . \, \psi(\omega) = \chi^3(\omega)$$

wo $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$, $\chi(\omega)$ in Bezug auf ω eindeutige Functionen sind. Schreiben wir nun den Ausdruck für $\sqrt[3]{R}$ in die Form

$$\sqrt[3]{R} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \frac{k'^3}{k} \sqrt{kk'}$$

so ergiebt sich

$$\sqrt[3]{R} = \frac{\psi^4(\omega)}{\varphi^4(\omega)} \chi^4(\omega)$$

und es ist somit der Nachweis obiger Behauptung geliefert.

Ferner haben wir in dem obigen System der Wurzelwerte das Vorzeichen von $\sqrt{\Theta_0}$ festzulegen. Zu diesem Zwecke bilden wir den absoluten Wert von $\sqrt{\Theta_1 \Theta_2}$, also

$$[\sqrt{\Theta_1 \Theta_2}] = \frac{1}{k^2} \sqrt{\left\{1 - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{R} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{R}\right\}\left\{1 - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{R} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{R}\right\}}$$

$$= \frac{1}{k^2}\sqrt{1 - \sqrt[3]{R} + \sqrt[3]{R^2}}$$

Nehmen wir an, und das ist keine beschränkende Annahme, dass nicht nur $[\sqrt{\Theta_1 \Theta_2}]$ sondern überhaupt $\sqrt{\Theta_1 \Theta_2}$ gleich dem Ausdruck rechter Hand sei, nehmen wir also $\sqrt{\Theta_1}$ und $\sqrt{\Theta_2}$ mit gleichem Zeichen, so müssen wir, da $\sqrt{\Theta_0 \Theta_1 \Theta_2}$, wie wir früher gesehen haben, negativ sein soll, in dem System der Wurzelwerte das untere Zeichen vor $\sqrt{\Theta_0}$ berücksichtigen. Aus den Ausdrücken für $\sqrt{\Theta_1}$, $\sqrt{\Theta_2}$, $\sqrt{\Theta_1 \Theta_2}$ folgt aber

$$(\sqrt{\Theta_1})^2 + (\sqrt{\Theta_2})^2 \pm 2\sqrt{\Theta_1 \Theta_2} = (\sqrt{\Theta_1} \pm \sqrt{\Theta_2})^2$$

$$= \frac{2}{k^2}\left\{(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{R}) \pm \sqrt{1 - \sqrt[3]{Q_1} + \sqrt[3]{R^2}}\right\}$$

Ziehen wir jetzt die Wurzel und berücksichtigen wir nur das positive Zeichen, da das andere nur eine Vertauschung der Wurzeln unter einander ergeben würde, so wird

$$\sqrt{\Theta_1} + \sqrt{\Theta_2} = \sqrt{\frac{2}{k^2}\left\{(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{R}) + \sqrt{1 - \sqrt[3]{R} + \sqrt[3]{R^2}}\right\}}$$

$$\sqrt{\Theta_1} - \sqrt{\Theta_2} = i\sqrt{\frac{2}{k^2}\left\{-(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{R}) + \sqrt{1 - \sqrt[3]{R} + \sqrt{R^2}}\right\}}$$

Die unter den Wurzelzeichen stehenden Grössen sind positiv, da

$$\sqrt{1 - \sqrt[3]{R} + \sqrt[3]{R^2}} = \sqrt{(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{R})^2 + \tfrac{3}{4}\sqrt[3]{R^2}} > 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{R}$$

ist. Ferner ist

$$\sqrt{\Theta_1}+\sqrt{\Theta_2} > \sqrt{\Theta_0}.$$

Denn soll das der Fall sein, so muss

$$\sqrt{\frac{2}{k^2}\left\{(1-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{R})+\sqrt{1-\sqrt[3]{R}+\sqrt[3]{R^2}}\right\}} > \sqrt{\frac{1}{k^2}(1+\sqrt[3]{R})}$$

oder

$$2-\sqrt[3]{R}+2\sqrt{1-\sqrt[3]{R}+\sqrt[3]{R^2}} > 1+\sqrt[3]{R}$$

doer

$$2\sqrt{1-\sqrt[3]{R}+\sqrt[3]{R^2}} > 2\sqrt[3]{R}-1$$

sein. Ist nun $2\sqrt[3]{R}-1 < 0$, so ist unsere obige Behauptung sicher erfüllt; ist $2\sqrt[3]{R}-1 > 0$, so können wir ohne Weiteres auf beiden Seiten ins Quadrat erheben und erhalten

$$4-4\sqrt[3]{R}+4\sqrt[3]{R^2} > 4\sqrt[3]{R^2}-4\sqrt[3]{R}+1,$$

eine Behauptung, welche tatsächlich erfüllt ist. Nehmen wir nun noch hinzu, dass vor $\sqrt{\Theta_0}$ das untere Zeichen zu nehmen ist, so wird

$$\begin{array}{llll} x_0 = -\sqrt{\Theta_0} & +\sqrt{\Theta_1} & +\sqrt{\Theta_2} & \text{reell und positiv} \\ x_1 = - & - & - & \text{reell und negativ} \\ x_2 = + & + & - & \text{complex imaginär} \\ x_3 = + & - & + & \text{complex imaginär} \end{array} \Bigg\} \text{ conjugirt imaginär}$$

Schreiben wir jetzt zur Abkürzung

$$P=\frac{1}{k}\sqrt{1+\sqrt[3]{R}} \qquad Q=\frac{1}{k}\sqrt{2\sqrt{1-\sqrt[3]{R}+\sqrt[3]{R^2}}+2(1-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{R})}$$

$$S=\frac{1}{k}\sqrt{2\sqrt{1-\sqrt[3]{R}+\sqrt[3]{R^2}}-2(1-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{R})}$$

so ergiebt sich

$$\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix} = \pm\sqrt{x_0} = \pm\sqrt{-P+Q} \quad \begin{matrix} \text{reell und positiv} \\ \text{reell und negativ} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} z_3 \\ z_4 \end{matrix} = \pm\sqrt{x_1} = \pm i\sqrt{P+Q} \quad \begin{matrix} \text{rein imaginär und positiv} \\ \text{rein imaginär und negativ} \end{matrix}$$

Ferner ist

$$\pm\sqrt{x_2} = \pm\sqrt{P+iS}.$$

Wir wollen die Grössen ξ und η so bestimmen, dass

$$\sqrt{P+iS} = \xi+i\eta$$

ist. Dann muss

$$P+iS=\xi^2-\eta^2+2i\xi\eta$$

also

$$P=\xi^2-\eta^2 \qquad S=2\xi\eta$$

sein. Nun ist S positiv, also müssen ξ und η gleiches Vorzeichen haben. Es ist

$$\begin{aligned} P^2+S^2 &= (\xi^2-\eta^2)^2+4\xi^2\eta^2 \\ &= (\xi^2+\eta^2)^2 \end{aligned}$$

und da $\xi^2+\eta^2$ die Summe zweier Quadrate ist,

$$\xi^2+\eta^2=+\sqrt{P^2+S^2}$$

Mit dieser Gleichung verbinden wir

$$\xi^2-\eta^2=P$$

und erhalten

$$\xi=\pm\sqrt{\frac{P}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{P^2+S^2}} \qquad \eta=\pm\sqrt{-\frac{P}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{P^2+S^2}}$$

wo entweder das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist. Die Ausdrücke unter den Wurzelzeichen sind positiv und daher ξ und η reell. Schreiben wir jetzt zur Abkürzung

$$\sqrt{P^2+S^2}=T$$

wo T den Wert

$$T=\frac{1}{k}\sqrt{2\sqrt{1-\sqrt[3]{R}+\sqrt[3]{R}}-(1-2\sqrt[3]{R})}$$

hat, so erhalten wir

$$\left.\begin{matrix} z_5 \\ z_6 \end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{x_2}=\pm\sqrt{\frac{P}{2}+\frac{T}{2}}\pm i\sqrt{-\frac{P}{2}+\frac{T}{2}}$$

Endlich ist

$$\left.\begin{matrix} z_7 \\ z_8 \end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{x_3}=\pm\sqrt{P-iS}$$

Da hier der imaginäre Teil unter dem Wurzelzeichen negativ ist, müssen ξ und η entgegengesetzes Zeichen haben. Es wird

$$\xi=\pm\sqrt{\frac{P}{2}+\frac{T}{2}} \qquad \eta=\mp\sqrt{-\frac{P}{2}+\frac{T}{2}}$$

In Folge dessen erhalten wir

$$\left.\begin{matrix} z_7 \\ z_8 \end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{x_3}=\pm\sqrt{\frac{P}{2}+\frac{T}{2}}\mp i\sqrt{-\frac{P}{2}+\frac{T}{2}}$$

§ 5.

Somit ist denn die specielle Dreiteilungsgleichung aufgelöst, Wurzeln derselben sind dargestellt durch geschlossene und in Bez auf ∞ eindeutige Ausdrücke von k^2. Das genügt aber noch nic vollständig für unser Problem, zur Bestimmung der Coordinaten d Wendepunkte. Wir wissen zwar von früher, dass die Werte z_0, z_2 ... z_8 gleich sein müssen den Werten von 0, $s\frac{4K}{3}$ ... $s\frac{-4K-4i}{3}$ aus (21), aber welche Werte der beiden Wertsysteme einander ent sprechen, wissen wir ohne Weiteres nicht. Um diese Frage zu ent scheiden, ist, wie schon am Schluss des § 3 erwähnt wurde, der § dieser Arbeit durchgeführt worden. Eine directe Ueberführung der beiden Wertsysteme auf einander schien mir sehr umständlich zu sein, auch auf Hindernisse zu stossen, ich habe es daher unternommen, durch Betrachtungen über die Realität und die Vorzeichen der in Frage kommenden Ausdrücke die einander zugehörigen Werte der beiden Systeme zu finden. Die Vergleichung von (19) mit den soeben entwickelten Ausdrücken für die z ergiebt unzweifelhaft folgende Relationen:

$$s(0) = z_0 = 0$$

$$\pm s\left(\frac{4K}{3}\right) = \pm A = \pm\sqrt{-P+Q}$$

$$\pm s\left(\frac{4iK'}{3}\right) = \mp iA_1 = \mp i\sqrt{P+Q} \tag{24}$$

$$\pm s\left(\frac{4K+4iK'}{3}\right) = \pm D \pm iE = \pm\sqrt{\frac{P}{2}+\frac{T}{2}} \pm i\sqrt{-\frac{P}{2}+\frac{T}{2}}$$

$$\pm s\left(\frac{4K-4iK'}{3}\right) = \pm D \mp iE = \pm\sqrt{\frac{P}{2}+\frac{T}{2}} \mp i\sqrt{-\frac{P}{2}+\frac{T}{2}}$$

wo zu den oberen und unteren Zeichen linker Hand auch die oberen und unteren Zeichen rechter Hand gehören. Es fehlen noch geschlossene Ausdrücke für die Werte der Producte cos am . ⅆam. Die Aufstellung dieser macht nunmehr keine Schwierigkeiten. Es ist

$$c\left(\frac{4K}{3}\right)\cdot\delta\left(\frac{4K}{3}\right) = \pm\sqrt{\left(1-s^2\left(\frac{4K}{3}\right)\right)\left(1-k^2s^2\left(\frac{4K}{3}\right)\right)}$$

Führen wir zur Abkürzung ein

$$U = 4+\sqrt{1+\sqrt[3]{R}}\cdot\frac{1+k^2}{k}+2\sqrt{1-\sqrt[3]{R}+\sqrt[3]{R^2}}$$

$$V = \left(\frac{1+k^2}{k} + 2\sqrt{1+\sqrt[3]{R}}\right)\sqrt{2-\sqrt[3]{R}+2\sqrt{1-\sqrt[3]{R}+\sqrt[3]{R^2}}}$$

und berücksichtigen wir zur Bestimmung des Vorzeichens den Wert aus (19), so erhalten wir

$$c\left(\frac{4K}{3}\right) . \delta\left(\frac{4K}{3}\right) = -\sqrt{U-V}$$

und analog (24)

$$c\left(\frac{4iK'}{3}\right) . \delta\left(\frac{4iK'}{3}\right) = +\sqrt{U+V}$$

Endlich setzen wir noch zur Abkürzung

$$U_1 = 4 - \frac{1+k^2}{k}\sqrt{1+\sqrt[3]{R}} - 2\sqrt{1-\sqrt[3]{R}+\sqrt[3]{R^2}}$$

$$V_1 = \left(\frac{1+k^2}{k} - 2\sqrt{1+\sqrt[3]{R}}\right)\sqrt{2\sqrt{1-\sqrt[3]{R}+\sqrt[3]{R^2}}-2(1-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{R})}$$

und erhalten durch Betrachtungen, welche den soeben vorgenommenen ganz analog sind,

$$c\left(\frac{4K+4iK'}{3}\right)\ \delta\left(\frac{4K+4iK'}{3}\right) = \pm\sqrt{U_1 - iV_1}$$

$$c\left(\frac{4K-4iK'}{3}\right)\ \delta\left(\frac{4K-4iK'}{3}\right) = \pm\sqrt{U_1 + iV_1}$$

Wollen wir das Reelle und Imaginäre trennen, so haben wir darauf Rücksicht zu nehmen, ob

$$\frac{1+k^2}{k} - 2\sqrt{1+\sqrt[3]{R}} \gtrless 0$$

oder

$$\tfrac{1}{4}\left(\frac{1+k^2}{k}\right)^2 - 1 \gtrless \sqrt[3]{R}$$

oder

$$R^2 \gtrless 1$$

ist. Es ergiebt sich dann

$$c\left(\frac{4K+4iK'}{3}\right)\ \delta\left(\frac{4K+4iK'}{3}\right)$$

$$= \mp\sqrt{\frac{U_1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{U_1^2+V_1^2}} + i\sqrt{-\frac{U_1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{U_1^2+V_1^2}}$$

(24)

$$c\left(\frac{4K-4iK'}{3}\right)\ \delta\left(\frac{4K-4iK'}{3}\right)$$

$$= \mp\sqrt{\frac{U_1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{U_1^2+V_1^2}} - i\sqrt{-\frac{U_1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{U_1^2+V_1^2}}$$

wo das obere Zeichen für $R > 1$, das untere Zeichen für $R < 1$ zu nehmen ist. Der Grund hiefür ist im Folgenden enthalten: Wir sahen früher, dass $\mp F$ zu nehmen war, je nachdem $k^2A^2A_1^2 \lessgtr 1$ war. Wir können jetzt leicht nachweisen, dass diese Bedingung dasselbe bedeutet wie die soeben aufgestellte $R^2 \gtrless 1$ oder $R \gtrless 1$, da, wie wir schon gesehen haben, R immer positiv ist. Es ist nämlich

$$A^2 = -P+Q$$

$$A_1^2 = +P+Q$$

also

$$A^2A_1^2 = -P^2+Q^2$$

$$k^2A^2A_1^2 = -1-\sqrt[3]{R}+2-\sqrt[3]{R}+2\sqrt{1-\sqrt[3]{R}+\sqrt[3]{R^2}}$$

Die Bedingung $k^2A^2A_1^2 \lessgtr 1$ ist also gleich der Bedingung

$$\sqrt{1-\sqrt[3]{R}+\sqrt[3]{R^2}} \lessgtr \sqrt[3]{R}$$

$$1 \lessgtr \sqrt[3]{R}, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Somit sind wir denn am Ziele. Es sind sämmtliche zur Bestimmung der Coordinatenwerte der Wendepunkte unserer zweiteiligen Curve dritter Ordnung notwendigen Grössen in Bezug auf ω eindeutig dargestellt durch geschlossene Ausdrücke des Doppelverhältnisses k^2, das eine reelle Grösse ist. Es wäre nichts weiter zu tun, als die soeben gewonnenen Werte (24) für $s(\omega)$ und $c(\omega).\delta(\omega)$ einzusetzen in das System (18), was hier füglich unterbleiben darf.

Wir haben jetzt zwei Formelsysteme gewonnen, welche es gestatten, die Coordinaten der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung für einen bestimmten Wert von k^2 zu berechnen. Das System (19), welches uns vermöge der vollständigen Bestimmtheit seiner Vorzeichen bisher hauptsächlich zur eindeutigen Bestimmung der Wurzeln der speciellen Dreiteilungsgleichung diente, wurde schon damals auch im Hinblick darauf abgeleitet, dass es zu einer etwaigen Berechnung der Coordinatenwerte später verwandt werden sollte. Rechnungen, welche für einige Werte vor k^2 nach beiden Formelsystemen (19) und (24) durchgeführt wurden, zeigten, natürlich in den Grenzen der angestrebten Genauigkeit, übereinstimmende Resultate. Dieselben veranlassten mich aber auch zur Ueberlegung, nach welchem der beiden Formelsysteme man wol am bequemsten rechnen würde, falls die Grösse der Arbeit nach der Anzahl der aufzuschlagenden Lo-

garithmen beurteilt wird. Da die Wahl hauptsächlich von dem Grade der erstrebten Genauigkeit, ferner aber auch von den vorhandenen Hilfsmitteln abhängig ist, wird es natürlich schwer eine allgemeine Regel zu geben. Im Falle man nur die erste Potenz von q, also sehr kleine Werte von k^2 zu berücksichtigen hat, wird man, wie die Schemata für beide Formelsysteme leicht ausweisen, immer am schnellsten mit den unendlichen Productformeln rechnen. Im Falle man aber höhere Potenzen von q zu berücksichtigen hat, wird es immer, wenn es auf eine mehrstellige Genauigkeit ankommt, vorteilhaft sein, mit den geschlossenen Ausdrücken zu rechnen. Ebenso ist es klar, dass man sich, wenn man Interesse hat, auch die Coordinaten der imaginären Wendepunkte zu berechnen, immer der geschlossenen Formeln bedienen wird, da die Benutzung der anderen fast die doppelte Arbeit macht. Bei einem etwaigen Entwurf von Tafeln dürfte die Rechnung nach beiden Systemen die sicherste Controlle bieten.

Zum Schlusse sei mir noch eine Bemerkung über ein allgemeineres Problem, als das behandelte, gestattet. In der von uns zu Grunde gelegten Normalform (14) ist ein Wendepunkt als bekannt vorausgesetzt. Stellen wir uns dasselbe Problem, nur unter der Voraussetzung, dass nicht ein Wendepunkt, sondern irgend ein beliebiger Punkt der Curve dritter Ordnung gegeben ist, so führt die Behandlung des Problemes der Bestimmung der Coordinatenwerte der Wendepunkte auf die allgemeine Dreiteilungsgleichung (7), wie Clebsch (Crelle, Bd. 63) nachgewiesen hat. Diese allgemeine Dreiteilungsgleichung wäre dann zu lösen, wenn man geschlossene Ausdrücke für die Coordinatenwerte der Wendepunkte erhalten will. Die Möglichkeit der Auflösbarkeit dieser Gleichung auf algebraischem Wege hat Abel nachgewiesen. An mehreren Stellen seiner Werke hat Abel auch eine Methode angegeben, die Ausdrücke für die Wurzeln mit Hilfe der Adjunction der Wurzeln der speciellen Dreiteilungsgleichung zu ermitteln. Die directe Verfolgung dieses Weges führte aber, wie schon aus der Gestalt der Wurzeln der speciellen Dreiteilungsgleichung zu erwarten stand, sehr bald auf Ausdrücke, die ihrer Ausdehnung und Complicirtheit wegen eine Fortsetzung der Rechnung aussichtslos erscheinen liessen.

Königsberg im Februar 1883.

II.

Bestimmung der Osculationskreise der Kegelschnitte mit Hülfe von Eigenschaften der Sehnen, welche ein Kegelschnitt mit seinen Osculationskreisen gemein hat.

Von

Herrn **Josef Zimmermann** in Berlin.

(Hierzu Fig. 1 bis 4.)

Die Bestimmung dieser Kreise für jede Curve geschieht wohl am besten mit Hülfe einer Formel der Differentialrechnung.

Darf aber diese nicht vorausgesetzt werden, kann ein wenn auch im Allgemeinen umständlicheres Verfahren, wie es in G. Salmon, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, für letztere durchgeführt ist, auch für Curven höherer Ordnung angewendet werden.

Ohne Voraussetzung der Differentialrechnung und für die Kegelschnitte gelangt man auch im Nachfolgenden zu diesen Kreisen, und zunächst zu einer leichten Construction dieser.

Ist man beim Unterricht in der analytischen Geometrie der Ebene bis zu dem Satze über die Eigenschaften der Sehnen, welche ein Kegelschnitt mit einem beliebigen Kreis gemein hat, gelangt, so dürfte dann das Nachfolgende unter Ia. geeignet folgen und sich wegen seiner Einfachheit als eine erste Vorführung dieser Kreise empfehlen.

Ia.

Es sei gegeben ein Punkt x_1, y_1 eines Centralkegelschnitts von den Axen $2a$ und $2b$ und sonst seien keine anderen Punkte

des Kegelschnitts gegeben; dann gelangt man zum Osculationskreise durch folgende Sätze:

1) Die Sehne, welche ein Osculationskreis in einem Punkte eines Kegelschnitts mit diesem gemein hat, und die Tangente in dem betreffenden Punkte bilden mit der x-Axe ein Dreieck, so dass die Winkel an der Grundlinie einander gleich sind.

Beweis. Dieser gründet sich auf den Satz Joachimsthal, Analytische Geometrie der Ebene, §. 85:

Schneidet ein Kreis einen Kegelschnitt, und bildet eine von zwei einander gegenüberliegenden Sehnen mit der x-Axe den Winkel $+\alpha$, so bildet die andere mit derselben den Winkel $-\alpha$. (Fig. 1.)

Daraus folgert man weiter:

Diese Eigenschaft bleibt bestehen, wenn zwei Punkte zusammenfallen, wie in Fig. 1. beim Kreise M_1, und weiter noch wenn drei Punkte zusammenfallen wie bei M_2; es sind dann $-\alpha$ und $+\alpha$ die Nebenwinkel zu den Winkeln an der Grundlinie des betreffenden Dreiecks, und letztere darum einander gleich.

2) Die Sehne, welche ein Osculationskreis mit einem Kegelschnitt in einem Punkte x_1, y_1 gemein hat, wird halbirt durch den Durchmesser, welcher durch den Punkt x_1, $-y_1$ hindurchgeht.

Dieser Satz ist, soviel ich weiss, noch nicht angegeben, und liefert für alle drei Kegelschnitte in sehr einfacher Weise die Mitte der Sehne.

Beweis. Der Durchmesser, welcher in den Figuren 2. und 3. die Sehne halbirt, ist derjenige, welcher der Richtung der gemeinschaftlichen Sehne conjugirt ist.

Es sei der Winkel der Tangente mit der x-Axe τ, der Winkel der Sehne mit derselben μ; dann ist $\mu = 180 - \tau$ und $\operatorname{tg}\mu = -\operatorname{tg}\tau$.

Sind die Abschnitte der Tangenten auf den Axen y_0 und x_0, so ist für die angenommenen Punkte (Fig. 2. und 3.)

$$\operatorname{tg}\tau = -\frac{y_0}{x_0}$$

Die Gleichung der Tangente der Ellipse bzhw. Hyperbel ist

$$\frac{x}{\frac{a^2}{x_1}} + \frac{y}{\pm\frac{b^2}{y_1}} = 1$$

in welcher die Nenner die Abschnitte a[illegible]llen.

Es folgt nun:

$$\operatorname{tg}\tau = -\frac{y_0}{x_0} = -\frac{\pm\frac{b^2}{y_1}}{\frac{a^2}{x_1}} = \mp\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

$$\operatorname{tg}\mu = -\operatorname{tg}\tau = \pm\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

Ist ψ der Winkel, welcher der Richtung μ conjugirt ist, so ist bekanntlich

$$\operatorname{tg}\psi . \operatorname{tg}\mu = \mp\frac{b^2}{a^2}$$

und mit Rücksicht auf den Wert für $\operatorname{tg}\mu$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\mp\frac{b^2}{a^2}}{\pm\frac{b^2x_1}{a^2y_1}} = -\frac{y_1}{x_1}$$

was zu beweisen war.

Die Construction stellt sich demnach wie folgt:

4) Man construire zu dem Punkte x_1, y_1 die Tangente (vergl. Fig. 2. und 3.), darauf die Normale.

Die an den Figuren 2. 3. und 4. durchgeführten Tangentenconstructionen ruhen auf folgenden bekannten Eigenschaften, die hier noch kurz angedeutet werden sollen.

Die Tangente in einem Punkte x_1, y_1 der Ellipse schneidet die x-Axe in demselben Punkte, in welchem die Tangente des Constructionsradius zum Punkte x_1, y_1 die x-Axe schneidet; das Stück der Tangente der Hyperbel, was zwischen den Asymptoten liegt, wird durch den Berührungspunkt halbirt; die Entfernung des Schnittpunktes der Tangente der Parabel mit der x-Axe vom Scheitelpunkte ist gleich der Abscisse des Berührungspunktes.

Man mache nun (Fig. 2. und 3.) $DB = BC$ und ziehe AD (Satz 1); ferner verlängere man AB über B hinaus bis A_1, so dass $A_1B = AB$ und verbinde A_1 mit C: dann schneidet A_1O die AD in einem Punkte M (Mitte der Sehne, Satz), und die dann in M auf AM errichtete Normale schneidet die Normale des Kegelschnittes in einem Punkte R, welcher der Mittelpunkt des Osculationskreises ist.

Da die Parabel als Ellipse angesehen werden kann, deren Mittelpunkt im Unendlichen liegt, so gilt dieselbe Construction. (Der

Durchmesser durch den Punkt A_1 ist die Parallele zur Axe der Parabel.)

4$_*$) Für bequemere Construction der Sehne zur Ellipse, in der Nähe der Scheitelpunkte der kleinen Axe bemerkt man, dass die gemeinschaftliche Sehne und die Tangente auch mit der y-Axe ein Dreieck bildet, so dass die Winkel an der Grundlinie (hier y-Axe) einander gleich sind; denn diese Winkel ergänzen denselben Winkel μ (vergl. Figur) zu einem Rechten.

Für die Scheitelpunkte fällt auch der andere Endpunkt der Sehne in diese hinein; also hat der Krümmungsradius in den Scheitelpunkten mit dem Kegelschnitte vier Punkte gemein.

Man kann besonders für die Ellipse elegante Constructionen für den andern Endpunkt der Sehne und darum für ihre Mitte finden (vergl. Anmerk. 2. zu Art. II.); allein diese und andere sind wieder für die beiden andern Kegelschnitte nicht anwendbar; für diese beiden andern bedarf es wieder anderer Constructionen, während die im Vorhergehenden gefundene Construction für alle drei Kegelschnitte dieselbe ist.

Bemerkung. Aus der Formel

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{y_1}{x_1}$$

folgt auch noch allgemeiner:

5) Legt man durch einen Punkt x_1, y_1 beliebige Kegelschnitte hindurch, die im Anfangspunkt ihren Mittelpunkt haben, und deren Axen in der x- bzhw. y-Axe liegen, so werden die gemeinschaftlichen Sehnen zu dem Punkte x_1, y_1 alle halbirt durch einen und denselben Durchmesser, welcher durch den Punkt x_1, $-y_1$ hindurchgeht.

Ib.

Der Vollständigkeit wegen sollen noch die Werte für die Radien dieser Kreise hergeleitet werden. (Vergl. Fig. 2. und 3.)

Es ist $AR = \varrho$ der Osculationsradius,

$AM = r_0$ die halbe Sehne,

λ der Winkel, den die Sehne mit der Normale in dem angenommenen Punkte bildet.

Dann kommt:

$$r_0 = \varrho \cos\lambda$$

oder

6) $$\varrho = \frac{r_0}{\cos\lambda}$$

Bestimmung von r_0.

Die Gleichungen der gemeinschaftlichen Sehne für beide Kegelschnitte sind:

$$x = x_1 + r\cos\mu$$
$$y = y_1 + r\sin\mu$$

Die Gleichung der Geraden, welche diese Sehne halbirt, ist

$$\frac{y}{x} = -\frac{y_1}{x_1}$$

Bildet man aus den ersten beiden Gleichungen $\frac{y}{x}$ und setzt den Wert dafür in die zweite Gleichung ein, so kommt für die halbe Sehne

$$r_0 = \frac{-2y_1x_1}{x_1\sin\mu + y_1\cos\mu}$$

Für den angenommenen Punkt ist, wie Figur zeigt, bei der Ellipse $\sin\mu$ und $\cos\mu$ positiv, bei der Hyperbel ist $\sin\mu$ positiv und $\cos\mu$ negativ.

Allgemein ist abgesehen vom Zeichen

$$\sin\mu = \frac{\operatorname{tg}\mu}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\mu}}$$

$$\cos\mu = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\mu}}$$

Setzt man darin die für $\operatorname{tg}\mu$ gefundenen Werte ein, so kommt mit Rücksicht auf die oben gefundenen Vorzeichen von $\sin\mu$ und $\cos\mu$ und wenn man noch zur Abkürzung

$$\frac{\sqrt{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}}{a^2} = N$$

setzt:

$$\sin\mu = \frac{b^2x_1}{a^2N}$$

$$\cos\mu = \pm\frac{y_1}{N}$$

Werden diese Werte in den Ausdruck für r_0 eingesetzt, so kommt, da $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$,

$$r_0 = -\frac{2y_1x_1N}{b^2} \tag{7}$$

Es ist leicht zu beweisen, dass N die Länge der Normale darstellt.

Bestimmung von $\cos\lambda$.

1) Für die Ellipse.

Der Winkel, den die Normale mit der x-Axe bildet, ist gleich

$$R - \mu = \lambda + \mu$$

Daraus folgt:

$$\lambda = R - 2\mu$$
$$\cos\lambda = \sin 2\mu = 2\sin\mu\cos\mu$$

2) Für die Hyperbel.

Der Winkel, den die Normale mit der x-Axe bildet, ist gleich

$$R + \tau = R + 2R - \mu = 3R - \mu$$

Daraus folgt:

$$\lambda = 3R - \mu$$
$$\cos\lambda = -\sin 2\mu = -2\sin\mu\cos\mu$$

Also gilt für beide:

8) $$\cos\lambda = \pm\, 2\sin\mu\cos\mu$$

oder mit Rücksicht auf die Werte von $\sin\mu$ und $\cos\mu$

$$= \pm\,\frac{2x_1y_1b^2}{N^2a^2}$$

Setzt man die gefundenen Werte für r_0 und $\cos\lambda$ in 6) ein, so kommt abgesehen vom Zeichen

9) $$\varrho = \frac{a^2N^3}{b^4}$$

Fig. 4. Ausdruck für den Krümmungsradius der Parabel.

$$x = x_1 + r\cos\mu$$
$$y = y_1 + r\sin\mu$$

seien die Gleichungen der gemeinschaftlichen Sehne.

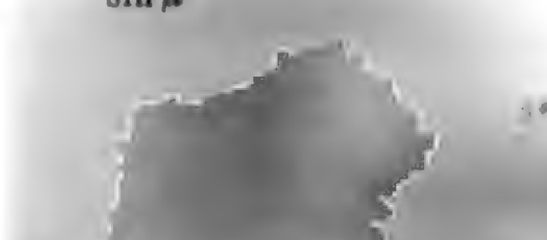
Die Gleichung der Geraden, welche diese Sehne halbirt, ist

$$y = -y_1$$

Setzt man den Wert für y aus der dritten Gleichung in die zweite ein, so kommt:

$$r = -\frac{2y_1}{\sin\mu}$$

Es ist



$$\operatorname{tg}\mu = -\operatorname{tg}\tau = -\frac{y_1}{2x_1} = -\frac{p}{y_1}$$

weil $x_1 = \frac{y_1^2}{2p}$.

$$\sin\mu = \frac{p}{y_1}\,\frac{y_1}{\sqrt{p^2+y_1^2}} = \frac{p}{N}$$

$$\cos\mu = -\frac{y_1}{N}$$

Also ist, wenn $\sin\mu$ eingesetzt wird,

10) $$r_0 = -\frac{2y_1N}{p}$$

Der Winkel, den die Normale mit der x-Axe bildet, ist

$$= \tau + R = 2R - \mu + R = 3R - \mu$$
$$\mu = \lambda + 3R - \mu$$

also

$$\lambda = 2\mu + 3R$$

11) $$\cos\lambda = \sin 2\mu = 2\sin\mu \,.\, \cos\mu$$
$$= -\frac{2py_1}{N^2}$$

wenn für $\sin\mu$ und $\cos\mu$ die vorhin gefundenen Werte eingesetzt werden.

Endlich kommt:

12) $$\varrho = \frac{r_0}{\cos\lambda} = \frac{N^3}{p^2}$$

abgesehen vom Zeichen.

Für den Centralkegelschnitt fand sich

$$\varrho = \frac{a^2N^3}{b^4}$$

wo N für $\frac{\sqrt{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}}{a^2}$ gesetzt war.

Für die Scheitelpunkte a, 0 und 0, b wird

$$N = \frac{b^2}{a} \quad \text{und} \quad N = b$$

welche Werte in den Ausdruck für ϱ eingesetzt geben

13) $$\varrho = \frac{b^2}{a} \quad \text{und}$$

14) $$\varrho = \frac{a^2}{b}$$

Die beste Construction dieser Ausdrücke ist in diesem Falle bekanntlich die folgende:

15) Man ziehe durch die Punkte 0, b und a, 0 Parallelen zur x- bzhw. y-Axe und fälle vom Durchschnittspunkte dieser Parallelen eine Normale auf die Verbindungslinie der Punkte 0, b und a, 0; die Schnittpunkte dieser Normale mit den Axen sind dann die Mittelpunkte der Oscu'ationskreise der betreffenden Punkte.

Für die Parabel kam

$$N = \sqrt{p^2 + y_1^2}$$

Für den Scheitelpunkt ist $y_1 = 0$ und darum $N = p$. Es kommt nun, wenn dieser Wert von N in den Ausdruck für ϱ eingesetzt wird:

$$\varrho = p.$$



III.

Ort der Mittelpunkte der Sehnen, welche ein Kegelschnitt mit seinen Osculationskreisen gemein hat.

Von

Josef Zimmermann.

---

§. 1. Gestalt und Construction der Curven.

(Hierzu Fig. 5. u. 6.)

Für Ellipse und Hyperbel sind die Gleichungen der gemeinsamen Sehne ist:

$$x = x_1 + r \cos\mu$$

$$y = y_1 + r \sin\mu$$

wo

$$\sin\mu = \frac{b^2 x_1}{a^2 N}, \quad \cos\mu = \pm \frac{y_1}{N}$$

ist. Für

$$r = r_0 = -\frac{2x_1 y_1 N}{b^2} \quad \text{(Vgl. Art. II.)}$$

kommt:

$$x = x_1 \left[1 \mp \frac{2{y_1}^2}{b^2}\right]$$

$$y = y_1 \left[1 - \frac{2{x_1}^2}{a^2}\right];$$

und weil

$$\mp \frac{{y_1}^2}{b^2} = -\left[1 - \frac{{x_1}^2}{a^2}\right],$$

so kommt

$$17)\qquad \begin{aligned} x &= \quad x_1\left[\frac{2x_1^2}{a^2}-1\right] \\ y &= -\,y_1\left[\frac{2x_1^2}{a^2}-1\right] \end{aligned}$$

welche Gleichungen den Ort der Mittelpunkte der Sehnen zur Ellipse beziehungsweise Hyperbel darstellen, zwei Curven, welche in §. 4. bzhw. mit C_1 und C_2 bezeichnet sind.

Bildet man aus diesen Gleichungen $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{b}$ und dann die Summe und Differenz der Quadrate dieser Glieder, so kommt mit Rücksicht darauf, dass $\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ ist:

$$\alpha)\quad \frac{x_2}{a_2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{2x_1^2}{a^2} - 1\right)^2.$$

Aus der ersten der Gleichungen 17) folgt

$$\beta)\quad \left(\frac{2x_1^2}{a^2} - 1\right)^2 = \frac{x^2}{x_1^2};$$

aus α) und β) folgt:

$$\gamma)\quad \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{x_1^2}.$$

Aus γ) ergiebt sich nach Reduction

$$\delta)\quad \frac{2x_1^2}{a^2} - 1 = \frac{\frac{x^2}{a^2} \mp \frac{y^2}{b^2}}{\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2}}$$

welcher Wert in α) eingesetzt giebt:

$$18)\qquad \left(\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2}\right)^3 = \left(\frac{x^2}{a^2} \mp \frac{y^2}{b^2}\right)^2$$

und in Polarcoordinaten

$$19)\qquad \varrho = \frac{\frac{\cos^2\alpha}{a^2} \mp \frac{\sin^2\alpha}{b^2}}{\left(\sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{a^2} \pm \frac{\sin^2\alpha}{b^2}}\right)^3}$$

Man findet den Lauf der Curven, wenn man in 19) $\alpha = 0$, $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, $\frac{\pi}{2}$ u. s. f. einsetzt. Die Curve zur Ellipse hat die Gestalt einer vierblättrigen länglichen Rosette. Sie geht Vgl. Fig. 5. in der Rich-

tung der Pfeile von M nach E, J, E, R, E, A, E, M und es ist E ein vierfacher Punkt der Curve; die Asymptoten der Hyperbel zu denselben Axen sind die Tangenten des Punktes E.

Die Curve zur Hyperbel besteht aus zwei gabelförmigen Zweigen welche die entsprechenden Hyperbelzweige in ihren Scheitelpunkten berühren und innerhalb derselben und symmetrisch zur Axe der x liegen; die Asymptoten der Hyperbel sind die Asymptoten der Curve. Vgl. Fig. 5.

20) Die Construction der beiden Curven geschieht wie folgt:

Um zu einem gegebenen Polarwinkel α den zugehörigen Radius zu finden, merke man sich den Punkt, in welchem ein mit dem Radius zusammenfallender Strahl die Ellipse bzhw. Hyperbel schneidet; dann construire man zu diesem Punkt den symmetrisch dazu liegenden Punkt in Bezug auf die Axe der x; die gemeinschaftliche Sehne zu letzterem Punkt schneidet den Strahl im gesuchten Punkte (Satz 2. Art. II. I a.).

§. 2. Beziehungen zwischen beiden Curven.

21) Construirt man wie in Figur 5. zu denselben Axen eine Ellipse und Hyperbel, und nennt r_1 und r_2 die Radien zu dem Winkel α, der Ellipse und Hyperbel, ferner ϱ_1 und ϱ_2 die entsprechenden Radien der zugehörigen Curven, so ist:

$$\text{a)} \qquad \varrho_1 = \frac{r_1^3}{r_2^2}$$

$$\text{b)} \qquad \varrho_2 = \frac{r_2^3}{r_1^2}$$

$$\text{c)} \qquad \varrho_1 \varrho_2 = r_1 r_2$$

Der Beweis folgt gleich, wenn man in 19)

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2} = \frac{1}{r_1^2}$$

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2} = \frac{1}{r_2^2}$$

setzt. Diese Formeln geben Gelegenheit zu einer neuen Construction der Curven.

22) Man beschreibe über r_2 einen Halbkreis und trage darin vom Anfangspunkte aus eine Sehne gleich r_1 ein. Dann fälle man

vom Endpunkte des Ursprünglichen r_1 ein Lot auf diese Sehne, und vom Fusspunkte aus ein Lot wieder zurück auf das ursprüngliche r_2; dieser zuletzt erhaltene Fusspunkt ist dann der Endpunkt von ϱ_1.

Man errichte ferner im Endpunkte von r_2 ein Lot bis zum Durchschnitt mit der Verlängerung der obigen Sehne und in dem Schnittpunkte auf dieser Sehne wieder ein Lot bis zum Durchschnitt mit der Verlängerung des ursprünglich gegebenen r_2; dieser zuletzt erhaltene Punkt ist dann der Endpunkt von ϱ_2.

Beweis. Da $r_1 < r_2$, so ist $\frac{r_1}{r_2}$ der Cosinus eines gewissen Winkels ω und die Formeln a) und b) werden

$$\varrho_1 = r_1 \cos^2\omega$$

$$\varrho_2 = \frac{r_2}{\cos^2\omega}$$

Der Winkel ω ist oben construirt, und folgt das Weitere bald aus der Construction.

§. 3. Maximal- und Minimalpunkte, Inflexionspunkte.

Es ist

$$x = \varrho \cos\alpha, \quad y = \varrho \sin\alpha$$

und

$$\varrho = \frac{\left(\frac{1}{a^2} \mp \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{b^2}\right)\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}{\left(\sqrt{\frac{1}{a^2} \pm \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{b^2}}\right)^3} \tag{23}$$

wenn man 19) umformt. Also ist

$$x = \frac{\frac{1}{a^2} \mp \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{b^2}}{\left(\sqrt{\frac{1}{a^2} \pm \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{b^2}}\right)^3}$$

$$y = \frac{\frac{1}{a^2} \mp \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{b^2}}{\left(\sqrt{\frac{1}{a^2} \pm \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{b^2}}\right)^3} \operatorname{tg}\alpha$$

$$\frac{dy}{dx} = \mp \frac{b^2}{a^2 \operatorname{tg}\alpha} \cdot \frac{\frac{b^2}{a^2} \mp 5\operatorname{tg}^2\alpha}{5\frac{b^2}{a^2} \mp \operatorname{tg}^2\alpha}$$



Die Endpunkte der Radien zu den Winkeln, für welche $\frac{dy}{dx} = 0$ wird, sind Maximal- und Minimalpunkte in Bezug auf die Axe der x; die Endpunkte der Radien zu den Winkeln, für welche der Ausdruck ∞ wird, sind Maximal- und Minimalpunkte in Bezug auf die Axe der y. — Für das obere Zeichen wird der Ausdruck 0, wenn

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\pm\sqrt{5}}\,\frac{b}{a}\right), \qquad \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{3\pi}{2}$$

und ∞, wenn

$$\alpha = \qquad 0, \qquad \operatorname{arc\,tg}\left(\pm\sqrt{5}\,\frac{b}{a}\right), \qquad \pi$$

ist. Dem ersten Wert der oberen und dem zweiten Wert der unteren Reihe entsprechen je vier Radien, also hat man in Bezug auf jede Axe 6 Minimal- und Maximalpunkte. Da je zwei Radien in einem Durchmesser zusammenfallen, so hat man in Bezug auf die x-Axe drei Durchmesser der Curven, deren jeder in seinem Endpunkt einen Maximal- und einen Minimalpunkt hat; dasselbe gilt für die Axe der y. Weil die Hauptaxen conjugirte Durchmesser sind, und weil $\left(\frac{1}{+\sqrt{5}}\,\frac{b}{a}\right)\left(-\sqrt{5}\,\frac{b}{a}\right)$ und $\left(\frac{1}{-\sqrt{5}}\,\frac{b}{a}\right)\left(+\sqrt{5}\,\frac{b}{a}\right)$ geben $-\frac{b^2}{a^2}$, welches bekanntlich die Bedingung für conjugirte Durchmesser ist, so kommt:

24) Die Richtungen der drei Durchmesser, deren 6 Endpunkte die Maximal- und Minimalpunkte der Curve in Bezug auf die x-Axe sind, sind bzhw. conjugirt den Richtungen der drei Durchmesser, deren 6 Endpunkte die Maximal- und Minimalpunkte der Curve in Bezug auf die y-Axe sind. — Für die Curve die zur Hyperbel gehört, erhält man noch zwei Punkte, einen Maximal- und einen Minimalpunkt in Bezug auf die Axe der y, $\alpha = 0$, π. Die Construction dieser Punkte geschieht nach 20) oder 22) unter Beachtung von 24), die Berechnung mit Hülfe von 23). (Vgl. Figur 5).

Es ist

$$25) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \mp \frac{\frac{b^2}{a^2}\left(\sqrt{\frac{1}{a^2} \pm \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{b^2}}\right)^5 \left[22\,\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{a^2} \pm 5\left[\frac{b^2}{a^4} + \frac{\operatorname{tg}^4\alpha}{b^2}\right]\right]}{\left(\frac{5}{a^2} \mp \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{b^2}\right)^3 \operatorname{tg}^3\alpha}$$

Für das obere Zeichen kann der Ausdruck nicht 0 werden, also hat die Curve, die der Ellipse entspricht, keine Inflexionspunkte; für das untere Zeichen wird durch das 0 setzen des ersten Factors im

Zähler $\operatorname{tg}\alpha = +\frac{b}{a}$, wozu die unendlich fernen Punkte der Curven gehören, welche keine eigentlichen Inflexionspunkte sein können; setzt man den zweiten Factor gleich 0, so kommt

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{b}{a}\sqrt{\frac{11}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{11}{5}\right)^2 - 1}}$$

Das obere Zeichen unter der Wurzel ist nicht brauchbar, weil der absolute Wert von $\operatorname{tg}\alpha$ nicht grösser als $\frac{b}{a}$ werden kann. Man erhält nach Ausrechnung der Wurzel

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\, 0{,}490\,306\,\frac{b}{a}.$$

Sind α_1 und α_2 die Winkel, deren Tangenten $+$ bzhw. $-0{,}49\ldots\frac{b}{a}$, so sind auch $\alpha_1 + 2R$ und $\alpha_2 + 2R$ Winkel, deren Tangenten ebenfalls $+$ bzhw. $-0{,}49\ldots\frac{b}{a}$ sind; diesen vier Werten entsprechen vier Punkte, welche Inflexionspunkte sind, wenn $\frac{d^3y}{dx^3}$ für diese Winkelwerte nicht gleich 0 ist.

Die manchmal umständliche Bildung der dritten Ableitung kann hier umgangen werden durch Folgendes:

Wenn innerhalb eines Intervalles von $x = p$ bis $x = q$ nur e i n Punkt liegt, für welchen $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, so ist dieser Punkt ein Inflexionspunkt, wenn für zwei zu beiden Seiten dieses Punktes innerhalb des Bogenintervalles liegenden Punkten $\frac{d^2y}{dx^2}$ verschiedene Vorzeichen hat; denn dann teilt der zu untersuchende Punkt das Bogenintervall in einen convexen und einen concaven Bogen in Bezug auf eine Axe. Es giebt nun innerhalb des Teiles unserer Curve, welcher etwa rechts von der y-Axe liegt und zwischen der $+x$-Axe und der oberen Asymptote enthalten ist, nur einen Punkt, für welchen $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ist. Es ändert wie man leicht sieht $\frac{d^2y}{dx^2}$ nur dann das Zeichen, wenn der zweite Factor im Zähler sein Zeichen ändert. Zwei Punkte zu beiden Seiten des betreffenden Punktes sind etwa diese, welche den Winkeln $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{3a}$ und $\operatorname{arctg}\frac{b}{2a}$ entsprechen. Für den ersten

Wert wird der zweite Factor kleiner als 0, für den zweiten grösser als 0; die Curve ist darum von $\alpha = 0$ bis $\operatorname{arc\,tg} 0{,}490 \ldots \frac{b}{a}$ convex und vom letzten Wert an bis $\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}$ concav in Bezug auf die Axe der y. Die übrigen der Punkte sind darum, wie man leicht sieht, auch Inflexionspunkte.

26) Die Curve, die zur Hyperbel gehört, hat für

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \pm 0{,}490\,306 \frac{b}{a}$$

(im ganzen 4) Inflexionspunkte.

Construction oder Rechnung nach 20) 22) bzhw. 23).

d) Radien der Osculationskreise.

Setzt man in

$$R = \frac{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right)^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$$

die früher für $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ gefundenen Werte ein, so kommt:

$$27) \qquad R = \frac{\sqrt{a^4 \operatorname{tg}^2\alpha \left[\frac{5}{a^2} \mp \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{b^2}\right]^2 + b^4 \left[\frac{1}{a^2} \mp \frac{5}{b^2} \operatorname{tg}^2\alpha\right]^2}}{a^4 b^2 \left[\sqrt{\frac{1}{a^2} \pm \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{b^2}}\right]^5 \left[22 \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{a^2} \pm 5 \left(\frac{b^2}{a^4} + \frac{\operatorname{tg}^4\alpha}{b^2}\right)\right]}$$

Für das obere Zeichen:

Setzt man

$$\alpha = 0, \quad \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}, \quad \frac{\pi}{2},$$

so erhält man

$$R = \tfrac{1}{5} \cdot \frac{b^2}{a}, \quad \frac{(\sqrt{a^2 + b^2})^3}{2\sqrt{2}\,ab}, \quad \tfrac{1}{5} \frac{a^2}{b};$$

für $b = a$ kommt:

$$R = \tfrac{1}{5} a, \quad a, \quad \tfrac{1}{5} a.$$

Für das untere Zeichen kommt für

$$\alpha = 0, \quad R = \tfrac{1}{5} \frac{b^2}{a}.$$

28) Der Krümmungsradius in einem Scheitelpunkt einer der beiden Curven ist $\frac{1}{3}$ des Krümmungsradius des entsprechenden Kegelschnitts zu demselben Punkte; für den Fall, dass $b = a$, stehen die Tangenten des Mittelpunkts auf einander senkrecht und sind die Krümmungsmittelpunkte die Durchschnitte der Tangenten mit diesem Kreise.

Figur 6. giebt die Construction des Krümmungsradius für den Mittelpunkt.

In dem Rechteck $ABCD$ ist $AB = a$, $BC = b$, $DE = b$; $AG = AF = 2AE$, HC senkr. auf AC, CJ parall. GH, AJ ist der Radius.

Beweis:

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AH}{AG}; \quad \overline{AJ} = \frac{AC.AH}{AG}$$

$$AH.AB = \overline{AC^2}$$

$$\overline{AJ} = \frac{\overline{AC^3}}{AG\,AB} = \frac{\overline{AC^3}}{2AE.AB} = \frac{(\sqrt{a^2+b^2})}{2\sqrt{2ab}}.$$

Anmerkungen.

1) Von den Gegenständen des Art. III. finden sich die Gleichungen der Curve, die der Ellipse entspricht und die Relation 21)a in den Nouvelles Annales 2. serie, t. XI. p. 27. I. bereits hergeleitet. Dort findet sich von

M. L. Desmons, Professeur au Lycée de Troyes:

I. L'équation de la corde commune au cercle osculateur et à l'ellipse est

$$\frac{x}{a}\cos\alpha - \frac{y}{b}\sin\alpha = \cos 2\alpha,$$

α étant le paramètre angulaire du point de contact, et le second point d'intersection ayant pour paramètre -3α.

II. Les coordonnées du point milieu de la corde y ont, en prenant pour axes les axes de l'ellipse,

$$x = a\,\frac{\cos\alpha + \cos 3\alpha}{2}$$

$$y = b\,\frac{\sin\alpha - \sin 3\alpha}{2}$$

ou bien

$$y = \quad a\cos\alpha\cos 2\alpha$$

$$y = -b\sin\alpha\cos 2\alpha$$



Diese Grundgleichungen geben nach Elimination von α die Gleichungen der Curve die der Ellipse entspricht. (α ist in Art. III. mit φ bezeichnet.

Die Grundgleichungen 17) haben eine andere Herleitung und stellen zugleich beide Curven dar, je nachdem man x_1y_1 einen Punkt der Ellipse oder Hyperbel sein lässt.

2) Die obige elegante Herleitung der Gleichungen ruht auf dem zuerst gewonnenen Resultat, dass $+\alpha$ und -3α die Constructionswinkel der Endpunkte der betreffenden Ellipsensehne sind. Für die Hyperbel findet eine solche einfache Beziehung zwischen den Constructionswinkeln nicht statt. Sind die Constructionswinkel dort Φ_1 und Φ_2, so ist

$$\sin\Phi_2 = -\sin\Phi_1 \frac{3+\sin^2\Phi_1}{1+3\sin^2\Phi_1}$$

§. 4. Quadratur.

Hierzu (Fig. 7.)

Ist $\varrho = F(\alpha)$ die Gleichung einer Curve, so ist der Inhalt eines Sectors zwischen den Strahlen zu $\alpha = 0$ und $\alpha = \alpha$

$$\tfrac{1}{2}\int \varrho^2 d\alpha$$

Im gegebenen Falle kommt mit Rücksicht auf den früher gefundenen Wert von ϱ

$$\frac{1}{2}\int \frac{\left(\frac{1}{a^2} \mp \frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{b^2}\right)^2 (1+\mathrm{tg}^2\alpha)}{\left(\frac{1}{a^2} \pm \frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{b^2}\right)^3} d\alpha.$$

Der Abkürzung wegen sei C_1 die dem oberen, C_2 die dem unteren Zeichen entsprechende Curve.

a) Quadratur der C_1.

Für den Sector zwischen 0 und α kommt:

$$29)\qquad \frac{1}{2}\int \frac{\left(\frac{1}{a^2} - \frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{b^2}\right)^2 (1+\mathrm{tg}^2\alpha)}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{b^2}\right)^3} d\alpha.$$

Die Substitution

$$30)\qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b}{a}\,\mathrm{tg}\,\varphi$$

liefert ein bequemeres Integral (φ ist der Constructionswinkel der gegebenen Ellipse).

Die Function unterm Integralzeichen wird dann

$$ab\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\right)^2 d\varphi = ab\cos^2 2\varphi\,\partial\varphi$$

daher ist obiges Integral

$$= \frac{ab}{2}(\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 4\varphi)$$

und der doppelte Inhalt des Sectors, welcher zwischen den Strahlen zu den Winkeln $-\alpha$ und $+\alpha$ enthalten ist, ist

31) $$= ab\left[\cos^3\varphi\sin\varphi - \tfrac{1}{2}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{\varphi}{2}\right]$$

für $\varphi = \operatorname{arc tg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}\alpha\right)$

Man erhält den Inhalt des in Figur 7. horizontalen Blattes, wenn man $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$ nimmt; dann wird die obere Grenze $\operatorname{arctg}(1)$ oder $\frac{\pi}{4}$, also $\sin 4\varphi = 0$, $\sin\varphi$ ist dann gleich $\cos\varphi$ gleich $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und man erhält für den Inhalt $\frac{ab\pi}{8}$.

Nimmt man die untere Grenze gleich $\frac{\pi}{4}$ die obere gleich $\frac{\pi}{2}$, so erhält man den Inhalt des unterhalb der x Axe liegenden verticalen Blattes; dieser ist ebenfalls gleich $\frac{ab\pi}{8}$.

32) Die Blätter der C_1 haben gleichen Flächeninhalt, und ist der Inhalt eines jeden gleich dem achten Teil der gegebenen Ellipse; der Inhalt des ganzen von der C_1 eingeschlossenen Raumes ist gleich dem halben Inhalt dieser Ellipse.

In den „Nouvelles Annales“, Serie II, Band 11 ist die Enveloppe der Sehnen, welche die Krümmungskreise mit der Ellipse gemein haben, behandelt. Sie ist eine geschlossene symmetrisch zu den Axen liegende Curve, welche die Ellipse einschliesst und sie in ihren Scheitelpunkten berührt; sie hat vier Rückkehrpunkte in $x = \pm a\sqrt{2}$, $y = \pm b\sqrt{2}$ p. 34 ist „par M. Moret-Blanc, Professeur au Lycée du Havre“ ihr Inhalt bestimmt gleich $\frac{3}{2}$ der Ellipse. Es folgt:

33) Die Flächen der Curven C_1, der Ellipse und der Enveloppe, verhalten sich zu einander wie

$$1 : 2 : 3.$$

b) Fortsetzung der Quadratur der C_1.

Der Inhalt der C_1 zwischen der durch den Endpunkt von x zur x-Axe senkrecht gezogenen Curvensehne und dem Scheitelpunkte a, 0 ist gleich dem Inhalte des Sectors zwischen der durch x, $\pm y$ der C_1 und dem Anfangspunkte hindurchgehenden Strahlen minus dem Inhalte des Dreiecks, dessen Eckpunkte die Endpunkte dieser Sehne und der Anfangspunkt sind, oder kurz gleich

$$\text{Sector } C_1 - xy$$

Obige Strahlen bilden mit der x-Axe die Winkel $+\alpha$ und $-\alpha$.

Den Inhalt durch α ausgedrückt erhält man, wenn man in Formel 31) $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ durch $\operatorname{tg}\varphi$ ausdrückt, die Differenz der Functionswerte bildet, und für x und y die Werte des oberen Zeichens aus 23) einsetzt; es kommt:

$$34) \quad \frac{a^2 \operatorname{tg}\alpha}{\left(1+\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}^2\alpha\right)^2} - \frac{\frac{a^2}{2}\operatorname{tg}\alpha}{1+\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{ab}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}\alpha\right) - \frac{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{b^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{b^2}\right)^3}\operatorname{tg}\alpha.$$

Der Inhalt wird durch x und y ausgedrückt, wenn man $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ setzt.

Die Strahlen zu den Winkeln $-\alpha$ und $+\alpha$ schneiden die gegebene Ellipse in den Punkten, die mit x_1, y_1 bezeichnet sein mögen. Da $\operatorname{tg}\alpha$ auch gleich $\frac{y_1}{x_1}$, so ist der Inhalt ausgedrückt durch x_1 und y_1

$$35) \quad \left[\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 x_1 y_1 + \left[\frac{ab}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{b}\frac{y_1}{x_1}\right) - \tfrac{1}{2}x_1 y_1\right]\right] - \left[2\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - 1\right]^2 x_1 y_1$$

Das zweite Glied oder das Product xy wurde aus den Gleichungen 23) gebildet und musste es absolut genommen werden, weil xy absolut. $x_1 y_1$ ist das Rechteck, welches sich in Figur 7. darstellt, wenn man durch den Punkt x_1, y_1 eine Parallele zur Axe der x zieht bis

zum Durchschnitt mit der y-Axe; es sei bezeichnet mit R_1. Die Verhältnisszahl $\frac{x_1}{a}$ sei bezeichnet mit k_1. Das zweite Glied der ersten Klammer ist der Inhalt des Ellipsenflächenstückes, zwischen der $+x$-Axe, der Ordinate y_1 und der Ellipse; es sei bezeichnet mit S_1. Die vorhergehende Formel wird dadurch geometrisch anschaulich, und aus ihr wird

$$36)\qquad [k_1^2 R_1 + S_1] - [2k_1^2 - 1]^2 R_1, \qquad 0 < k_1 < 1.$$

Für $k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ verschwindet das letzte Glied, der Inhalt des durch dasselbe dargestellten Dreiecks wird null, d. h.: aus den beiden Strahlen, welche durch den Anfangspunkt gehen, werden die Tangenten des Mittelpunkts. Also stellt

$$\frac{R_1}{2} + S_1$$

den Inhalt des ganzen Blattes dar. $\frac{R_1}{2}$ ist aber der Inhalt des Dreiecks, dessen Grundlinie x_1 und dessen Höhe y_1 ist (vgl. Figur). Daraus folgt:

37) Der Inhalt des Blattes ist gleich dem Inhalte des Sectors der Ellipse, welcher zwischen der x-Axe und einer Tangente des Mittelpunkts enthalten ist.

Da nach früher der Inhalt eines jeden Blattes gleich $\frac{ab\pi}{8}$, also gleich der Hälfte der Ellipsenfläche eines Quadranten ist und darum auch der Inhalt des Sectors, so teilt die Tangente des Mittelpunkts die Ellipsenfläche eines Quadranten in zwei gleiche Teile, und weil nun der Inhalt des Sectors gleich dem doppelten Inhalte eines halben Blattes ist, so teilen die Bögen zu den halben Blättern an der x- und y-Axe jeden solchen Teil wieder in zwei gleiche Teile. Die Tangenten des Mittelpunkts sind die Diagonalen des Rechtecks, dessen Seiten durch die Scheitelpunkte zu den Axen parallel gezogen sind. Also folgt:

38) Die Axen der Ellipse, die Diagonalen des Rechtecks, dessen Seiten durch die Scheitelpunkte zu den Axen parallel gezogen sind, und die Curve C_1 teilen die Ellipsenfläche in 16 gleiche Teile.

c) Quadratur der C_2.

Für den Sector zwischen 0 und α kommt

39) $$\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\alpha}\frac{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{b^2}\right)^2(1+\mathrm{tg}^2\alpha)}{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{b^2}\right)^3}\,d\alpha$$

Die Substitution

40) $$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{b}{a}\sin\Phi$$

ändert das Integral um in ein leichteres. (Φ ist der Constructionswinkel der gegebenen Hyperbel).

Die Function unterm Integralzeichen wird dann

$$ab\frac{[1+\sin^2\Phi]^2}{\cos^5\Phi}\,d\Phi=ab\left[\frac{4}{\cos^5\Phi}-\frac{4}{\cos^3\Phi}+\frac{1}{\cos\Phi}\right]d\Phi.$$

und unter Anwendung von

$$\int\frac{d\Phi}{\cos^n\Phi}=\frac{\sin\Phi}{(n-1)\cos^{n-1}\Phi}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{d\Phi}{\cos^{n-2}\Phi}\quad\text{und}$$

$$\int\frac{d\Phi}{\cos\Phi}=\ln\frac{1+\sin\Phi}{\cos\Phi}$$

kommt für das Integral

$$\frac{ab}{2}\left[\frac{\sin\Phi}{\cos^4\Phi}-\frac{\sin\Phi}{2\cos^2\Phi}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\Phi}{\cos\Phi}\right]\left(\Phi=\arcsin\frac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{b}\right)$$

Der doppelte Inhalt dieses Sectors, also der Inhalt des Sectors, welcher zwischen den Strahlen zu den Winkeln $-\alpha$ und $+\alpha$ enthalten ist, ist

41) $$ab\left[\frac{\sin\Phi}{\cos^4\Phi}-\frac{\sin\Phi}{2\cos^2\Phi}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\Phi}{\cos\Phi}\right]\left(\Phi=\arcsin\frac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{b}\right)$$

Diese Strahlen schneiden die C_2 in einem Punkt $X, \pm Y$.

Der Inhalt der C_2 zwischen der durch den Endpunkt von X zur x-Axe senkrecht gezogenen Curvensehne und dem Scheitelpunkte a, 0, ist gleich dem Inhalte des Dreiecks, dessen Eckpunkte die Endpunkte dieser Sehne und der Anfangspunkt sind, minus dem Inhalte des Sectors, welcher zwischen den durch die Punkte $X, \pm Y$ und dem Anfangspunkte hindurchgehenden Strahlen enthalten ist, also gleich

$$X\,.\,Y-\text{Sector } C_2.$$

Setzt man die dem unterm Zeichen entsprechenden Werte aus 23) ein und in 41) den Wert von Φ, so kommt

$$42)\quad \frac{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{b^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{b^2}\right)^3}\operatorname{tg}\alpha - \frac{ab}{2}\left[\frac{\frac{a}{b}\operatorname{tg}\alpha}{\left(1-\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}^2\alpha\right)^2} - \frac{\frac{a}{b}\operatorname{tg}\alpha}{2\left[1-\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}^2\alpha\right]} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{a}{b}\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}^2\alpha}}\right]$$

Der Inhalt wird durch X und Y ausgedrückt, wenn man $\operatorname{tg}\alpha = \frac{Y}{X}$ setzt.

Die Strahlen zu den Winkeln $-\alpha$ und $+\alpha$ schneiden die gegebene Hyperbel in den Punkten, die mit X_1, $\pm Y_1$ bezeichnet sein mögen. Da $\operatorname{tg}\alpha$ auch gleich $\frac{Y_1}{X_1}$, so ist der Inhalt ausgedrückt durch X_1 und Y_1

$$43)\quad \left[2\left(\frac{X_1}{a}\right)^2-1\right]X_1 Y_1 - \left[\left(\frac{X_1}{a}\right)^2 X_1 Y_1 - \left[\frac{X_1 Y_1}{2} - \frac{ab}{2}\ln\left(\frac{X_1}{a}+\frac{Y_1}{b}\right)\right]\right]$$

Das erste Glied, welches das Product XY darstellt, ist aus den Gleichungen 17) gebildet, und ist es absolut genommen, weil XY absolut.

$X_1 Y_1$ ist das Rechteck, welches sich in Figur darstellt, wenn man durch den Punkt X_1, Y_1 eine Parallele zur Axe der x zieht bis zum Durchschnitt mit der y-Axe; es sei bezeichnet mit R_2. Die Verhältnisszahl $\frac{X}{a}$ sei bezeichnet mit k_2. Das zweite Glied der zweiten Klammer ist der Inhalt des Hyperbelflächenstücks zwischen der $+x$-Axe, der Ordinate Y_1 und der Hyperbel; es sei bezeichnet mit S_2. Dadurch wird die vorige Formel geometrisch anschaulich, und aus ihr wird

$$44)\quad [2k_2^2-1]^2 R_2 - [k_2^2 R_2 - S_2],\quad k_2 > 1.\quad \text{(Vgl. 36).}$$

Für $k_2 = \sqrt{2}$ kommt

$$45)\quad 7R_2 + S_2.$$

d) Sätze über die Sectoren C_1 und C_2; vervollständigte geometrische Darstellung dieser Sectoren.

Das erste Glied von 36) und das zweite Glied von 44) stellen die entsprechenden Sectoren dar.

$$\text{46)} \quad \begin{aligned} \text{Sector } C_1 &= k_1{}^2 R_1 + S_1 \\ \text{Sector } C_2 &= k_2{}^2 R_2 - S_2 \end{aligned}$$

welche Gleichungen in der Gleichung

$$\text{Sector } C = k^2 R \pm S \qquad \begin{matrix} 0 < k < 1 \\ 1 < k < \infty \end{matrix}$$

enthalten gedacht werden können, oder

47) Der Inhalt eines Sectors einer Curve C, welcher zwischen den Strahlen zu $-\alpha$ und $+\alpha$ enthalten ist, ist gleich dem k^2fachen Inhalte des Rechtecks gebildet aus den Coordinaten des Punktes, in welchem der Strahl den zugehörigen Kegelschnitt schneidet, $\pm$ dem Flächenstück zwischen der Ordinate dieses Punktes, der positiven x-Axe und dem Kegelschnitt, aus welchem C hergeleitet ist, und zwar gilt das obere Zeichen, wenn der gegebene Kegelschnitt eine Ellipse, das untere, wenn dieser eine Hyperbel war; k bezeichnet das Verhältniss der Abscisse des Punktes, in welchem einer der Strahlen die Curve C schneidet.

48) Zur Erläuterung der Formeln 30) und 40) und für die weitere geometrische Darstellung der Sectoren wird es geboten sein nachfolgende zwei Punkte in Erinnerung zu bringen.

1) Zu einem gegebenen Winkel φ construirt man leicht den Punkt $x_1 y_1$ und hat man darum auch α. Der Strahl unter dem Winkel φ gegen die Axe der x schneidet die beiden um den Anfangspunkt mit b und a beschriebenen Kreise; die durch die Schnittpunkte zu der x- bzhw. y-Axe gezogenen Parallelen schneiden sich im Punkte x_1, y_1. Aus der Construction folgt

$$\begin{aligned} x_1 &= a \cos \varphi \\ y_1 &= b \sin \varphi \end{aligned}$$

Diese Gleichungen erfüllen die Gleichung der Ellipse und darum ist $x_1 y_1$ ein Punkt dieser Ellipse. Durch Division erhält man

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi$$

und da $\frac{y_1}{x_1} = \operatorname{tg} \alpha$, so kommt

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi$$

2) Zu einem gegebenen Winkel Φ construirt man leicht den Punkt X_1, Y_1 und hat man darum auch den entsprechenden Winkel α. Der Strahl unter dem Winkel Φ gegen die X-schneidet die im Punkte $b, 0$ auf der x-Axe errichtete

und den um den Anfangspunkt mit a beschriebenen Kreis in je einem Punkte; setzt man für den letzteren Punkt den Durchschnittspunkt der Tangente des letzteren Punktes mit der x-Axe, so geben die Parallelen durch den ersten und den zuletzt erhaltenen Punkt zu der x- bzhw. y-Axe den Punkt X_1, Y_1. Aus der Construction folgt

$$X_1 = \frac{a}{\cos \Phi}$$

$$Y_1 = b \operatorname{tg} \Phi$$

Diese Gleichungen erfüllen die Gleichung der Hyperbel und darum ist X_1, Y_1 ein Punkt dieser Hyperbel. Durch Division erhält man

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{b}{a} \sin \Phi$$

und weil $\frac{y_1}{x_1} = \operatorname{tg} \alpha$,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \sin \Phi$$

Bemerkung. Die Gleichungen unter 45) könnten im Fall eine Untersuchung es wünschenswert erscheinen lassen sollte, in alle vorhergehende Formeln substituirt werden. Dadurch hätte man in den Artikeln I. und II. für jede Formel *zwei* Formeln erhalten, das Gegenteil von dem was beabsichtigt war.

Aus dem Vorhergehenden folgt (vgl. 46):

$$k_1 = \cos \varphi$$

$$k_2 = \frac{1}{\cos \Phi}$$

und es kommt demnach

$$\text{Sector } C_1 = \cos^2\varphi \, . \, R_1 + S_1$$

$$\text{Sector } C_2 = \frac{1}{\cos^2 \Phi} R_2 - S_2$$

Setzt man in beide Gleichungen den Winkel gleich $\frac{\pi}{4}$, so kommt, weil $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

47) Construirt man zu einem Winkel von 45° die Winkel $+\alpha$ und $-\alpha$ für C_1 und C_2, so ist: 1) der Inhalt des Sectors der C_1 zwischen den Strahlen zu diesen Winkeln gleich dem halben Rechteck aus den Coordinaten des Punktes, in welchem ein Strahl die gegebene Ellipse schneidet, plus dem Flächenstück zwischen der Ordinate dieses

Punktes, der positiven x-Axe und der Ellipse; 2) der Inhalt des Sectors der C_2 zwischen den entsprechenden Strahlen ist gleich dem doppelten Rechteck *) aus den Coordinaten des Punktes, in welchem ein Strahl die gegebene Hyperbel schneidet, minus dem Flächenstück zwischen der Ordinate dieses Punktes der positiven x-Axe und der Hyperbel.

§. 5. Graphische Darstellung des Inhalts für einen beliebigen Constructionswinkel.

Es ist

$$R_1 = x_1 y_1, \quad R_2 = X_1 Y_1$$

und darum

$$\text{Sector } C_1 = y_1(x_1 \cos^2\varphi) + S_1$$

$$\text{Sector } C_2 = Y_1\left(\frac{X_1}{\cos^2\Phi}\right) - S_2$$

Man trägt nun den Winkel Φ an x_1 an, so dass der Scheitelpunkt mit dem Endpunkte von x_1 zusammenfällt, und der andere Schenkel etwa die positive y-Axe schneidet; dann projicire man den Mittelpunkt auf letzteren Schenkel und den Fusspunkt wieder zurück auf die Axe der x; der zuletzt erhaltene Punkt ist der eine Endpunkt der Grundlinie des Rechtecks, dessen Breite gleich y_1 und dessen Länge (Grundlinie) gleich $x_1 \cos^2\varphi$ ist; der andere Endpunkt der Grundlinie ist eben der Endpunkt von x_1. Dieses Rechteck bildet mit dem Stücke S_1 ein zusammenhängendes viereckiges Flächenstück (vgl. Fig. 7.), begrenzt von drei Geraden und der Ellipse.

Trägt man den Winkel Φ an die x-Axe an, so dass der Scheitelpunkt mit dem Endpunkte von X_1 zusammenfällt und errichtet in dem Punkte, wo der andere Schenkel die y-Axe schneidet, ein Lot auf diesem, so wird dieses Lot die x-Axe schneiden. Dieser Schnittpunkt ist der eine Endpunkt der Grundlinie des Rechtecks, dessen Breite gleich y_1 und dessen Länge (Grundlinie) gleich $\frac{X_1}{\cos^2\Phi}$ ist; der andere Endpunkt ist der Endpunkt von X_1. Dieses Rechteck wird zum Teil bedeckt von dem Flächenstücke S_2, so dass die Differenz ein zusammenhängendes viereckiges Flächenstück bildet (vgl. Fig. 7.), begrenzt von drei Geraden und der Hyperbel. Also

48) Construirt man zu gegebenen Constructionswinkeln φ und Φ die Sectoren der Curven C_1 und C_2, die also zwischen den den obigen

*) Das doppelte Rechteck ist dem Rechtecke gleich, dessen Breite die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Strahlen mit der Hyperbel, und dessen Länge die Entfernung eines dieser Punkte von der y-Axe ist. (Vgl. Fig. 5.)



Winkeln entsprechenden Strahlen zu $-\alpha_1$ und $+\alpha_1$ und ferner zu $-\alpha_2$ und $+\alpha_2$ enthalten sind, so ist der Inhalt des Sectors C_1 gleich dem Inhalte eines leicht zu construirenden Vierecks, begrenzt von drei Geraden und einem Ellipsenbogen; der Inhalt des Sectors C_2 ist gleich dem Inhalte eines leicht zu construirenden Vierecks, begrenzt von drei Geraden und einem Hyperbelbogen.

In Fig. 7. sind der Bequemlichkeit wegen die Winkel φ und Φ so angenommen, dass $\alpha_1 = \alpha_2$. Es ist dort

der Sector C_1 oder $E1M2$ gleich dem Viereck $5M34$

und

der Sector C_2 oder $E1_1M2_1$ gleich dem Viereck 5_1M3_14.

Durch diese Betrachtungen sind Flächenstücke, begrenzt von Geraden und Curven 6ter Ordnung, verwandelt worden in Flächenstücke, begrenzt von Geraden und Curven 2ter Ordnung.

Sind umgekehrt die Winkel α gegeben, so erhält man mit Rücksicht auf 48) leicht die entsprechenden Constructionswinkel, da die Abscissen x_1 und X_1 bekannt sind, weil die Ellipse und Hyperbel als in Figur gegeben angenommen werden.

Wenn das aber nicht ist, so liegt es ob, damit die oben angegebene Verwandlung ausgeführt werden kann, zu einem Strahl unter einem angenommenen Winkel α den auf diesem Strahl liegenden Punkt x_1, y_1 bzhw. X_1, Y_1 zu construiren.

Dazu dürfte sich folgende Construction empfehlen. -

49) 1) Man beschreibe um den Anfangspunkt mit $a-b$ und a Kreise. Diese mögen den Strahl in den Punkten P und Q schneiden. Man projicire den Punkt P auf die x-Axe, die Projection sei P_1, und verbinde P_1 mit Q. Die durch den Anfangspunkt zu P_1Q gezogene Parallele schneide den äussern Kreis in einem Punkte T. Die dann durch T zur y-Axe gezogene Parallele schneidet den Strahl im gesuchten Punkte x_1y_1. (Vgl. Fig. 7.)

2) Zu demselben Winkel α erhält man den Punkt X_1, Y_1 wie folgt:

Man beschreibe über x_1 einen Halbkreis und trage darin vom Endpunkte x_1 aus eine Sehne von der Länge der von T auf die x-Axe gefällten Senkrechten ein; die Verbindungslinie des andern Endpunktes dieser Sehne mit dem Anfangspunkte bildet dann mit der x-Axe den Winkel Φ; zu Φ erhält man dann noch früher leicht X_1, Y_1. (Vgl. Fig. 7.)

Beweis zu 1).

Der construirte Winkel ist der Constructionswinkel, wenn



$$\operatorname{tg}\omega_1 = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\alpha$$

Das Lot von Q auf die Axe der x ist gleich $a\sin\alpha$, die Projection des Stückes $a-[a-b]=b$ auf die Axe der x ist $b\cos\alpha$, die Tangente des Winkels der Linie P_1Q mit der x-Axe ist demnach $\frac{a}{b}\operatorname{tg}\alpha$; darum ist es auch die Tangente des Winkels, welche die Parallele ET zu P_1Q mit der x-Axe bildet.

Beweis zu 2).

Der construirte Winkel ist der Constructionswinkel, wenn

$$\sin\omega_2 = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\alpha$$

Es ist $\sin\omega_2 = \operatorname{tg}\varphi$ nach Construction, und $\operatorname{tg}\varphi$ aber $=\frac{a}{b}\operatorname{tg}\alpha$.

§. 6. Rectification.

Setzt man in die Gleichungen (17) ein,

einmal $x = a\cos\varphi,\quad y = b\sin\varphi$

ein andermal $x = \frac{a}{\cos\Phi},\quad y = b\operatorname{tg}\Phi$

so erhält man für C_1

$$x = a\cos\varphi[\cos^2\varphi - \sin^2\varphi]$$
$$y = -b\sin\varphi[\cos^2\varphi - \sin^2\varphi]$$

und für C_2

$$x = \frac{a[2-\cos^2\Phi]}{\cos^3\Phi}$$

$$y = -\frac{b[2-\cos^2\Phi]}{\cos^3\Phi}\sin\Phi$$

Die Differentiale der C_1 sind

$$dx = a\sin\varphi[1-6\cos^2\varphi]\,d\varphi$$
$$dy = -b\cos\varphi[1-6\sin^2\varphi]\,d\varphi$$

und für C_2

$$dx = a\sin\varphi[5+\sin^2\varphi]\,d\varphi : \cos^4\varphi$$
$$dy = -b[1+5\sin^2\varphi]\,d\varphi : \cos^4\varphi$$

und die Länge des Bogens zwischen den Polarwinkeln, welche den Constructionswinkeln 0 und φ entsprechen:

50)

für C_1
$$\int_0^{\varphi} \sqrt{a^2 \sin^2\varphi [5 - 6\sin^2\varphi]^2 + b^2 \cos^2\varphi [1 - 6\sin^2\varphi]^2}\, d\varphi$$

für C_2
$$\int_0^{\Phi} \frac{\sqrt{a^2 \sin^2\Phi [5 + \sin^2\Phi]^2 + b^2 [1 + 5\sin^2\Phi]^2}\, d\Phi}{\cos^4\Phi}$$

Für $b = a$ kommt:

$$1)\quad a \int_0^{\varphi} \sqrt{1 + 12\sin^2\varphi [1 - \sin^2\varphi]}\, d\varphi$$

$$2)\quad a \int_0^{\Phi} \sqrt{1 + 35\sin^2\Phi [1 + \sin^2\Phi] + \sin^6\Phi}\, d\Phi$$

Für den Umfang des halben Blattes kommt:

$$1)\quad a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + 12\sin^2\varphi \cos^2\varphi}\, d\varphi$$

Drückt man φ durch den doppelten Winkel aus und setzt $2\varphi = \psi$, so kommt:

$$\frac{a}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3\sin^2\psi}\, d\psi \quad \text{oder}$$

$$a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \tfrac{3}{4}\cos^2\psi}\, d\psi$$

welches Integral die Länge einer Viertel-Ellipse zu den Axen $2a$ und a darstellt; denn

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \tfrac{3}{4}, \qquad \frac{b^2}{a^2} = \tfrac{1}{4}, \qquad b = \frac{a}{2}$$

Es folgt: Die Länge der ganzen Curve ist gleich der doppelten Länge dieser Ellipse. Die Fläche dieser Curve ist gleich der halben Kreisfläche gleich $\frac{a^2\pi}{2}$; das ist aber auch der Inhalt der Ellipse von den Axen $2a$ und a.

52) Die Curve C_1, die einem Kreis entspricht, hat den Inhalt einer Ellipse, deren grosse Axe gleich dem Durchmesser und deren kleine Axe gleich dem Radius dieses Kreises ist, und ihre Länge ist gleich der doppelten Länge dieser Ellipse.

IV.

Bewegung eines schweren Punktes auf einem Rotationsparaboloid.

Von

Herrn Dr. **Züge** in Lingen.

---

§. 1.

Um die Anwendbarkeit elliptischer Functionen auf mechanische Probleme an einem grösseren Beispiele darzutun, ist von Durège in seiner „Theorie der elliptischen Functionen" die Bewegung des sphärischen Pedels, d. h. eines Punktes, der, allein von der Schwerkraft getrieben, auf der Oberfläche einer Kugel zu bleiben gezwungen ist, eingehend untersucht worden.

Hier soll in analoger Weise die Bewegung eines schweren Punktes bestimmt werden, der die Oberfläche eines Rotationsparaboloids nicht verlassen darf. Wir nehmen an, dass das Paraboloid durch Rotation einer Parabel, deren Gleichung

$$r^2 = 4az$$

sei, um die z-Axe entstanden und diese Axe vertical ist, so dass die negative z-Axe mit der Richtung der Schwere zusammenfällt. Der Scheitel des Paraboloids sei gleichzeitig der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, auf welches bezogen die Coordinaten des schweren Punktes x, y, z heissen mögen. Denken wir uns das Lot r, das man vom Punkte aus auf die z-Axe fällen kann, auf die xy-Ebene projicirt und sei φ der Winkel, den diese Projection mit der positiven x-Axe bildet, so wird die Bedingung, dass der Punkt auf der Oberfläche des Paraboloids bleiben muss, ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$x = 2\sqrt{az}.\cos\varphi,$$
$$y = 2\sqrt{az}.\sin\varphi. \tag{1}$$

Wir erhalten nun aus dem Princip der lebendigen Kraft folgende erste Bewegungsgleichung:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -2gz + C, \tag{2}$$

wobei C eine willkürliche Constante bedeutet. Aus den Gleichungen (1) aber erhält man durch Differentiation:

$$\frac{dx}{dt} = -2\sqrt{az}\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \sqrt{\frac{a}{z}}\cos\varphi\frac{dz}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \quad 2\sqrt{az}\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \sqrt{\frac{a}{z}}\sin\varphi\frac{dz}{dt},$$

folglich geht die Gleichung (2) in folgende über:

$$4az\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{a+z}{z}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -2gz + C. \tag{3}$$

Die zweite der Bewegungsgleichungen liefert uns das Princip der Flächen, das für die xy-Ebene gilt. Nach demselben muss

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = A$$

sein, worin A eine Constante ist, oder

$$4az\frac{d\varphi}{dt} = A. \tag{4}$$

§. 2.

Um zunächst die mechanische Bedeutung der Constanten A und C zu ermitteln, setzen wir fest, dass zu einer beliebigen Zeit

$$t = \tau, \quad z = \zeta, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

sei, dann ist

$$A = 4a\zeta\omega$$

und daher

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega\zeta}{z}.$$

Setzen wir nun letzteren Wert in die Gleichung (3) ein, so erhalten wir:

$$4a\omega^2\frac{\zeta^2}{z}+\frac{a+z}{z}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=-2gz+C,$$

also

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=\frac{Cz-4a\omega^2\zeta^2-2gz}{a+z} \tag{6}$$

Nehmen wir ferner an, dass zur Zeit $t=\tau$

$$\frac{dz}{dt}=c$$

sei, so erhält man

$$\frac{c^2(a+\zeta)}{\zeta}+4a\zeta\omega^2+2g\zeta=C.$$

Setzt man den Wert für C nun in (6) ein, so ergiebt sich nach einigen Umformungen:

$$\frac{dz}{dt}=\sqrt{\frac{c^2\left(\frac{a}{\zeta}+1\right)z+(\zeta-z)(2gz-4a\zeta\omega^2)}{a+z}}. \tag{7}$$

Da $\frac{dz}{dt}$ reell bleiben muss, so erkennt man bald, dass z nicht unendlich gross werden und überhaupt nur die positiven Werte annehmen kann, welche zwischen den reellen Wurzeln der Gleichung:

$$0=\frac{c^2(a+\zeta)z}{\zeta}+(\zeta-z)(2gz-4a\zeta\omega^2) \tag{8}$$

liegen. Setzen wir zur Abkürzung:

$$z:\zeta=u,\quad \frac{2a\omega^2}{g}=m,\quad \frac{c^2(a+z)}{2g}=n,$$

so lautet die Gleichung (8)

$$(1-u)(u-m)+nu=f(u)=0. \tag{9}$$

Da für $u=0$ $f(u)<0$, für $u=1$ $f(u)>0$,
für $u=m$ $f(u)>0$ und für $u=\infty$ $f(u)<0$

ist, so giebt es immer zwei reelle positive Wurzeln der Gleichung, und somit ergiebt sich, dass, welche Werte die Grössen c und ω haben mögen, die z-Coordinate des Punktes zwischen zwei Grenzen, für welche die Verticalgeschwindigkeit 0 ist, veränderlich ist. Durch Auflösung der Gleichung (8) kann man diese Grenzwerte der z-Coordinate, und da

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\omega\zeta}{z}$$

ist, auch die horizontale Winkelgeschwindigkeit am höchsten und tiefsten Punkte aus den willkürlich gegebenen Grössen c und ω berechnen.

Wir setzen nun zur Vereinfachung der weiteren Untersuchung fest, dass zur Zeit $t = 0$ die Bewegung am höchsten Punkte beginne, also $c = 0$ und folglich auch $n = 0$ sei, und bezeichnen die entsprechenden Werte von z und ω mit z_0 und ω_0. Dann lautet die Gleichung (9)

$$(1-u)(u-m) = 0,$$

und es bedeutet jetzt $u = z : z_0$. Für den höchsten Punkt ist $u = 1$, also für den tiefsten $u = m$, d. h. es ist $m < 1$. Es muss also bei der Bewegung die horizontale Winkelgeschwindigkeit am höchsten Punkte ω_0 immer so beschaffen sein, dass

$$m = \frac{2a\omega_0^2}{g} < 1$$

ist, höchstens gleich 1. Im letzteren Falle stimmen die beiden Grenzwerte für u resp. für z überein, z kann weder wachsen noch abnehmen, es findet also eine einfache Kreisbewegung statt. Die Bedingung hierfür ist also

$$\frac{2a\omega_0^2}{g} = 1.$$

Sei v die horizontale, in der Richtung der Kreistangente genommene Geschwindigkeit des materiellen Punktes, r_0 der Radius der Kreisbahn, so ist

$$\omega_0 = v : r_0,$$

also

$$1 = \frac{2v^2a}{gr_0} \quad \text{oder} \quad \frac{v^2}{r_0} = \frac{gr_0}{2a}.$$

Nun drückt $\frac{v^2}{r_0}$ die Grösse der Centrifugalkraft aus; denken wir uns ferner durch den bewegten Punkt und die z-Axe eine Ebene gelegt und an den so entstehenden parabolischen Schnitt eine Tangente durch den Punkt, so ist die Gleichung dieser Tangente:

$$rr_0 = 2a(z + z_0),$$

also der tangens des Winkels, den die Tangente mit der positiven z-Axe bildet, ist $2a : r_0$, oder sei ψ der Winkel, den die Tangente mit der Richtung der Centrifugalkraft bildet, so ist

$$\tang \psi = r_0 : 2a.$$

Daher geht obige Relation in folgende über:

$$\frac{v^2}{r_0}\cos\psi = g\sin\psi,$$

das heisst: Ein schwerer Punkt bewegt sich auf dem Rotationsparaboloid mit verticaler Axe kreisförmig, wenn die Anfangsgeschwindigkeit horizontal gerichtet ist und die Componente der auf die Rotationsaxe bezogenen Centrifugalkraft, welche in der Richtung einer durch den Punkt an das Paraboloid gelegten und die z-Axe schneidenden Tangente genommen ist, dem absoluten Werte nach gleich ist der nach derselben Richtung genommenen Componente der Schwerkraft. Ist die Componente der Centrifugalkraft grösser oder kleiner, als die Componente der Schwere, so vergrössert oder verkleinert sich zunächst die verticale Entfernung des Punktes von der xy-Ebene.

§. 3.

Beginne die Bewegung also in grösster Entfernung von der xy-Ebene, sei also

$$\frac{2a\omega_0^2}{g} < 1,$$

so ist zunächst die Verticalgeschwindigkeit negativ, und es ergiebt sich aus (7) die Gleichung:

$$\frac{dz}{dt} = -\sqrt{\frac{(z_0-z)(2gz-4az_0\omega_0^2)}{a+z}},$$

daher

$$-t = \int_{z_0}^{z} \frac{(a+z)dz}{\sqrt{(a+z)(z_0-z)(2gz-4az_0\omega^2)}}.$$

Die Function unter dem Wurzelzeichen hat die Wurzeln

$$-a, \quad z_0, \quad \frac{2a\omega_0^2 z_0}{g}$$

Wenn wir letztere mit b bezeichnen, erhalten wir

$$-\sqrt{2g}\,.\,t = \int_{z_0}^{z} \frac{(a+z)dz}{\sqrt{(z+a)(z_0-z)(z-b)}}$$

Setzen wir

$$z_0 - z = \omega^2$$

und zur Abkürzung

$$z_0 + a = \alpha^2, \quad z_0 - b = \beta^2$$

so ergiebt sich

$$\sqrt{2g}\,.\,t = 2\int\limits_0^\omega \frac{(\alpha^2-\omega^2)d\omega}{\sqrt{(\alpha^2-\omega^2)(\beta^2-\omega^2)}},$$

und nun genügt die Substitution $\omega = \beta v$, um das Integral in die Normalform überzuführen. Man erhält, wenn $\frac{\beta^2}{\alpha^2} = k^2$ gesetzt wird,

$$\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{g}{2}}\,.\,t = \int\limits_0^v \frac{(1-k^2v^2)dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}}.$$

Das Integral ist ein elliptisches Integral zweiter Gattung, das wir mit Legendre, nachdem $v = \sin\psi$ substituirt ist, mit $E(\psi)$, oder wenn wir setzen

$$u = \int\limits_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}},$$

mit $E(u)$ bezeichnen können, wobei

$$E(u) = \int\limits_0^u \mathrm{dn}^2 u\, du$$

ist. Somit erhalten wir

$$\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{g}{2}}\,.\,t = E(u), \tag{10}$$

und durch Vereinigung der benutzten Substitutionsformeln, da $\psi = \mathrm{am}\, u$ ist,

$$z = z_0 - (z_0 - b)\,\mathrm{sn}^2 u. \tag{11}$$

Bezeichne T die halbe Schwingungsdauer, d. h. die Zeit, in welcher der schwere Punkt aus der grössten in die kleinste Entfernung von der xy-Ebene gelangt, so ist

$$T = \alpha\sqrt{\frac{2}{g}}\,.\,E,$$

wobei E das vollständige Integral zweiter Gattung bedeutet. Wir erhalten hierdurch aus (10) die Gleichung

$$t = \frac{T}{E}E(u),$$

und da bekanntlich

$$E(u) = \frac{E}{K}u + Z(u)$$

ist, worin K das vollständige elliptische Integral erster Gattung und

$$Z(u) = \frac{4\pi}{2K} \sum_1^\infty \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin\frac{n\pi u}{K}, \qquad q = e^{-\frac{\pi K'}{K}} \tag{12}$$

ist, so geht die Formel (10) über in

$$t = \frac{T}{K}u + \frac{T}{E}z(u). \tag{13}$$

Es entsprechen sich nun, wie sich aus (11) und (13) ergiebt, folgende Werte:

$$u = 0, \quad = K, \quad = 2K, \quad = 3K \ldots$$
$$t = 0, \quad = T, \quad = 2T, \quad = 3T \ldots$$
$$z = z_0, \quad = b, \quad = z_0, \quad = b \quad \ldots$$

Da ferner

$$Z(u+2k) = Z(u)$$

und

$$\operatorname{sn}(u+2k) = -\operatorname{sn} u$$

ist, so wächst, wenn u um $2k$ zunimmt, t um $2T$ und z nimmt denselben Wert wieder an. Es kehren also in der Periode $2T$ immer genau dieselben Werte für z wieder. Dasselbe gilt von der Geschwindigkeit. Denn es ist

$$\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{g}{2}} \cdot \frac{dt}{du} = \frac{dE(u)}{du} = \operatorname{dn}^2 u, \tag{14}$$

$$\frac{dz}{du} = -2(z_0 - b)\operatorname{sn} u \,.\, \operatorname{cn} u \,.\, \operatorname{dn} u,$$

also

$$\alpha\sqrt{\frac{1}{2g}} \cdot \frac{dz}{dt} = -\frac{2(z_0 - b)\operatorname{sn} u \,.\, \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u},$$

und es ist sowohl

$$\operatorname{sn}(u+2K) = -\operatorname{sn} u,$$

als auch

$$\operatorname{cn}(u+2K) = -\operatorname{cn} u,$$

dagegen

$$\operatorname{dn}(u+2K) = \operatorname{dn} u.$$

Es sei ferner $T-t_1$ die Zeit, welche dem Argumente $K-u_1$ entspricht, und $T+t_2$ die Zeit, die dem Argumente $K+u_1$ entspricht, so ist nach (13)

$$T - t_1 = \frac{T}{K}(K-u_1) + \frac{T}{E}Z(K-u_1)$$

und (15)

$$T + t_2 = \frac{T}{K}(K+u_1) + \frac{T}{E}Z(K+u_1).$$

Da nun

$$Z(K-u)_1 = -Z(K+u_1)$$

ist, so ergiebt sich durch Addition der Gleichungen (15):

$$2T - t_1 + t_2 = 2T,$$

d. h. es muss $t_1 = t_2$ sein. Es entsprechen also den Argumenten $K-u_1$ und $K+u_1$ zwei Zeitwerte, von denen der eine um ebensoviel kleiner ist als T, als der andere grösser. Es sind aber die Grössen $\operatorname{sn}^2(K+u_1)$ und $\operatorname{sn}^2(K-u_1)$ beide gleich $\operatorname{cn}^2 u : \operatorname{dn}^2 u$; also sind für jene Argumente die Werte von z einander gleich. Der schwere Punkt gebraucht also gleich lange Zeit, um von einer beliebigen Höhe bis an die tiefste Stelle zu gelangen, und um von dort die ursprüngliche Höhe wieder zu erreichen. Die Verticalgeschwindigkeit ist beide Male dem absoluten Werte nach dieselbe, dem Vorzeichen nach verschieden.

Wir erörtern hier sogleich noch den speciellen Fall, in welchem $\omega_0 = 0$ ist, der Punkt sich also in einer Ebene auf einer Parabel bewegt. Es ist dann

$$b = 0, \quad k^2 = \frac{z_0}{z_0 + a}$$

und es wird $z = z_0 \operatorname{cn}^2 u$. Der tiefste Punkt ist der Scheitel der Parabel. Im übrigen gelten dieselben Ableitungen.

§. 4.

Wir gehen nun zur Bestimmung des Winkels φ über. Für ihn gilt die Gleichung

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 \frac{z_0}{z},$$

also, wenn wir voraussetzen, dass zur Zeit $t = 0$, $\varphi = 0$ sei, welcher Bedingung immer durch passende Wahl der Richtung der x-Axe entsprochen werden kann:

$$\varphi = \omega_0 z_0 \int_0^t \frac{dt}{z}$$

Hieraus ergiebt sich durch Benutzung der Gleichungen (11) und (14)

$$\varphi = \omega_0 z_0 c \sqrt{\frac{2}{g}} \int_0^u \frac{\operatorname{dn}^2 u \, du}{z_0 - (z_0 - b)\operatorname{sn}^2 u}.$$

Es war aber

$$c = \sqrt{z_0 + a}, \quad b = z_0 \frac{2a\omega_0^2}{g};$$

setzen wir zur Abkürzung

$$1 - \frac{2a\omega_0^2}{g} = \varepsilon^2,$$

welche Grösse ein echter Bruch sein muss, so ist

$$\varphi = \sqrt{\frac{(z_0+a)b}{z_0 a}} \int_0^u \frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u}{1 - \varepsilon^2 \operatorname{sn}^2 u} du.$$

Um dies Integral auf die Jacobi'sche Normalform zu bringen, schreiben wir, indem wir den Factor vor dem Integralzeichen kurz mit M bezeichnen:

$$\varphi = M \int_0^u \frac{1 - \varepsilon^2 \operatorname{sn}^2 u + (\varepsilon^2 - k^2) \operatorname{sn}^2 u}{1 - \varepsilon^2 \operatorname{sn}^2 u} du,$$

und erhalten dann:

$$\varphi = Mu + M \frac{\varepsilon^2 - k^2}{\varepsilon^2} \int_0^u \frac{\varepsilon^2 \operatorname{sn}^2 u}{1 - \varepsilon^2 \operatorname{sn}^2 u} du.$$

Da

$$k^2 = \frac{z_0 - b}{z_0 + a} = \frac{z_0 \varepsilon^2}{z_0 + a} \tag{16}$$

ist, so liegt ε^2 zwischen k^2 und 1, und wir setzen daher

$$\varepsilon^2 = k^2 \operatorname{sn}^2(i\varrho + K), \tag{17}$$

wobei ϱ einen reellen Wert haben muss. Dann ist

$$\varphi = Mu + M \frac{\varepsilon^2 - k^2}{k^2} \int_0^u \frac{k^2 \operatorname{sn}^2(i\varrho + K) \operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(i\varrho + K) \operatorname{sn}^2 u} du.$$

Multipliciren wir Dividendus und Divisor des Quotienten unter dem Integralzeichen mit

$$\operatorname{cotam}(i\varrho + K) \operatorname{dn}(i\varrho + K),$$

so ergiebt sich

$$\varphi = Mu + M \frac{\varepsilon^2 - k^2}{k^2} \frac{\operatorname{tg am}(i\varrho + K)}{\operatorname{dn}(i\varrho + K)} \int_0^u \frac{k^2 \operatorname{sn}(i\varrho + K) \operatorname{cn}(i\varrho + K) \operatorname{dn}(i\varrho + K) \operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(i\varrho + K) \operatorname{sn}^2 u} du.$$

Für letzteres Integral benutzen wir das Jacobi'sche Zeichen $\Pi(u, i\varrho + K)$. Den Factor des Integrals drücken wir zunächst in reellen Grössen aus.

Es ist

$$\frac{\operatorname{tang am}(i\varrho + K)}{\operatorname{dn}(i\varrho + K)} = i \frac{\operatorname{dn}(\varrho, k')}{k'^2 \operatorname{sn}(\varrho, k') \operatorname{cn}(\varrho, k')},$$

wobei bekanntlich $k'^2 = 1 - k^2$ ist. Aus (16) und (17) folgt

$$\frac{\varepsilon^2}{k^2} = \frac{z_0 + a}{z_0} = \mathrm{sn}^2(i\varrho + K) = \frac{1}{\mathrm{dn}^2(\varrho, k')}$$

und hieraus

$$\mathrm{dn}(\varrho, k') = \frac{k}{\varepsilon}, \quad \mathrm{sn}(\varrho, k') = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}}{\varepsilon k'}, \quad \mathrm{cn}(\varrho, k') = \frac{k\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon k'}, \tag{17a}$$

also

$$\frac{\mathrm{tang\,am}(i\varrho + K)}{\mathrm{dn}(i\varrho + K)} = \frac{i\varepsilon}{\sqrt{(\varepsilon^2 - k^2)(1-\varepsilon^2)}},$$

und bezeichnen wir $1 - \varepsilon^2$ mit ε'^2, so ist

$$\varphi = Mu + \frac{M\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}}{\varepsilon\varepsilon'}\, i\Pi(u, i\varrho + K). \tag{18}$$

Da

$$M = \sqrt{\frac{(z_0 + a)b}{az_0}}, \quad \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon^2 - k^2} = \sqrt{1 - \frac{k^2}{\varepsilon^2}} = \sqrt{\frac{a}{z_0 + a}},$$

$$\varepsilon' = \sqrt{\frac{2a\omega_0^2}{g}} = \sqrt{\frac{b}{z_0}}$$

ist, so ist in (18) der Factor des zweiten Gliedes gleich 1, und es bleibt

$$\varphi = Mu + i\Pi(u, i\varrho + K).$$

Nun ist nach einer bekannten Relation

$$\Pi(u, i\varrho + K) = uZ(i\varrho + K) + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u - i\varrho - K)}{\Theta(u + i\varrho + K)}, \tag{18a}$$

daher

$$\varphi = u[M + iZ(i\varrho + K)] + \frac{i}{2}\log\frac{\Theta(u - i\varrho - K)}{\Theta(u + i\varrho + K)} \tag{19}$$

Die rechte Seite der Gleichung (19) besteht aus einem stetig wachsenden und einem periodischen Teile. Da allgemein die Relationen gelten:

$$\Theta(-u) = \Theta(u), \ \Theta(u + K) = \Theta(u - K), \ \Theta(u + 2K) = \Theta(u - 2K) = \Theta(u),$$

so folgt, dass das periodische Glied verschwindet für

$$u = 0, \quad = K, \quad = 2K, \quad = 3K, \ldots$$

Sei Φ der Winkel, der der Zeit T und der Amplitude K entspricht, so ist

$$\Phi = K[M + iZ(i\varrho + K)], \tag{20}$$

also

$$\varphi = \frac{\Phi}{K}u + \frac{i}{2}\log\frac{\Theta(u - i\varrho - K)}{\Theta(u + i\varrho + K)} \tag{21}$$

Es entsprechen einander die Werte

$$t = nT, \quad u = nK, \quad \varphi = n\Phi,$$

wenn n eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Setzt man ferner in (21) $u+2K$ statt u, so bleibt das periodische Glied ungeändert, und es ist φ um 2Φ gewachsen. Nach früheren Ableitungen ist dann t um $2T$ gewachsen, während z und $\frac{dz}{dt}$ dieselben Werte wieder annehmen. Daraus geht hervor, dass die Bahn des Punktes aus einander congruenten Teilen besteht, und dass, wenn Φ in einem rationalen Verhältniss zu π steht, der Punkt nach verschiedenen Schwingungen zu der Stelle zurückkehrt, von welcher er ausging. In §. 3. haben wir ferner nachgewiesen, dass gleich lange Zeit vor und nach Erreichung der tiefsten Stelle der Punkt dieselbe Höhe hat. Zwei solchen Zeiten entsprachen die Amplituden $K-u_1$ und $K+u_1$. Setzt man diese Werte in (21) statt u ein, so verschwindet wiederum das periodische Glied, und man erhält

$$\varphi_1 = \Phi - \frac{u_1\Phi}{K}, \quad \varphi_2 = \Phi + \frac{u_1\Phi}{K},$$

d. h. eine durch den Punkt und die z-Axe gelegte Ebene beschreibt in gleichen Zeiten vor und nach Erreichung der tiefsten Stelle gleiche Winkel.

Betrachten wir den Winkel Φ noch etwas genauer. In dem einfachen Falle der Kreisbewegung ist

$$\varepsilon = 0, \quad k = 0, \quad K = \frac{\pi}{2},$$

also wenn in (14) von 0 bis K integrirt wird, da auch $b = z_0$ ist,

$$\Phi = \sqrt{\frac{z_0+a}{a}} \cdot \frac{\pi}{2}. \tag{22}$$

Im allgemeinen ist nach (20)

$$\Phi = K\left[\sqrt{\frac{z_0+a}{a}}\sqrt{\frac{b}{z_0}} + iZ(i\varrho+K)\right] \tag{23}$$

Nach einer bekannten Relation ist

$$Z(i\varrho+K) = \frac{\pi\varrho}{2KK'} - \frac{k^2\operatorname{sn}(i\varrho+K)\operatorname{cn}(i\varrho+K)}{\operatorname{dn}(i\varrho+K)} + Z(\varrho, k').$$

Das zweite Glied ergiebt hier, wie aus den Formeln (17a) hervorgeht:

$$\frac{\sqrt{\varepsilon^2-k^2}}{\varepsilon}\varepsilon' = \sqrt{1-\frac{z_0}{z_0+a}}\sqrt{\frac{b}{z_0}} = \sqrt{\frac{a}{z_0+a}}\sqrt{\frac{b}{z_0}}.$$

Setzen wir die gefundenen Werte in (23) ein, so erhalten wir

$$\Phi = K\left[\left(\sqrt{\frac{z_0+a}{a}} - \sqrt{\frac{a}{z_0+a}}\right)\sqrt{\frac{b}{z_0}} + \frac{\pi\varrho}{2KK'} + Z(\varrho, k')\right.$$

oder nach einigen Umformungen unter Berücksichtigung, dass

$$Z(\varrho, k') = E(\varrho, k') - \frac{E'}{K'}\varrho$$

ist,

$$\Phi = \sqrt{\frac{z_0}{a(z_0+a)}}\sqrt{b}\,.\,K + \frac{\pi\varrho}{2K'} + KE(\varrho, k') - \frac{E'K}{K'}\varrho.$$

Da

$$EK' + KE' - KK' = \frac{\pi}{2}$$

ist, so folgt:

$$\frac{E'K}{K'}\varrho = \frac{\pi\varrho}{2K'} + \varrho(K-E)$$

und

$$\Phi = \sqrt{\frac{bz_0}{a(z_0+a)}}K + KE(\varrho, k') + \varrho(E-K). \tag{24}$$

Wir ersetzen hier das Argument ϱ durch die Amplitude, indem wir

$$\mathrm{am}(\varrho, k') = \sigma$$

annehmen. Aus den Relationen (17a) ergiebt sich

$$\sigma = \mathrm{am}(\varrho, k') = \mathrm{arc\,tang}\frac{\sqrt{\varepsilon^2-k^2}}{k\varepsilon'} = \mathrm{arc\,tang}\sqrt{\frac{a}{b}} \tag{25}$$

Dann erhält man bei Benutzung der Legendre'schen Zeichen:

$$\Phi = \sqrt{\frac{bz_0}{a(z_0+a)}}K + KE_1(\sigma, k') + F(\sigma, k')(E-K). \tag{26}$$

Für den Fall, dass $\omega_0 = 0$, also auch $b = 0$ wird, der Punkt also auf einer Parabel schwingt, nähert sich, wie Formel (25) zeigt, σ dem Werte $\frac{\pi}{2}$, und aus (26) folgt dann:

$$\Phi = KE' + K'E - KK' = \frac{\pi}{2}.$$

Dies ist der Grenzwert für Φ, obwohl bei der Bewegung aus der Gleichung

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0\frac{z_0}{z} = 0$$

sich $\varphi = 0$ ergiebt. Hierin liegt nur ein scheinbarer Widerspruch. Da nämlich $\varrho = K'$ wird, so ergiebt Formel (21) für diesen Fall

$$\varphi = \frac{\pi u}{2K} + \frac{i}{2} \log \frac{\Theta(u - iK' - K)}{\Theta(u + iK' + K)}.$$

Nach Relation (18a) aber ist

$$\frac{i}{2} \log \frac{\Theta(u - iK' - K)}{\Theta(u + iK' + K)} = i\Pi(u, iK' + K) - uiZ(iK' + K).$$

$$\Pi(u, iK' + K) \text{ ist gleich } 0, \quad Z(iK' + K) = -\frac{i\pi u}{2K},$$

so dass man erhält

$$\varphi = \frac{\pi u}{2K} - \frac{\pi u}{2K} = 0.$$

Für die beiden Grenzfälle der Bewegung auf einer Kreislinie und auf einer Parabel sind also die Werte von Φ bezüglich $\sqrt{\frac{z_0 + a}{a}} \cdot \frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$; wir können vermuten, dass, wenn ω_0, also auch b stetig abnimmt, k^2 demnach stetig wächst, auch Φ stetig abnehmen wird, so dass für jeden andern Fall der Wert zwischen jenen beiden Grenzwerten liegt. Zum genauern Nachweis wäre es noch nötig zu zeigen, dass $\frac{d\Phi}{dk^2}$ bei constant bleibendem z_0 immer einen negativen Wert besitzt, was hier noch kurz angedeutet werden soll.

Aus den Beziehungen von σ zu den Grössen a, b, z_0 ergiebt sich, dass wir die Formel (26) auch schreiben können:

$$\Phi = \sqrt{\frac{z_0}{a}}\, k' \cos\sigma\, K + KE_1(\sigma, k') + F(\sigma, k')(E - K).$$

Nun ist

$$\frac{d\Phi}{dk^2} = \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} \frac{d\sigma}{dk^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial k^2}.$$

Aus (25) folgt, dass wenn k^2 wächst, also b abnimmt, auch σ wächst, es muss also $\frac{d\sigma}{dk^2}$ positiv sein. Wir erhalten nun, wenn wir die Differentiation ausführen und die Ausdrücke durch mannigfache Umformungen möglichst vereinfachen:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} = \frac{E - K}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\sigma}}$$

und

$$\frac{\partial \Phi}{\partial k^2} = [E - K]\left[\sqrt{\frac{z_0}{a}} \cdot \frac{\cos\sigma}{2k^2k'} + \frac{\sin\sigma\cos\sigma}{2k^2\sqrt{1-k'^2\sin^2\sigma}}\right].$$

Da $\sigma < \frac{\pi}{2}$, $E < K$, so sind beide Ausdrücke negativ, mithin auch $\frac{d\Phi}{dk^2}$, es nimmt also Φ stetig ab mit wachsendem k. (Vergl. die entsprechenden Ableitungen beim sphärischen Pendel, Durège, Theorie der elliptischen Functionen, 2. Auflage, §. 80).

Wir fassen die Ergebnisse der Untersuchung im Folgenden zusammen. Ein schwerer Punkt auf einem Rotationsparaboloid mit verticaler Axe schwingt zwischen den Peripherien zweier Kreisschnitte hin und her. Innerhalb einer bestimmten Periode wird dieselbe Höhe wieder erlangt und dieselbe Verticalgeschwindigkeit. Eine durch den Punkt und die Rotationsaxe gelegte Ebene bewegt sich mit zunehmender Geschwindigkeit beim Hinabfallen, mit abnehmender beim Steigen des Punktes immer in derselben Drehungsrichtung. In gleichen Zeiten vor und nach Erreichen der tiefsten Stelle werden gleiche Wege zurückgelegt. Die Bahn des Punktes besteht aus lauter congruenten Teilen, den Wegen während je einer ganzen Schwingung, jeder solcher Weg besteht wiederum aus zwei congruenten Teilen. In gewissen Fällen kann die Bewegung auf einem Kreise oder einer Parabel stattfinden. Der Winkel, den die durch den Punkt und die Rotationsaxe gelegte Ebene beschreibt, liegt zwischen den Grenzen $\sqrt{\frac{z_0+a}{a}} \cdot \frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, welche Werte jenen speciellen Fällen entsprechen.

Die Kreise sind die Projectionen von drei der xy-Ebenen parallelen Schnittfiguren des Paraboloids, deren Ebenen durch einen der höchsten, tiefsten und einen beliebigen andern Punkt der Bahn gelegt sind. Die Bahn von zwei vollen Schwingungen ist projicirt. Es ist Wkl. $AOC =$ Wkl. $COB = \Phi$; ebenso muss sein Wkl. $DOC = COE$.

§. 5.

Es soll nun noch für einen speciellen Fall die halbe Zeit- und Winkelperiode T und Φ numerisch bestimmt werden.

Nehmen wir an, die höchsten und tiefsten Punkte der Bahn hätten bezüglich die verticalen Abstände von der Horizontalebene

$$z_0 = 5a \quad \text{und} \quad b = 2a,$$

so dass die Winkelgeschwindigkeit am höchsten Punkte, da



$$b = \frac{2a\omega_0^2}{g} z_0$$

ist,

$$\omega_0 = \frac{g}{5a}$$

wäre, dann würde sein

$$k^2 = \frac{z_0 - b}{z_0 + a} = \tfrac{1}{2}$$

und

$$K = K', \quad E = E'.$$

Wir berechnen zunächst die Grösse

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$$

mit Hülfe der Näherungsformel

$$q = \lambda + 2\lambda^5,$$

wobei

$$\lambda = \tfrac{1}{2} \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 - \sqrt{k}}$$

ist, (s. Thomae, Abriss einer Theorie der complexen Functionen, 2. Aufl. S. 144), und finden

$$q = 0{,}0432139,$$

und sodann K aus der Formel

$$K = \frac{\pi}{2}(1 + 2q + 2q^4 \ldots)^2,$$

$$K = 1{,}8540747.$$

E ist im allgemeinen zu bestimmen aus der Gleichung:

$$E = K - \left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 8K \left[\frac{q}{1-q^2} + \frac{2q^2}{1-q^4} + \frac{3q^3}{1-q^6} \cdots\right],$$

in unserm Falle jedoch weit bequemer aus der Relation

$$E'K + K'E - KK' = \frac{\pi}{2},$$

die bei der Gleichheit von K und K' übergeht in

$$2EK - K^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$E = \tfrac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2K} + K\right],$$

somit

$$E = 1{,}3506439.$$

Nehmen wir für g den Wert 9,80896, so ergiebt sich aus

$$T = \sqrt{\frac{2(z_0+a)}{g}}\,E$$

$$T = 1{,}4939\,\sqrt{a}.$$

Zur Berechnung der Winkelperiode Φ benutzen wir die Formel (24); es ist

$$\Phi = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,.\,K + KE(\varrho, k') + \varrho(E-K),$$

wobei

$$\varrho = F(\sigma, k')$$

ist, was zunächst bestimmt werden soll.

Aus (25) ergiebt sich

$$\sigma = \operatorname{arc tang} \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

und hieraus, da $\sigma < \frac{\pi}{2}$ sein muss,

$$\sigma = 35^0\,15'\,52''.$$

Wir berechnen nun $F(\sigma, k') = F(\sigma, k)$ aus der Formel

$$F(\sigma, k) = \frac{2K}{\pi} \lim \frac{\sigma_n}{2^n}.$$

wobei $\frac{\sigma_n}{2^n}$ einen constanten Wert erreicht für $\lim k_n = 1$ und die Moduln und Winkel durch folgende Gleichungen bestimmt sind:

$$k_1 = \frac{1-k'}{1+k'} \qquad \operatorname{tang}(\sigma_1 - \sigma) = k' \operatorname{tang}\sigma$$

$$k_2 = \frac{1-k_1'}{1+k_1'} \qquad \operatorname{tang}(\sigma_2 - \sigma_1) = k_1' \operatorname{tang}\sigma_1$$

$$k_3 = \frac{1-k_2'}{1+k_2'} \qquad \operatorname{tang}(\sigma_3 - \sigma_2) = k_2' \operatorname{tang}\sigma_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

Man findet so der Reihe nach

$$\sigma_1 = 61^0\,49'\,46''$$
$$\sigma_2 = 123^0\,18'\,04''$$
$$\sigma_3 = 246^0\,36'\,10'',$$

und da k_3, wenn man nur 7 Decimalstellen berücksichtigt, gleich 1 ist, so ist

$$F(\sigma, k) = \frac{2K}{\pi}\,.\,\tfrac{1}{8}(246^0\,36'\,10'')$$

Wenn man den Winkel in Längenmass ausdrückt, findet man schliessli[ch]

$$F(\sigma, k) = \varrho = 0,6350264.$$

Um $E(\varrho, k)$ zu bestimmen, benutzen wir die Relation:

$$E(\varrho, k) = \frac{E}{K}\varrho + Z(\varrho),$$

nachdem zunächst $Z(\varrho)$ mit Hülfe der Thetafunctionen bestimmt ist. Es ist

$$Z(\varrho) = \frac{\Theta'(\varrho)}{\Theta(\varrho)} = \frac{2\pi}{K} \frac{q \sin\frac{\pi\varrho}{K} - 2q^4 \sin\frac{2\pi\varrho}{K} + \dots}{1 - 2q\cos\frac{\pi\varrho}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi\varrho}{K} + \dots}$$

Man berechnet $\frac{\pi\varrho}{K} = 1,0760051$ oder als Winkel gleich $61^0\ 39'\ 2''$, und hierdurch

$$Z(\varrho) = 0,1341900,$$

$$E(\varrho, k) = 0,5967862,$$

schliesslich

$$\Phi = 182^0\ 33'\ 9''.$$

V.

Befreundete Zahlen.

Von

Herrn **P. Seelhoff** in Bremen.

„Wie wol aber ein jede Coss einen unausssprechlichen begriff hat in sich allerley künstlicher rechnung | dennoch findet man viel feiner rechnung welche der Coss nicht sind underworffen | sondern neben der Coss fliessen auss der Theorica | welchs ich wol wolte mit vielen feynen Exempeln beweissen | wil es aber bey einem oder zweyen Exempeln beruhen lassen.“

So äussert sich Mich. Stifel in seinem Commentar zu der Algebra Chr. Rudolph's und führt dann die befreundeten Zahlen an. Wenn man ihm auch beipflichten muss, dass die Aufsuchung solcher Zahlen zu den „feinen Rechnungen“ gezählt wird, so irrt er doch darin, dass er sie von der Algebra ausnehmen will. Es ist gerade der Zweck der nachfolgenden Entwickelungen, diesen Anschluss an die Algebra noch enger zu machen, als es bisher geschehen ist. Möge es daher gestattet sein, über die bisherigen Methoden vorher eine kurze Uebersicht zu geben.

Zuerst findet man die befreundeten Zahlen bei Jamblichus erwähnt, welcher die Bekanntschaft mit ihnen dem Pythagoras zuschreibt. Später bringt der Araber Tabit ben Kurra, welcher im 9ten Jahrhunderte lebte, eine Notiz darüber. Er giebt eine Formel mit zu ihrer Bildung, welche nachher selbständig von Cartesius gefunden wurde und die uns Fr. v. Schooten in seinen Exercitationes Mathematicae wiedergiebt. Es ist dies nach unserer Ausdrucksweise die folgende: $p . q$ und r, wobei $p = 3.2^{n-1} - 1$, $q = 3.2^n - 1$ einerseits und $r = 9.2^{2n-1}$ andererseits, wobei diese drei Zahlen Primzahlen

sein müssen. Hat nun auch v. Schooten mit ihrer Hülfe zwei weitere Paare ausser dem bis dahin allein gekannten und erwähnten (220 und 284) gefunden, so blieb doch hierauf die Anzahl beschränkt; erst Krafft und insbesondere Euler erweiterten später diese Vorschrift, indem sie zu beiden Zahlen auch Producte aus je zwei Primzahlen benutzen und zu den nötigen gemeinsamen Factoren auch Potenzen von 2 oder mehrere ungerade Zahlen nahmen. Sie gingen davon aus, dass bei einem Paare befreundeter Zahlen einmal die Divisorensumme für beide gleich, dann aber auch gleich der Summe der beiden Zahlen sein müsse, wie Euler sich ausdrückt, wenn u und v die Producte aus je zwei Primzahlen und U und V deren Divisorensummen sind, so muss $U = V$ sein und der Bruch $\frac{u+v}{U}$ muss dadurch auf den Wert 1 gebracht werden, dass man ihn mit passenden ächten Brüchen multiplicirt, deren Zähler Factoren von U enthalten, und deren Nenner die dazu gehörigen Divisorensummen sind. Als Beispiel diene das zuletzt von ihm angegebene:

$$u = 205, \quad v = 251,$$

also

$$U = 252 = V.$$

Dann ist

$$\frac{u+v}{U} = \frac{456}{252} = \frac{38}{21}.$$

Multiplicirt man nun der Reihe nach mit $\frac{49}{57}$, $\frac{9}{13}$ und $\frac{13}{14}$, so erhält man den Wert 1, und das Zahlenpaar ist

$$49.9.13.205 \quad \text{und} \quad 49.9.13.251.$$

Um nun leichter Zahlenpaare ausfindig zu machen, welche dieselbe Factorensumme haben, diente ihm eine Tabelle, welche für die Primzahlen bis 1000 und für einige ihrer Potenzen die Divisorensummen enthält.

Während nun das Aufsuchen solcher Paare nur dadurch erschwert wird, dass man in den gewählten einzelnen Zahlen Primzahlen hat, so führt doch der Fortgang der Rechnung in den meisten Fällen darauf hin, dass man keine geeignete gemeinsame Factoren aufzufinden vermag, mit anderen Worten, dass die Auflösung unmöglich ist.

Ich will nun in dem Nachstehenden den umgekehrten Weg einschlagen, indem ich zu den gemeinsamen Factoren die passenden Primfactoren suche. Um aber die Uebersicht nicht zu verlieren, teile ich die befreundeten Zahlen in folgende Gruppen ab.

Wenn p, q, r, s Primzahlen sind, so ist die erste Grundform

$$p.q \quad \text{und} \quad r$$

die zweite

$$p.q \quad \text{und} \quad r.s.$$

Für die erste Grundform ist der gemeinsame Factor entweder 2^n oder ein Product ungerader Zahlen f, oder er ist aus beiden zusammengesetzt; also

$$2^n p.q \quad \text{und} \quad 2^n r$$
$$f.p.q \quad \text{und} \quad f.r$$
$$2^n f.p.q \quad \text{und} \quad 2^n f.r.$$

Für die zweite Grundform ist der gemeinsame Factor entweder 2^n allein, oder in Verbindung mit f, mithin

$$2^n p.q \quad \text{und} \quad 2^n r.s$$
$$2^n fp.q \quad \text{und} \quad 2^n fr.s.$$

A. $p.q$ und r.

Setzt man den gemeinsamen Factor, abgesehen von seiner Form, zunächst $= c$, so muss erstens für beide Zahlen die Divisorensumme dieselbe und dann auch gleich der Summe beider Zahlen sein, also wenn C die Divisorensumme von c ist

$$C(p+1)(q+1) = C(r+1) \tag{1}$$
$$C(p+1)(q+1) = C(pq+r). \tag{2}$$

Aus (1) erhält man

$$(p+1)(q+1) = (r+1)$$

oder

$$r = (p+1)(q+1) - 1.$$

Setzt man diesen Wert in (2) ein und für pq den Ausdruck $(p+1)(q+1)-p-q-1$, so ist

$$C(p+1)(q+1) = c\{2(p+1)(q+1)-(p+1)-(q+1)\}$$

oder

$$(p+1)(q+1) - \frac{c}{2c-C}(p+1) - \frac{c}{2c-C}(q+1) = 0. \tag{3}$$

Es handelt sich also, wenn die Unbekannten $(p+1)$ und $(q+1)$ durch x und y bezeichnet werden, um die Auflösung der Gleichung

$$xy - \frac{c}{2c-C}x - \frac{c}{2c-C}y = 0,$$

welcher man zu diesem Zwecke die Form

$$(4) \qquad xy - \frac{c}{2c-C}x - \frac{c}{2c-C}y + \frac{c^2}{(2c-C)^2} = \frac{c^2}{(2c-C)^2}$$

giebt, woraus

$$x = \frac{c+g}{2c-C} \quad \text{und} \quad y = \frac{c+h}{2c-C}$$

wenn

$$g.h = c^2.$$

1 ter Fall. $c = 2^n$.

Die Gleichung heisst dann

$$xy - 2^n x - 2^n y + 2^{2n} = 2^{2n},$$

mithin

$$x = 2^n + 2^\alpha, \quad y = 2^n + 2^{2n-\alpha}$$

oder

$$(p+1) = 2^\alpha(2^{n-\alpha}+1)$$
$$(q+1) = 2^n(2^{n-\alpha}+1)$$

α kann hierbei alle Werte von 1 bis $(n-1)$ durchlaufen, ausserdem muss aber $n-\alpha$ eine ungerade Zahl sein, weil sonst für p, q oder r sich die Congruenz $\equiv 0(3)$ ergiebt.

In dieser Formel ist die früher allein bekannte, aber nur als specieller Fall, wenn nämlich $\alpha = n-1$ ist, enthalten; sie giebt übrigens auch sofort die Zahl der möglichen Auflösungen für jedes n, so lange man davon absieht, ob man Primzahlen erhält oder nicht. In ersterem Falle, der ja allein massgebend sein kann, hat man für $n = 2$, 4 und 7 je eine brauchbare Lösung und zwar jedesmal für $\alpha = n-1$. Es sind dies die bisher schon bekannten. Aber für $n = 8$ bekommt man auch eine Lösung, wenn $\alpha = 1$ ist.

Dann ist

$$p = (2^7+1).2-1, \quad q = (2^7+1).2^8-1, \quad r = (2^7+1)^2.2^9-1$$

und das Zahlenpaar heisst

256(257.33023) und 256(8520191)

oder

2172649216 und 2181168896.

Ueber $n = 8$ hinaus mögen auch noch passende Werte zu finden sein, da ja auch die Gesammtzahl der Auflösungen überhaupt mit n wächst, aber vorläufig muss das Resultat genügen, dass bis zur achten Potenz von 2 einschliesslich die Anzahl aller möglichen brauchbaren Werte vier ist.

2ter Fall. $c = f$.

Wie schon angegeben, bedeutet f ein Product von ungeraden Zahlen. Man hat bei der Auswahl nur darauf zu sehen, dass sie in solchem Zusammenhange zu einander stehen, dass $\frac{f}{2f-F}$ eine einfache Form erhält.

Die Gleichung heisst also

$$xy = \frac{f}{2f-F}x - \frac{f}{2f-F}y + \frac{f^2}{(2f-F)^2} = \frac{f^2}{(2f-F)^2}$$

und es ist

$$x = \frac{f+g}{2f-F}, \quad y = \frac{f+h}{2f-F},$$

wobei

$$g.h = f^2 \quad \text{ist.}$$

Beispiel: $f = 3^2.7^2.13.19.23$.

$$\frac{f}{2f-F} = \frac{3^2.7^2.13.19.23}{2.3^2.7^2.13.19.23 - 13.57.14.20.24} = \frac{161}{2}$$

Die Gleichung heisst demnach

$$xy - \frac{161}{2}x - \frac{161}{2}y = 0$$

und es ist

$$x = p+1 = \frac{161+7}{2} = 84$$

$$y = q+1 = \frac{161+3703}{2} = 1932$$

$$xy = r+1 = 162288$$

23 und 3703 sind die Factoren $(7.23)^2$.

Das Zahlenpaar heisst also

$3^2.7^2.13.19.23(83.1931)$ und $3^2.7^2.13.19.23(162287)$.

Um geeignete Zahlen für f zu finden, dient folgendes Verfahren. Ist etwa $f = 9.49$, so ist

$$\frac{f}{2f-F} = \frac{9.49}{2.9.49 - 13.57}.$$

Um den Factor 13 in F fortzuschaffen, setze ich 13 als Factor in f, so dass jetzt

$$\frac{f}{2f-F} = \frac{9.49.13}{2.9.49.13 - 13.57.14}$$

ist, ebenso füge ich wegen der Zahl 57 im Nenner in f noch den Factor 19 ein und habe

$$\frac{f}{2f-F} = \frac{9.49.13.19}{2.9.49.13.19 - 13.57.14.20} = \frac{21}{42-40}$$

Mit diesem Werte für f erhält man keine Primzahl für r; fügt man jedoch noch den Factor 23 hinzu, so ist

$$\frac{f}{2f-F} = \frac{7.23}{2}$$

und liefert das obige Zahlenpaar.

Auf dem Wege der Zerlegung einer Factorensumme würde man wol schwerlich so einfach zum Ziele gelangt sein.

Aehnliche Paare sind:

9.49.13.97(5.193) und 9.49.13.97(1163)
9.5.7(53.1889) und 9.5.7(102059)
9.49.13.11(41.461) und 9.49.13.11(19403).

Euler hat folgende angegeben:

9.7.13(5.17) und 9.7.13(107)
9.49.13(5.41) und 9.49.13(251).

3ter Fall. $c = 2^n f$.

Setzt man hier $f = 3.2^{n+1} - 1$, insofern dies eine Primzahl ist, so hat man

$$\frac{f}{2f-F} = \frac{3.2^{n+1}-1}{2^2},$$

nachdem gekürzt ist.

Für $n = 2$ und demnach $f = 23$ heisst die Gleichung

$$xy - \frac{23}{4}x - \frac{23}{4}y = 0$$

$$x = p + 1 = \frac{23+1}{4} = 6$$

$$y = q + 1 = \frac{23+529}{4} = 138$$

$$xy = r + 1 = 828.$$

Für 529 sind die Factoren von $(23)^2$.

Die Zahlen sind also

$$4.23(5.137) \quad \text{und} \quad 4.23(827).$$

Es mag hierbei bemerkt werden, dass für die höheren Potenzen von 2 sich hier oder dort keine Primzahlen herausstellen.

B. pq und rs.

Setzt man auch hier als gemeinsamen Factor c, so hat man folgende Bedingungsgleichungen:

$$C(p+1)(q+1) = C(r+1)(s+1) \tag{1}$$

$$C(p+1)(q+1) = c(pq+rs). \tag{2}$$

Aus (1) ergiebt sich

$$(p+1)(q+1) = (r+1)(s+1).$$

Um zunächst nur die Primzahlen p und q beizubehalten, setze man

$$\frac{p+1}{r+1} = \frac{a}{b} = \frac{s+1}{q+1} \tag{3}$$

Dann ist

$$r+1 = \frac{b}{a}(p+1) \tag{4}$$

$$s+1 = \frac{a}{b}(q+1)$$

Die rechte Seite von (2) lässt sich schreiben

$$C\{(p+1)(q+1)+(r+1)(s+1)-(p+1)-(q+1)-(r+1) \\ -(s+1)+2\}$$

und wenn man aus (4) die Werte für $(r+1)$ und $(s+1)$ einsetzt

$$c\{2(p+1)(q+1)-\left(1+\frac{b}{a}\right)(p+1)-\left(1+\frac{a}{b}\right)(q+1)+2\}$$

Demgemäss wird dann (2) so geformt werden können

$$(p+1)(q+1)-\frac{a+b}{a}\frac{c}{2c-C}(p+1)-\frac{a+b}{b}\frac{c}{2c-C}(q+1) \\ = -\frac{2c}{2c-C}$$

und ersetzt man $(p+1)$ und $(q+1)$ durch x resp. y, so ist

$$xy-\frac{a+b}{a}\frac{c}{2c-C}x-\frac{a+b}{b}\frac{c}{2c-C}y = -\frac{2c}{2c-C}$$

Addirt man beiderseits das Product aus den Coefficienten von x und y, so ist

$$(5)\quad xy - \frac{a+b}{a}\,\frac{c}{2c-C}\,x - \frac{a+b}{b}\,\frac{c}{2c-C}\,y + \frac{(a+b)^2}{ab}\,\frac{c^2}{(2c-C)^2}$$
$$= \frac{(a+b)^2 . c^2 - 2c(2c-C)ab}{ab(2c-C)^2}$$

und

$$x \text{ oder } p+1 = \frac{(a+b)c+g}{b(2c-C)}$$

$$y \text{ oder } q+1 = \frac{(a+b)c+h}{a(2c-C)},$$

wenn

$$g.h = (a+b)^2 c^2 - 2c(2c-C)ab$$
$$= C\{c(a+b)^2 - 2ab(2c-C)\} \quad \text{ist,}$$

$$r+1 = \frac{b}{a}(p+1)$$

$$s+1 = \frac{a}{b}(q+1)$$

1ter Fall. $c = 2^n$.

Dann ist

$$\frac{c}{2c-C} = 2^n$$

und

$$p+1 = \frac{2^n(a+b)+g}{b}$$

$$q+1 = \frac{2^n(a+b)+h}{a},$$

während

$$g.h = 2^n\{2^n(a+b)^2 - 2ab\} \quad \text{ist oder}$$
$$= 2^{n+1}\{2^{n-1}(a+b)^2 - ab\}.$$

Zur Auswertung bilde man sich nun nachstehendes Schema.

$2^{n-1}(a+b)^2$ $\qquad\qquad$ $2^{n-1}(a+b)^2 - ab$

$a+b$ $\quad \frac{a}{b} =$ $\qquad\qquad$ 2^{n+1}

$2^n(a+b)$

Für $a+b$ kann man zunächst etwa die Zahlen von 4 bis 20 nehmen, so dass beispielsweise für $a+b=12$ der Bruch $\frac{a}{b}$ die Werte $1/11$, $5/7$ haben kann, und $ab = 1.11$ resp. 5.7 ist. Für n setze man 2, 3, 4 u. s. w.

Ein Zahlenbeispiel mag zur Erläuterung dienen. $n = 5$

$$16(7)^2 = 784 \qquad 16(7)^2 - =$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{6} \qquad 778 = 2.389$$

$$\underset{7}{(a+b)} = \qquad 64.$$

$$\frac{2}{5} \qquad 774 = 2.3^2.43$$

$$\frac{3}{4} \qquad 772 = 2^2.139$$

$$32(7) = 224$$

Dann ist für

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{6}$$

$$p+1 = \frac{224+4}{6} = 38$$

$$q+1 = \frac{224+12448}{1} = 12672$$

$$r+1 = \tfrac{6}{1}(38) = 228$$

$$s+1 = \tfrac{1}{6}(12672) = 2112.$$

Die Zahlen sind

$$32.37.12671 \quad \text{und} \quad 32.227.2111.$$

Für

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$$

$$p+1 = \frac{224+16}{4} = 60$$

$$q+1 = \frac{224+3088}{3} = 1104$$

$$r+1 = \tfrac{4}{3}(60) = 80$$

$$s+1 = \tfrac{3}{4}(1104) = 828.$$

Die Zahlen sind

$$32.59.1103 \quad \text{und} \quad 32.79.827.$$

Weitere Zahlenpaare, die innerhalb der angegebenen Grenzen stehen, sind

4.5.131 und 4.43.17
4.5.251 und 4.107.13
8.17.79 und 8.59.23
16.47.89 und 16.53.79
16.23.479 und 16.127.89
16.23.467 und 16.107.103
16.23.1367 und 16.607.53
16.19.1439 und 16.191.149
64.139.863 und 64.719.167
64.79.11087 und 64.2309.383 $\left(\frac{a}{b} = \frac{5}{24}\right)$
256.383.9203 und 256.3067.1151.

2ter Fall. $c = 2^n.f.$

Man hat dann

$$\frac{c}{2c - C} = \frac{2^n f}{2^{n+1}f - (2^{n-1} - 1)F}$$

und die Gleichung ist

$$xy - \frac{a+b}{a} \cdot \frac{2^n f}{2^{n+1}f - (2^{n+1} - 1)F} x - \frac{a+b}{b} \cdot \frac{2^n f}{2^{n+1}f - (2^{n+1} - 1)F} y$$
$$= - \frac{2^{n+1}f}{2^{n+1}f - (2^{n+1} - 1)F}$$

Ist nun f eine einzige Primzahl, also $F = f + 1$, so vereinfacht sie sich in

$$xy - \frac{a+b}{a} \frac{2^n f}{f - (2^{n+1} - 1)} x - \frac{a+b}{b} \frac{2^n f}{f - (2^{n+1} - 1)} y$$
$$= - \frac{2^{n+1} f}{f - (2^{n+1} - 1)}$$

Addirt man beiderseits das Product aus den Coefficienten von x und y, so wird der Ausdruck rechts

$$\frac{2^{n+1}f\{2^{n-1}f(a+b)^2 - ab[f - (2^{n+1})]\}}{ab[f - (2^{n+1} - 1)]^2}$$

Nimmt man hier nach Massgabe der anders gearteten Gleichung, nicht wie in dem Parallelfalle unter A den Factor $= 3.2^{n+1} - 1$, sondern $= 3.2^n - 1$, so wird $f - (2^{n+1} - 1) = 2^n$ und es ist

$$xy - \frac{a+b}{a} \cdot fx - \frac{a+b}{b} \cdot fx + \frac{(a+b)^2}{ab} f^2 = \frac{f\{f(a+b)^2 - 2ab\}}{ab}$$

Für $n = 2$ ist

$$f = 3 \, . \, 2^2 - 1 = 11,$$

mithin

$$xy - \frac{a+b}{a} \cdot 11x - \frac{a+b}{b} \cdot 11x + \frac{(a+b)^2 \, . \, 11^2}{ab} = \frac{11 \{11(a+b)^2 - 2ab\}}{ab}$$

Um ein Beispiel zu geben, so sei

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{6}.$$

Unter dieser Voraussetzung ist der Zähler rechts

$$11 \, . \, 527 = 11 \, . \, 17 \, . \, 31$$

und

$$p + 1 = \frac{77 + 31}{6} = 18$$

$$q + 1 = \frac{77 + 187}{1} = 264$$

$$r + 1 = \tfrac{6}{1} \, . \, 18 = 108$$

$$s + 1 = \tfrac{1}{6} \, . \, 264 = 44$$

Die Zahlen sind

$$2^2 \, . \, 11 \, . \, 17 \, . \, 263 \quad \text{und} \quad 2^2 \, . \, 11 \, . \, 107 \, . \, 43.$$

Es bliebe hiernach noch der eine, in obiger Zusammenstellung nicht erwähnte Fall zu erörtern, in welchem der gemeinsamen Factoren mehrere sind, mit Ausschluss jedoch von 2^n.

Indes mag dieser vorläufig zurückgestellt bleiben; seine Behandlung ist analog derjenigen unter A. 2ter Fall.

Für die zweite Hauptform

$$c\,p\,q \quad \text{und} \quad c\,r\,s$$

bedarf es dann noch, um zum vollständigen Abschluss zu kommen, der näheren Bestimmung über die Verhältnisszahl $\frac{a}{b}$, welche ich bei dieser eingeführt habe. Als Resultat hatte sich für den Fall, der hier zunächst erörtert werden soll, dass $c = 2^n$ ist, dem übrigens der andere leicht nachgebildet werden kann, ergeben

$$(1) \qquad \frac{2^n(a+b)+g}{b} = p + 1$$

$$(2) \qquad \frac{2^n(a+b)+h}{a} = q + 1$$

$$(3) \qquad \frac{2^n(a+b)+g}{a} = r+1$$

$$(4) \qquad \frac{2^n(a+b)+h}{b} = s+1$$

$$(5) \qquad \begin{aligned} g.h &= 2^{n+1}\{2^{n-1}(a+b)^2 - ab\} \\ &= 2^{2n}a^2 + 2^{n+1}(2^n-1)ab + 2^{2n}b^2 \end{aligned}$$

Aus (1) folgt

$$g = b\{(p+1) - 2^n\} - 2^n a$$

Dividirt man den zweiten Ausdruck in (5) hierdurch, indem man bei der Division b als Hauptgrösse behandelt, so muss $(p+1)-2^n$ in 2^{2n} aufgehen, also $(p+1) = 2^n + 2^\alpha$ sein.

Hier sind nun zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder ist $\alpha \leqq n$ oder $> n$ und $\leqq 2n$.

1) $\alpha \leqq n$.

$$g = 2^\alpha(b - 2^{n-\alpha}.a)$$

Führt man die Division aus, so ist

$$h = 2^{2(n-\alpha)}\left[2^\alpha b + \{2^n + 2^{\alpha+1-n}(2^n-1)\}a + \frac{\{2^\alpha + 2^{2n-\alpha} + 2(2^n-1)\}a^2}{b - 2^{n-\alpha}a}\right]$$

oder um über $2^{\alpha+1-n}$ in dem Coeff. von a so verfügen zu können, dass er nicht kleiner als 1 wird,

$$(6) \qquad h = 2^{2(n-\alpha)-\beta} \times \left[2^{\alpha+\beta} + \{2^{n+\beta} + 2^{\alpha+\beta+1-n}(2^n-1)\}a + \frac{\{2^\alpha + 2^{2n-\alpha} + 2(2^n-1)\}2^\beta a^2}{b - 2^{n-\alpha}a}\right]$$

Und es wird

$$(7) \qquad 2^n(a+b)+h = \frac{2^{2(n-\alpha)-\beta}b[(2^\alpha + 2^{2\alpha-n})2^\beta b + (2^{\alpha+\beta} + 2^{2\alpha+\beta-n} - 2^{\alpha+\beta+1-n})a]}{b - 2^{n-\alpha}a}$$

Damit h eine ganze Zahl wird, muss in (6) $b - 2^{n-\alpha}a$ in $\{2^\alpha + 2^{n-\alpha} + 2(2^n-1)\}2^\beta$ aufgehen; ferner folgt aus (3), dass a in $2^n(a+b)+g$ oder $(2^n+2^\alpha)b$, und demnach, da a und b selbstverständlich als relative Primzahlen zu gelten haben, in (2^n+2^α) als Factor enthalten sein muss. Diese beiden Bedingungen setzen die zulässigen Werte von a und b für jeden einzelnen Wert von n und p fest.

Beispiel. $n = 4$, $\alpha = 3$.

Dann ist

$$2^n(a+b)+g = 24b$$

$$2^n(a+b)+h = \frac{4b(12b+11a)}{b-2a}$$

$b - 2a$ ist Factor von 70 und a von 24.

	2a=						
b—2a	2	4	6	8	12	16	24
1	3	5	7	9	13	17	25
2	4	6	8	10	14	18	26
5	7	9	11	13	17	21	29
7	9	11	13	15	19	23	31
10	12	14	16	18	22	26	34
14	16	18	20	22	26	30	38
35	37	39	41	43	47	51	59
70	72	74	76	78	82	86	94

	a=						
	1	2	3	4	6	8	12
b=	3	5	7	9	13	17	25
	4	—	8	—	—	—	—
	7	9	11	13	17	21	29
	9	11	13	15	19	23	31
	12	—	16	—	—	—	—
	16	—	20	—	—	—	—
	37	39	41	43	47	51	59
	72	- -	76	—	—	—	—

In dem links stehenden Diagramm sind aus $b - 2a$ und $2a$ durch Addition die Werte von b gebildet; rechts sind die Felder freigelassen, welche bereits vorhandene Brüche in erweiterter Form liefern würden. Uebrigens fallen von den übrigen Nennern gleich eine Anzahl weg, wenn man zunächst auf r prüft, da dieses dann $\equiv 0$ (mod 3 oder 5) sein wird.

$^3/_{13}$ und $^2/_9$, $^3/_{76}$ und $^4/_9$, $^4/_{15}$ liefern passende Paare.

2ter Fall. $\alpha > n \lesseqgtr 2n$.

Dann ist

$$g = 2^n(2^{\alpha-n} - b).$$

Führt man die Division nach a aus, so erhält man

$$h = -2^n a - \{2(2^n-1)+2^\alpha\}b + \frac{[2^n + 2^{\alpha-n}\{2(2^n-1)+2^\alpha\}]b^2}{-a + 2^{\alpha-n}b}$$

Und es wird

$$2^n(a+b)+h = \frac{2b\{(2^{n-1}+2^{\alpha-1})b + (2^{n-1}+2^{\alpha-1}-1)a}{2^{\alpha-n}b - a}$$

$2^{\alpha-n}b - a$ muss in $[2^n + 2^{\alpha-n}\{2(2^n-1)+2^\alpha\}]$, und a wieder in $2^n + 2^\alpha$ aufgehen.

Beispiel. $n = 3$ und $\alpha = 4$ giebt für $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$ ein Paar befreundeter Zahlen, bei welchem also die leitende Primzahl 23 ist.

Will man noch weiter gehen, um sämmtliche Fälle behandelt zu haben, so setze man $p+1=2^\alpha k$ und man hat

$$2^n(a+b)+g=2^\alpha kb,$$

also

$$g=2^\alpha\{-2^{n-\alpha}a+(k-2^{n-\alpha})b\}$$

Um h zu erhalten, gebe man dem Producte gk die Form

$$2^{\alpha+1}\{2^{2n-\alpha-1}a^2+2^{n-\alpha}(2^n-1)ab+2^{2n-\alpha-1}b^2\}$$

und dividire durch g, dann ist

$$(8)\quad h=2\left[\begin{array}{l}-2^{n-1}a-\{(2^n-1)+2^{\alpha-1}(k-2^{n-\alpha})\}b\\ +\dfrac{[2^{2n-\alpha-1}+(k-2^{n-\alpha})\{(2^n-1)+2^{\alpha-1}(k-2^{n-\alpha})\}]b^2}{-2^{n-\alpha}a+(k-2^{n-\alpha})b}\end{array}\right]$$

Der Zähler im Coefficienten von b^2 lässt sich unter Hinzuziehung des ausserhalb der Klammer stehenden Factors 2, was hier der Vollständigkeit wegen geboten ist, in die Form

$$(9)\qquad 2k(2^{\alpha-1}k-1)+2^{n+1-\alpha}$$

bringen, und es muss

$$-2^{n-\alpha}a+(k-2^{n-\alpha})b$$

ein Factor desselben sein. Ausserdem muss a in $2^\alpha kb$, also in $2^\alpha k$ aufgehen. Hierdurch sind denn a und b wieder bestimmt. Addirt man zu h noch $2^n(a+b)$, so ist

$$2^n(a+b)+h=\frac{2^{n-\alpha+1}b\{2^{\alpha-1}kb+(2^{\alpha-1}k-1)a\}}{(k-2^{n-\alpha})b-2^{n-\alpha}a}$$

Diese und die im Eingange festgesetzte Gleichung $2^n(a+b)+g=2^\alpha k.b$ dienen dann zur Bestimmung der vier Primzahlen p, q, r und s.

Was a und b anbelangt, so findet man deren Werte, indem man

$$(k-2^{n-\alpha})b-2^{n-\alpha}a$$

nach einander $=1$ und $=$ jedem Factor des Ausdruckes in (9) setzt, die Gleichungen auflöst und die Werte von a auswählt, welche Divisoren von $2^\alpha k$ sind.

Beispiel. $n=6$, $p+1=140$, $\alpha=2$.

$$2^6(a+b)+g=4.35b$$

$$2k(2^{\alpha-1}k-1)+2^{n+1-\alpha}=4862=2.11.13.17.$$

$19b-16a=1$ und $=$ jedem anderen Factor von 4862. Hat man die Versuche auf Primzahlen angestellt, so ergeben sich passende Werte aus

$$19b - 16a = 34$$
$$a = 5 + 19m$$
$$b = 6 + 16m$$

Von den möglichen Werten für a ist $a = 5$ Divisor von 140, demnach $k = 0$ und das zugehörige $b = 6$

$$2^n(a+b) + g = 840$$
$$2^n(a+b) + h = \frac{32.6.765}{34} = 4320$$

Dividirt man die erste Zahl durch 6, die zweite durch 5 und wieder die erste durch 5 und die zweite durch 6, so ist

$$p = 139$$
$$q = 863$$
$$r = 167$$
$$s = 719$$

Darf ich am Schlusse das Ergebniss zusammenstellen, so ist die Bestimmung der befreundeten Zahlen für die erste Hauptform auf die Auflösung von Gleichungen der Form

$$xy + \gamma x + \delta y + \varepsilon = 0$$

und für die zweite Hauptform auf die Zerlegung des Ausdrucks

$$\gamma x^2 + \delta xy + \varepsilon y^2$$

zurückgeführt.

Anmerkung. Vor ganz kurzer Zeit, nachdem ich die vorliegende Arbeit an die Redaction bereits abgesandt hatte, fand ich unerwarteter Weise in der Théorie des nombres von Legendre, welche mir früher nicht zu Händen gekommen war, dass auch er für die erste Grundform 1 ter Fall: $2^n pq$ und $2^n r$ auf die erweiterte Formel, auf ähnlichem Wege gekommen ist. (Das Beispiel: $2^8 . 257 . 33023$ und $2^8 . 8520191$ hat auch er, lässt aber die Entscheidung in der Schwebe). Hierauf beschränkt sich aber seine Untersuchung, und wenn ich also in dieser Beziehung nicht geradezu auf Neuheit Anspruch erheben kann, so glaube ich für sämmtliche übrige Fälle doch hierzu berechtigt zu sein. Was mir sonst bekannt wurde in der Litteratur über diesen Gegenstand, so sind dies, abgesehen von einigen Notizen in Cantor's Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, und in Liouvilles Journal (letzteres, insoweit es die Bekanntschaft der Araber mit den befreundeten Zahlen durch Uebersetzung einer Handschrift bekundet), eine Abhandlung von L. Euler (Opera posthuma 1 Th.), ferner von G. W. Krafft „de numeris amicabilibus" (N. Comm. Petrop. T. II) und endlich dasjenige, was Fr. von Schooten in seinen Exercitationes mathematicae über diesen Stoff bringt.

Bremen, Mai 1883.

VI.

Horizontal rotirende Kette.

Von

R. Hoppe.

---

§. 1. Differentialgleichung.

Die Gleichgewichtsbedingung für Kräfte, die auf eine Kette, d. h. undehnbare Linie, wirken, in der Ebene ist

$$X\partial s + \partial\left(q\frac{\partial x}{\partial s}\right) = 0; \qquad Y\partial s + \partial\left(q\frac{\partial y}{\partial s}\right) = 0$$

wo s den beliebig beginnenden Bogen, X, Y die Componenten der auf den Punkt (xy) wirkenden Kraft, q die Spannung bezeichnen.

Rotirt nun die Kette bei unveränderter ebener Figur mit der Geschwindigkeit c um die x Axe, sind die x vertical nach unten, und wirkt allein die Schwere X auf die Masseneinheit der als homogen gedachten Kette, so kann man die momentane Ebene von s als Ebene der xy und die Centrifugalkraft der Masseneinheit als die Componente Y betrachten. Dann ist

$$X = g; \quad Y = c^2 y$$

und die Gleichungen werden:

$$g + \frac{\partial}{\partial s}\left(q\frac{\partial x}{\partial s}\right) = 0; \quad c^2 y + \frac{\partial}{\partial s}\left(q\frac{\partial y}{\partial s}\right) = 0$$

Die erste integrirt gibt:

$$q\frac{\partial x}{\partial s} = g(l - s)$$

daher nach Elimination von q:

$$\frac{c^2}{g}y - \frac{\partial y}{\partial x} + (l-s)\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{2}$$

Sei zur Transformation

$$\frac{\partial y}{\partial x} = u; \qquad l - s = \frac{g}{c^2 r}$$

dann wird

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{c^2 r^2}{g}\frac{\partial u}{\partial r}\sqrt{1+u^2}$$

und Gl. (2) geht über in

$$\frac{c^2 y}{g} - u + r\frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

und nach Differentiation und einigen Reductionen in

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^2} = \left(\frac{\partial r}{r\,\partial u}\right)^3 \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \tag{3}$$

Dies möchte wol die einfachste Form der Gleichgewichtsgleichung sein.

Ist das untere Ende der Kette frei, so ist daselbst $q = 0$; folglich bedeutet nach Gl. (1) l den Wert von s am untern Ende, wir können sagen die Länge der Kette.

§. 2. Approximative Integration.

Ist die Abweichung der Kette von der Verticale so gering, dass man höhere Potenzen von $\frac{\partial y}{\partial x}$ vernachlässigen kann, so ist es gestattet $\frac{\partial x}{\partial s} = 1$ und x statt s zu setzen. Gl. (2) geht dann über in

$$\frac{c^2}{g}y - \frac{\partial y}{\partial x} + (l-x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{4}$$

Das vollständige Integral dieser linearen Gleichung lässt sich nach bekannten Methoden finden und in folgender Form darstellen:

$$y = A\int_0^{R}\left\{\frac{e^{-2r\,\mathrm{tg}\,\vartheta}\sin a}{\cos\vartheta} - \cos(2r\sin\vartheta - a)\right\}\partial\vartheta \tag{5}$$

$$r = c\sqrt{\frac{l-x}{g}}$$

Führt man, um es zu prüfen, v statt x in Gl. (4) als Unabhängige ein, so kommt:

$$4y + \frac{1}{v}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0 \tag{6}$$

und nach Einsetzung des Wertes (5) wird unmittelbar die linke Seite

$$= 4A\int_0^R \left\{ \frac{e^{-2v\,\mathrm{tg}\,\vartheta}\sin a}{\cos^3\vartheta} - \cos^2\vartheta\cos(2v\sin\vartheta - a) \right\}\partial\vartheta$$

$$- \frac{2A}{v}\int_0^R \left\{ \mathrm{tg}\,\vartheta\,\frac{e^{-2v\,\mathrm{tg}\,\vartheta}\sin a}{\cos\vartheta} - \sin\vartheta\sin(2v\sin\vartheta - a) \right\}\partial\vartheta$$

Stellt man das letztere Integral in der Form dar

$$\int \left\{ e^{-2v\,\mathrm{tg}\,\vartheta}\sin a\,\partial\frac{1}{\cos\vartheta} + \sin(2v\sin\vartheta - a)\,\partial\cos\vartheta \right\}$$

und vollzieht die angedeutete teilweise Integration, so geht, während der integrirte Teil an beiden Grenzen verschwindet, der Subtrahend in den Minuenden über, und die Gleichung ist erfüllt.

Sind nun beide Enden der Kette in ihrer Ebene fest, so bestimmen sich die 2 Integrationsconstanten A und a durch die 2 gegebenen Endwerte von y. Wir wollen jedoch nur den Fall betrachten, wo das obere Ende fest, das untere frei ist. Es fragt sich, welche Bestimmung dann ausser der einen gegebenen Ordinate noch vorhanden ist.

Aus Gl. (1), welche jetzt lautet

$$q = g(l - x)$$

geht hervor, dass am freien Ende $x = l$, also $v = 0$ sein muss. Bei verschwindendem v wird aber der erste Teil des Integrals unendlich gross. Folglich muss dieser wegfallen, indem man $a = 0$ setzt, und man hat für den Fall eines freien Endes stets nur:

$$y = A\int_0^R \cos(2v\sin\vartheta)\partial\vartheta$$

Setzt man $v = 0$, so erhält man für die Ordinate des freien Endes:

$$y_1 = AR$$

Ist am obern Ende $x = 0$, $y = y_0$, so hat man:

$$y_0 = A\int_0^{R}\cos(2b\sin\vartheta)\partial\vartheta$$

$$b = c\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{also}$$

$$v = b\sqrt{1-\frac{x}{l}}$$

Demnach ist y_1 und dadurch A bestimmt durch

$$y_0 = \frac{y_1}{R}\int_0^{R}\cos(2b\sin\vartheta)\partial\vartheta$$

hieraus wieder

$$y = \frac{y_1}{R}\int_0^{R}\cos(2v\sin\vartheta)\partial\vartheta \tag{7}$$

Eine Eigentümlichkeit zeigt der Fall, wo das obere Ende in der Rotationsaxe fest ist, also y_0 den Wort 0 hat. Hier würde auch y_1, folglich y durchgängig null sein, wenn nicht

$$\int_0^{R}\cos(2b\sin\vartheta)\partial\vartheta = 0 \tag{8}$$

ist. Diese Grösse nimmt, wenn b von 0 an bis R wächst, und noch darüber hinaus beständig ab, und zwar ist b der Rotationsgeschwindigkeit proportional. Wächst also die Rotationsgeschwindigkeit von 0 an, so ist anfänglich beständig $y = 0$, d. h. die verticale Gleichgewichtslage stabil. Im Augenblicke aber, wo b der Gl. (8) genügt, ist plötzlich y_1 wilkürlich, die Elongation der Kette kann jede beliebige sein, hängt mithin nicht von der Rotationsgeschwindigkeit ab.

Dieser Umstand erklärt sich durch die Vernachlässigung der kleinen Grössen 2. Ordnung. Unter Annahme eines constanten c ergab sich ein beliebig variirendes y_1, welches jedoch der Basis der Rechnung gemäss klein bleiben muss, also umgekehrt: einer kleinen Veränderung von y_1 entspricht ein nicht merklich verändertes c, dessen Veränderung demnach klein von höherer Ordnung ist.

Die numerische Bestimmung der Stabilitätsgrenze durch Auflösung der transcendenten Gl. (8) ist nicht schwer, da sich das Integral in folgende stark convergirende Reihe entwickeln lässt:

$$\frac{1}{R}\int_0^{R}\cos(2b\sin\vartheta)\partial\vartheta = \sum^{k=\infty}\frac{(-1)^k b^{2k}}{k!^2} \tag{9}$$

Es verschwindet für

$$b^2 = 1{,}4457963$$

Diese Zahl hat dann die Bedeutung, dass, solange die Rotationsgeschwindigkeit den Wert

$$c = b\sqrt{\frac{g}{l}}$$

nicht übersteigt, die Centrifugalkraft bei keiner positiven Elongation hinreicht eine permanente Rotation der Kette um die Verticale zu erhalten. Dagegen darf c diese Grenze nur äusserst wenig überschreiten, wenn die Rechnung nicht wegen einer zu grossen Elongation ungültig werden soll.

Die Gestalt der Kette für unendlich kleine Elongation y_1 stellt folgende Tabelle dar:

$\frac{x}{l}$	$\frac{y}{y_1}$	$\frac{x}{l}$	$\frac{y}{y_1}$
0	0	0,5	0,39771
0,1	0,06560	0,6	0,49981
0,2	0,13780	0,7	0,61109
0,3	0,21696	0,8	0,73108
0,4	0,30347	0,9	0,86056
		1	1

Da zur Ermittelung der Relation zwischen y_1 und c höhere Potenzen von $\frac{\partial y}{\partial x}$ in Rechnung gezogen werden müssen, so wollen wir Gl. (2) so schreiben:

$$\frac{c^2}{g} y - \frac{\partial y}{\partial x} + (l-x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y_1 \chi(x) \tag{10}$$

dann ist

$$y_1 \chi(x) = \left\{ l - x + (s-l)\frac{\partial x}{\partial s} \right\} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Die Grösse in der Klammer ist klein von der Ordnung y_1^2. Man kann daher auf der Rechten von Gl. (10) den angenäherten Wert von y, nämlich

$$y = y_1 \varphi(x)$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \frac{b^{2k}\left(1 - \frac{x}{l}\right)^k}{k!^2}$$

einführen. Setzt man überdies

$$\varphi'^2(x) = \psi'(x)$$

so erhält man bis auf 2. Potenz von y_1:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 1 - \frac{y_1^2}{2}\psi'(x)$$

$$s = x + \frac{y_1^2}{2}\psi(x)$$

wo $\psi(x)$ mit x verschwindet, daher:

$$\chi(x) = \frac{y_1^2}{2}\{\psi(x) + (l-x)\psi'(x)\}\varphi''(x)$$

Setzt man nun

$$y = y_1\varphi(x)(A + \int u\,\partial x)$$

so geht Gl. (10) über in

$$(l-x)\varphi(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \{2(l-x)\varphi'(x) - \varphi(x)\}u = \chi(x)$$

und gibt integrirt:

$$u = \frac{1}{(l-x)\varphi'^2(x)}\int\frac{\chi(x)\varphi'^2(x)\partial x}{\varphi(x)}$$

Der corrigirte Wert lautet demnach, da $A = 1$ sein muss:

$$y = y_1\varphi(x)\left\{1 + \frac{y_1^2}{4}\int\frac{\partial x}{(l-x)\psi'(x)}\int\frac{\psi(x)+(l-x)\psi'(x)}{\varphi(x)}\psi''(x)\,\partial\varphi(x)\right\}$$

Der Wert von $\psi(x)$ lässt sich in einfacher Reihensumme darstellen; es ist nämlich

$$\varphi'^2(x) = \psi'(x) = \frac{2b^4}{l^2}\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)!\,b^{2k}\left(1-\frac{x}{l}\right)^k}{k!^2(k+1)!(k+2)!}$$

woraus:

$$\psi(x) = \frac{2b^2}{l}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-1)^k(2k-1)!\,b^{2k}\left[\left(1-\frac{x}{l}\right)^k - 1\right]}{(k-1)!\,k!^2(k+1)!}$$

Nach erster Integration muss die Constante so bestimmt werden, dass das Integral den Factor $l-x$ hat, weil dies Bedingung der Stetigkeit ist.

Ehe wir indes Anwendung von diesem Resultat machen können, würden noch manche Untersuchungen nötig sein, was ich für jetzt unterlasse.



VII.

Ueber Tiefgrössen mit gebrochenem Index.

Von

Herrn **P. Lindner**,

Gymnasiallehrer in Cöslin.

Der Gebrauch der Tiefgrössen scheint mir in mancher Hinsicht vorzuziehen den der analytischen Facultäten, die mit ihnen in nahem Zusammenhang stehen. Zunächst ist ja das Zeichen m_n für die Tiefgrössen bequemer, als alle die für analytische Facultäten eingeführten Bezeichnungen, und besitzt doch denselben Grad von Allgemeinheit, wie diese. Die Gesetze ferner, welche Tiefgrössen befolgen sind einfacher und symmetrischer, als die, welchen die analytischen Facultäten gehorchen. Zudem sind die Grundlagen, auf die sich die älteren Theorien der analytischen Facultäten stützen, anerkanntermassen vielfach unsicher, die an die Spitze gestellten Definitionen sind teils zu allgemein, teils zu eng, oder eine solche wird sogar ganz vermisst. Es sei mir daher gestattet, zunächst einen Weg anzugeben, auf dem man in ganz einfacher und natürlicher Weise zu einer allgemeinen Definition der Tiefgrössen mit gebrochenem Index gelangt, und dann eine Anzahl von Formeln zu entwickeln, die bisher wohl noch nicht für Tiefgrössen mit gebrochenem Index bewiesen worden sind.

Wenn m, n, p ganze positive, a, b, c, x, y, z aber beliebig gebrochene Zahlen bedeuten, wenn ferner

$$x_n = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}{1.2.3\dots n}$$

als Tiefgrösse mit dem Argument x und dem Index n bezeichnet wird, so ist bekanntlich

$$x_n = (x-n+n)_n = n_0(x-n)_0 + n_1(x-n)_1 + n_2(x-n)_2 + \ldots$$

eine Reihe, die mit dem $(n+1)$ten Gliede abbricht. Lassen wir nun den Index eine gebrochene Zahl sein, so nimmt die Reihe die Gestalt:

$$1 + \frac{-a}{1} \cdot \frac{a-x}{1} + \frac{(-a)(-a+1)}{1.2} \cdot \frac{(a-x)(a-x+1)}{1.2} + \ldots$$

einer Gauss'schen hypergeometrischen Reihe an, deren Wert, wenn $x+1 > 0$,

$$F(-a,\ a-x,\ 1,\ 1) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(x-a+1)} \text{ ist.}$$

Die letztgenannte Grösse behält noch Sinn, wenn $x+1 < 0$, ja auch, wenn x und a complexe Grössen sind. Wir werden somit auf die Definition

$$1) \qquad x_a = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(x-a+1)}$$

geführt. Dieselbe begreift zunächst die Definitions-Gleichung der Tiefgrössen mit positiv ganzzahligem Index als speciellen Fall in sich, da ja in Folge der Darstellung der Γ-Functionen als unendliche Producte $x_a = \prod_1^\infty {}_n \frac{(a+n)(x-a+n)}{n(x+n)}$; sie steht ferner im Einklange mit der Definition der analytischen Facultäten, zu der Herr Weierstrass (Crelle's Journal, Band 51) gelangt; sie verleiht endlich den durch sie bestimmten Grössen Eigenschaften, die teils buchstäblich übereinstimmen mit den analogen der Tiefgrössen von positiv ganzzahligem Index, teils sich herausstellen als einfache Verallgemeinerungen solcher Eigenschaften.

Ich stelle zunächst die bekannten, oder doch unmittelbar aus der Theorie der Γ-Functionen sich ergebenden Hauptformeln zusammen, soweit sie für die nachstfolgenden Beweise benutzt werden sollen:

2) $x_x = 1 = x_0$

3) $x_a = x_{x-a}$

4) $x_{-n} = 0$ der ersten Ordnung, wofern nicht auch x eine negative ganze Zahl, deren absoluter Betrag $\leqq n$ ist.

5) $(-n)_a = \infty$ erster Ordnung, wenn nicht n oder $-(n+a)$ eine positive ganze Zahl ist.

6) $0_a = \dfrac{\sin(a\pi)}{a\pi}$

7) $x_a . a_b = (x-a+b)_b . x_{a-b} = x_b . (x-b)_{a-b}$

8) $x_{a+b}.(a+b)_b = (x-a)_b.x_a$

9) $x_a.(x-a)_b = x_b(x-b)_a$

10) $(x+b)_a.(x+b-a)_b = (x+b)_b.x_a$

11) $(-x)_a = \frac{\sin[\pi(x+a)]}{\sin(\pi x)}.(x+a-1)_a = (x+a)_a.0_{x+a}:0_x$

12) $x_a.a_x = 0_{x-a}$

13) $x_a(-x)_{-a} = 0_a.0_{x-a}:0_x$

14) $x_{-a}(x+a)_a = 0_a$

15) $a_x.0_a = 0_x.(-x)_{-a}$

16) $a_x.0_a = (x-a)_x.0_{x-a} = (x-a)_{-a}.0_{x-a}$

Die Binomialformel für Tiefgrössen lautet:

17) $$(x+y)_a = x_a + y_1 x_{a-1} + y_2 x_{a-2} + \dots$$
$$(x+y+1>0);$$

denn die rechte Seite von 17) ist nach 7):

$$x_a\{1+y_1\frac{a}{x-a+1}+y_2\frac{a(a-1)}{(x-a+1)(x-a+2)}+\dots\} =$$
$$x_a F(-y,\ -a,\ x-a+1,\ 1) =$$
$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(x-a+1)}\cdot\frac{\Gamma(x-a+1)\,\Gamma(x+y+1)}{\Gamma(x+y-a+1)\,\Gamma(x+1)} =$$
$$(x+y)_a.$$

Von den mannigfachen Gestalten, welche die Binomialformel annehmen kann, führe ich hier diejenigen an, die für positiv ganzzahligen Index häufiger vorkommen:

18) $$(2x)_a = x_a + x_1 x_{a-1} + x_2 x_{a-2} + \dots$$
$$(2x+1>0)$$

19) $$(2a)_a = (a_0)^2 + (a_1)^2 + (a_2)^2 + \dots$$
$$(2a+1>0)$$

Dies ist die Verallgemeinerung des bekannten Lagrange'schen Satzes über die Quadraten-Summe der Binomial-Coefficienten. Unter Anderem ergiebt sich aus dieser Formel für $a=\frac{1}{2}$:

20) $$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{25}{16384} + \dots$$

Ferner ergiebt sich aus 17):

21) $$(x-y)_a = x_a - y_1 x_{a-1} + (y+1)_2 x_{a-2} - (y+2)_3 x_{a-3} + \dots$$
$$(x-y+1>0)$$

und hieraus für $y=x$:

22) [illegible]

und zwar für [illegible]

Ersetzen wir [illegible]
Anwendung [illegible]

[illegible]

oder, indem wir [illegible]

23) [illegible]

Speciell für [illegible]

[illegible]

— eine Formel, [illegible]
(Crelle's Journal [illegible]

Ersetzen wir [illegible]
so ergiebt [illegible]

[illegible]

24) [illegible]

— die Verallgemeinerung der häufig vorkommenden Formel.

[illegible]

In ganz ähnlicher Weise ergiebt sich aus 24), wenn wir a durch $x - a - 1$ ersetzen und [illegible] anwenden:

[illegible]

$$25)\quad (a-y)_{x-y}\frac{\sin(\pi x)}{\sin(\pi a)}\,\frac{\sin[\pi(a-y)]}{\sin[\pi(x-y)]} = a_x - y_1(a-1)_x + y_2(a-2)_x - + \dots \quad (y-x>0).$$

Für $y=-1$ geht diese Formel über in die für positiv ganzzahligen Index vielfach benutzte:

$$26)\quad (a+1)_{x+1} = a_x + (a-1)_x + (a-2)_x + \dots \quad (x+1<0)$$

Aus 19) ergiebt sich noch durch die Substitution „$-a$ statt a“:

$$27)\quad a_{2a} = \cos(a\pi)\{1+[(-a)_1]^2+[(-a)_2]^2+\dots\}$$

und durch die Multiplication von 27) und 19) folgt dann nach 7):

$$\operatorname{tg}(a\pi) = a\pi\{1+(a_1)^2+(a_2)^2+\dots\}\{1+[(-a)_1]^2+[(-a)_2]^2+\dots\} \quad (-\tfrac{1}{2}<a<\tfrac{1}{2})$$

Ebenso wie die Binomialformel 17) lassen sich nun alle einfacheren Formeln über Tiefgrössen-Reihen für gebrochenen Index ableiten, so alle die, welche Arndt im 31ten Bande von Crelle's Journal für positiv ganzzahligen Index bewiesen hat. Bei complicirteren Formeln kommt man aber nicht mehr auf eine Reihe von der Form $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$. Trotzdem gelingt es bisweilen, die Summe der Reihe durch Tiefgrössen auszudrücken. Zunächst gelingt es bei der Verallgemeinerung der Formel:

$$x_0 x_{2n} - x_1 x_{2n-1} + x_2 x_{2n-2} - + \dots = (-1)^n x_n,$$

die nur eine andere Form der von Herrn Studnička durch den Quaternionen-Calcul abgeleiteten Formel

$$x_{n-1}\cdot x_{n+1} - x_{n-2}\cdot x_{n+2} + - \dots = (x_n)_2 \quad \text{ist.}$$

Es ergiebt sich für gebrochenen Index:

$$x_0 x_{2a} - x_1 x_{2a-1} + x_2 x_{2a-2} - + \dots =$$

$$x_{2a}\Big\{1 - \frac{-2a}{1}\,\frac{-x}{x-2a+1} + \frac{(-2a)(-2a+1)}{1.2}\,\frac{(-x)(-x+1)}{(x-2a+1)(x-2a+2)} - + \dots\Big\} =$$

$$x_{2a}F(-2a, -x, x-2a+1, -1) =$$

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(2a+1)\,\Gamma(x-2a+1)}\cdot\frac{2^{2a}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(x-2a+1)}{\Gamma(x-a+1)\,\Gamma(\frac{1}{2}-a)}$$

nach Formel 1. des § 23 in der Abhandlung des Herrn Kummer über

die hypergeometrische Reihe (Crelle Bd. 15. S. 134). Es ist aber nach dem Gauss'schen Fundamentalsatze:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}-a)=\frac{\pi}{\cos(a\pi)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}+a)}=\frac{\pi\,\Gamma(a)}{\cos(a\pi)\,(2\pi)^{\frac{1}{2}}2^{-2a+\frac{1}{2}}\Gamma(2a)},$$

also erhalten wir die durch ihre Einfachheit überraschende Formel:

$$28)\qquad \cos(a\pi)\,x_a = x_0\,.\,x_{2a}-x_1x_{2a-1}+x_2x_{2a-2}-+\dots$$

die, wenn wir x durch a und a durch $\frac{a}{2}$ ersetzen, übergeht in

$$29)\qquad \cos\left(\frac{a}{2}\pi\right).\,a_{\frac{a}{2}}=(a_0)^2-(a_1)^2+(a_2)^2-+\dots$$

Schliesslich soll die leicht zu beweisende Formel

$$1+x_1(-x)_1+x_2(-x)_2+\dots x_n(-x)_n=(x-1)_n(-x-1)_n$$

verallgemeinert werden: wir erhalten für beliebigen Index

$$x_a(-x)_a+x_{a-1}(-x)_{a-1}+\dots=$$

$$x_a(-x)_a\{1+\frac{x_{a-1}}{x_a}\cdot\frac{(-x)_{a-1}}{(-x)_a}+\frac{x_{a-2}}{x_a}\cdot\frac{(-x)_{a-2}}{(-x)_a}+\dots\}=$$

$$x_a(-x)_a\{1+\frac{-a}{x-a+1}\cdot\frac{-a}{-x-a+1}$$

$$+\frac{(-a)(-a+1)}{(x-a+1)\,(x-a+2)}\cdot\frac{(-a)(-a+1)}{(-x-a+1)(-x-a+2)}+\dots\}$$

Die in der Klammer stehende Reihe ist nicht mehr eine specielle hypergeometrische, sondern eine Reihe von der Art, wie sie Herr Kummer am Ende der schon genannten Abhandlung (S. 172) erwähnt. Ihr Wert ist

$$\frac{(-a-x)\,(x-a)}{(-x).(-x)}\left\{\frac{\Gamma(x-a)\Gamma(-x-a)}{\Gamma(-a)\Gamma(-a)}-1\right\}=$$

$$=\frac{\Gamma(x-a+1)\;\Gamma(-x-a+1)}{x^2\Gamma(-a)\Gamma(-a)}+\frac{(x-a)(-x-a)}{x(-x)},$$

also erhalten wir:

$$30)\quad x_a(-x)_a+x_{a-1}(-x)_{a-1}+\dots=\frac{\sin^2(a\pi)}{\pi x\sin(\pi x)}+(x-1)_a(-x-1)_a$$

Wie im Allgemeinen, so hängt auch bei den Tiefgrössen mit dem Additions-Theorem die Differentiationsformel zusammen; auf dem gewöhnlichen Wege erhalten wir aus 18):

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{(x+\Delta x)_a - x_a}{\Delta x} =$$

31) $$\frac{dx_a}{dx} = x_{a-1} - \tfrac{1}{2} x_{a-1} + \tfrac{1}{3} x_{a-2} - + \dots$$
$$(x+1 > 0)$$

eine Reihe, die für $a = m$ natürlich mit dem $m$ten Gliede abbricht und dann unbeschränkte Gültigkeit hat. Durch nochmalige Differentiation ergiebt sich:

32) $$\frac{d^2 x_a}{dx^2} = x_{a-2} - x_{a-3} + \frac{11}{12} x_{a-4} - \frac{5}{6} x_{a-5} + \frac{137}{180} x_{a-6} - \frac{7}{10} x_{a-7} + - \dots$$
$$x+1 > 0$$

Es zeigt sich hierbei, dass die Coefficienten der fallenden Tiefgrössen nicht abhängen von dem Index a der zu differentirenden Tiefgrössen, vielmehr Functionen der Stellenzahl n allein sind. Dasselbe gilt offenbar auch für die höheren Differentialquotienten, also kann man beim $m$ten, der die Form

$$\frac{d^m x_a}{dx^m} = A_0 x_{a-m} + A_1 x_{a-m-1} + A_2 x_{a-m-2} + \dots \text{*)}$$

haben muss, zur Bestimmung der AA sich specieller passender Werte des Index bedienen. Es ergiebt sich durch die Wahl $a = m + n$:

$$A_n = \left(\frac{d^m x_{m+n}}{dx^m}\right)_{x=0}$$

Entwickelt man nun die ganze rationale Function x_{m+n} nach Potenzen von x und bezeichnet dabei den Coefficienten von x^{m+n-p} mit $\frac{(-1)^p C_p^{m+n}}{1.2 \dots m+n}$, so ergiebt sich

$$A_n = \frac{(-1)^n m(m-1) \dots 1 . C_n^{m+n}}{1.2 \dots (m+n)} = \frac{(-1)^n C_n^{m+n}}{(m+1)(m+2) \dots (m+n)}$$

wir erhalten also

33) $$\frac{d^m x_a}{dx^m} = C_0^m x_{a-m} - \frac{C_1^{m+1}}{m+1} x_{a-m-1} + \frac{C_2^{m+2}}{(m+1)(m+2)} x_{a-m-2} - + \dots$$
$$(x+1 < 0)$$

Vermittelst der Formel 31) lässt sich übrigens in sehr einfacher Weise aus der Binomial-Reihe die logarithmische ableiten. Wir erhalten durch Differentiation die Binomial-Reihe:

*) Indices an grossen Buchstaben sollen blosse Stellenzahlen sein.

$$\frac{d(1+y)^z}{dz} = \frac{dz_1}{dz} y + \frac{dz_2}{dz} y^2 + \frac{dz_3}{dz} y^3 + \ldots$$

also, wenn wir 31) für den Fall eines positiv ganzzahligen Index anwenden und dann $z = 0$ setzen:

$$l(1+y) = y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + - \ldots$$
$$(1 = y > 1)$$

Ebenso durch $m$fache Differentiation:

$$\{l(1+y)\}^m = C_0{}^m y^m - \frac{C_1{}^{m+1}}{m+1} y^{m+1} + \frac{C_2{}^{m+2}}{(m+1)(m+2)} y^{m+2} - + \ldots$$
$$(1 = y > -1)$$

wie schon von den Herren Oettinger und Schlömilch im 33. resp. 44. Bande des Crelle'schen Journal's auf andere Arten entwickelt worden ist.

Eine Combination von 15) und 31) liefert nunmehr auch eine Formel über Differentiation von Tiefgrössen nach dem Index: es ist

$$\frac{da_x}{dx} = \frac{1}{0_a}\left\{(-x)_{-a} \cdot \frac{d0_x}{dx} + 0_x \frac{d(-x)_{-a}}{dx}\right\}$$
$$= \frac{0_x}{0_a}\Big\{(-x)_{-a}\left(\pi \operatorname{ctg}(\pi x) - \frac{1}{x}\right)$$
$$-(-x)_{-a-1} + \tfrac{1}{2}(-x)_{-a-2} - \tfrac{1}{3}(-x)_{-a-3} + - \ldots\Big\}$$
$$= a_x\left(\pi \operatorname{cotg}(\pi x) - \frac{1}{x}\right) + \frac{a}{a+1}(a+1)_x$$
$$+ \tfrac{1}{2}\frac{a}{a+2}(a+2)_x + \tfrac{1}{3}\frac{a}{a+3}(a+3)_x + \ldots$$

$$34)\quad \frac{da_x}{dx} = \frac{a}{x}\Big\{(a-1)_{x-1}\left[\pi \operatorname{ctg}(\pi x) - \frac{1}{x}\right]$$
$$+ a_{x-1} + \tfrac{1}{2}(a+1)_{x-1} + \tfrac{1}{3}(a+2)_{x-1} + \ldots\Big\}$$
$$(x < 1)$$

Als specieller Fall ergiebt sich aus dieser Formel, da a_x für $x = \frac{a}{2}$ offenbar ein Maximum hat

$$35)\quad \pi . \operatorname{ctg}\frac{\pi a}{2} = \frac{2}{a} - \frac{2a}{a+2} - \tfrac{1}{2}\frac{2a(2a+2)}{(a+2)(a+4)}$$
$$- \tfrac{1}{3}\frac{2a(2a+2)(2a+4)}{(a+2)(a+4)(a+6)} - \ldots$$
$$(\ldots < 2)$$

Die höheren nach dem Index genommenen Differential-Quotienten der Tiefgrössen befolgen nicht ein einfaches Gesetz, welches analog wäre dem sich bei der Differentiation nach dem Argument ergebenden; vielmehr ist es die Function $\frac{a^{-x}}{0_x} = \frac{x^{-a}}{0_a} = xB(a+1, x)$, deren höhere Differential-Quotienten das analoge Gesetz befolgen.

Den meisten der abgeleiteten Formeln kann man noch dadurch eine andere Gestalt geben, dass man das einfache Argument durch einen Quotienten ersetzt und dann die rationalen Tiefgrössen von der Form $\left(\frac{x}{d}\right)_n$ auf die Gestalt $\frac{x(x-d)(x-2d)\ldots(x-(n-1)d)}{1.2\ldots n} \cdot \frac{1}{d^n}$ bringt.



VIII.

Miscellen.

1.

Mehrfache Collineation von zwei Dreiecken.

Nach dem Desargues'schen Satze, wenn zwei Dreiecke perspectivisch liegen, so liegen sie auch collinear, — d. h. wenn die Verbindungslinien entsprechender Ecken sich in einem Punkte (Centrum der Collineation) schneiden, so liegen die Durchschnittspunkte entsprechender Seiten in einer geraden Linie (Axe der Collineation) — und umgekehrt.

Es fragt sich, ob zwei Dreiecke nicht in mehrfacher Collineation sein können, je nachdem man das gegenseitige Entsprechen der Eckpunkte anders ordnet.

Es seien die Dreiecke abc und 123 in Collineation, wenn a und 1, b und 2, c und 3 als entsprechende Eckpunkte betrachtet werden, — oder symbolisch ausgedrückt seien die Dreiecke abc und 123 in $(a_1 b_2 c_3)$-Collineation.

Es sei das Dreieck abc zum Coordinatendreieck gewählt, und zwar

$$\overline{bc} \text{ sei } x = 0$$
$$\overline{ca} \text{ sei } y = 0$$
$$\overline{ab} \text{ sei } z = 0$$

Die Axe der $(a_1 b_2 c_3)$-Collineation sei zur Einheitslinie des Coordinatensystems gewählt, — d. h. ihre Gleichung sei:

$$x + y + z = 0$$

Dann sind die Gleichungen der Seiten von 123:

$$\overline{23}: \qquad \lambda x + y + z = 0$$
$$\overline{31}: \qquad x + \mu y + z = 0$$
$$\overline{12}: \qquad x + y + \nu z = 0$$

Wenn nun die Dreiecke *abc* und 123 auch in $(a_2 b_3 c_1)$-Collineation sind, so schneiden sich die Geraden

$$\overline{a2}: \qquad (\lambda - 1)y + (\nu\lambda - 1)z = 0$$
$$\overline{b3}: \qquad (\mu - 1)z + (\lambda\mu - 1)x = 0$$
$$\overline{c1}: \qquad (\nu - 1)x + (\mu\nu - 1)y = 0$$

in einem Punkte, es besteht also die Relation:

$$(\lambda-1)(\mu-1)(\nu-1) + (\mu\nu-1)(\nu\lambda-1)(\lambda\mu-1) = 0$$

oder

$$(\lambda\mu\nu - 1)(\lambda\mu\nu - \lambda - \mu - \nu + 2) = 0$$

Es war vorauszusehen, dass $(\lambda\mu\nu - \lambda - \mu - \nu + 2)$ als Factor in der Bedingungsgleichung auftreten wird, denn wenn dieser Factor verschwindet, schneiden sich die Seiten von 123 in einem Punkte, und dann besteht jede mögliche Perspectivität zwischen *abc* und 123. Abgesehen von diesem Falle ist also die Bedingungsgleichung:

$$\lambda\mu\nu - 1 = 0$$

Dann sind aber die Dreiecke auch in $(a_3 b_1 c_2)$-Collineation.

Suchen wir nun die Bedingung für die $(a_1 b_3 c_2)$-Collineation. In diesem Falle schneiden sich die Geraden

$$\overline{a1}: \qquad (\mu-1)y - (\nu-1)z = 0$$
$$\overline{b3}: \qquad (\mu-1)z + (\lambda\mu-1)x = 0$$
$$\overline{c2}: \qquad (\nu-1)y + (\lambda\nu-1)x = 0$$

in einem Punkte, es besteht also die Relation

$$(\lambda\nu-1)(\mu-1)^2 - (\lambda\mu-1)(\nu-1)^2 = (\mu-\nu)(\lambda\mu\nu-\lambda-\mu-\nu+2) = 0$$

abgesehen von dem Falle, wo das Dreieck 123 in einen Punkt zusammenschrumpft, ist also die Bedingung:

$$\mu - \nu = 0$$

Genau so ist die Bedingung der $(a_3 b_2 c_1)$-Collineation:

$$\nu - \lambda = 0$$

und die der $(a_2 b_1 c_3)$-Collineation:

$$\lambda - \mu = 0$$

Die bisherigen zusammengefasst sind die Dreiecke *abc* und 123:

1. in zweifacher Collineation, und zwar

in $(a_1 b_2 c_3)$ und $(a_1 b_3 c_2)$-Collineationen, wenn $\mu - \nu = 0$
in $(a_1 b_2 c_3)$ und $(a_3 b_2 c_1)$-Collineationen, wenn $\nu - \lambda = 0$
in $(a_1 b_2 c_3)$ und $(a_2 b_1 c_3)$-Collineationen, wenn $\lambda - \mu = 0$

2. in dreifacher Collineation, und zwar

in $(a_1 b_2 c_3)$, $(a_2 b_3 c_1)$ und $(a_3 b_1 c_2)$-Collineationen, wenn $\lambda\mu\nu - 1 = 0$ ist.

3. in vierfacher Collineation, und zwar

in $(a_1 b_2 c_3)$, $(a_1 b_3 c_2)$, $(a_3 b_2 c_1)$ und $(a_2 b_1 c_3)$-Collineationen, wenn $\lambda = \mu = \nu$.

Es genügt hier diesen Fall allein vorzuführen, wenn man zur Einheitslinie des Coordinatensystems diejenige Collineationsaxe wählt, deren Symbol durch cyklische Permutation der Indices in kein Symbol vorhandener Collineation übergeht. Diese Axe spielt eine andere Rolle, als die übrigen, darum wollen wir sie als Hauptaxe, das zugehörige Centrum als Hauptcentrum, während die übrigen Axen als Nebenaxen, die zugehörigen Centra als Nebencentra bezeichnen.

4. in sechsfacher Collineation, wenn $\lambda = \mu = \nu$ und $\lambda\mu\nu - 1 = 0$, also $\lambda^3 - 1 = 0$ ist.

Wenn $\lambda = \mu = \nu = 1$ ist, fallen die Seiten von 123 in die eine Linie $x + y + z = 0$ zusammen. Abgesehen von diesem Falle ist also λ eine complexe dritte Einheitswurzel. Dieser Fall hat also nur eine algebraische Existenz.

Es mögen die einzelnen Fälle etwas näher betrachtet werden.

I.

abc und 123 sind in $(a_1 b_2 c_3)$ und $(a_1 b_3 c_2)$-Collineationen, wenn $\mu - \nu = 0$ ist.

Dies hat eine einfache geometrische Bedeutung. In diesem Falle ist nämlich die Gleichung von $\overline{a1}$:

$$y - z = 0$$

sie geht also durch den Pol der Geraden $x + y + z = 0$, in Bezug auf das Dreieck *abc*. Man kann auch umkehren und sagen:

Wenn die Dreiecke abc und 123 in $(a_1b_2c_3)$-Collineation sind und der Pol der Collineationsaxe bezüglich auf das Dreieck abc auf der Geraden $\overline{31}$ liegt, so sind die Dreiecke auch in $(a_3b_1c_2)$-Collineation.

Wenn abc und $\overline{12}$, $\overline{23}$ gegeben sind, kann $\overline{31}$ leicht so construirt werden, dass die Dreiecke abc und 123 in $(a_1b_2c_3)$ und $(a_3b_1c_2)$-Collineationen seien. Die Data bestimmen die Axen, und dann bestimmen der Durchschnittspunkt von ac mit der $(a_1b_2c_3)$-Axe und der Durchschnittspunkt von ab mit der $(a_3b_1c_2)$-Axe die Gerade $\overline{31}$.

II.

abc und 123 sind in $(a_1b_2c_3)$, $(a_3b_1c_2)$ und $(a_2b_3c_1)$-Collineationen, wenn $\lambda\mu\nu - 1 = 0$ ist.

$\overline{23}$: $\lambda x + y + z = 0$ und die $(a_1b_2c_3)$-Axe: $x + y + z = 0$

$\overline{31}$: $x + \mu y + z = 0$ die $(a_3b_1c_2)$-Axe: $\lambda x + \lambda\mu y + z = 0$

$\overline{12}$: $x + y + \nu z = 0$ die $(a_2b_3c_1)$-Axe: $\lambda\mu x + \mu y + z = 0$

Nehmen wir für einen Augenblick die Gerade $\overline{23}$ zur Einheitslinie des Coordinatensystems, d. h. führen wir die Substitutionen

$$\lambda x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1$$

ein. Dann sind

$\overline{23}$: $x_1 + y_1 + z_1 = 0$ und die $(a_1b_2c_3)$-Axe: $\frac{1}{\lambda}x_1 + y_1 + z_1 = 0$

$\overline{31}$: $\frac{1}{\lambda}x_1 + \frac{1}{\lambda\nu}y_1 + z_1 = 0$ die $(a_3b_1c_2)$-Axe: $x_1 + \frac{1}{\nu}y_1 + z_1 = 0$

$\overline{12}$: $\frac{1}{\lambda\nu}x_1 + \frac{1}{\nu}y_1 + z_1 = 0$ die $(a_2b_3c_1)$-Axe: $x_1 + y_1 + \frac{1}{\mu}z_1 = 0$

Das Dreieck der Axen ist also in dreifacher Collineation mit abc, die zugehörigen Axen sind die Seiten von 123. Ebenso sind das Dreieck der Axen und 123 in dreifacher Collineation, — die zugehörigen Axen sind die Seiten von abc.

Dualistisch entsprechend besteht der Satz: Wenn abc und 123 in dreifacher Collineation sind, ist das Dreieck der Collineationscentra sowohl mit abc, als auch mit 123 in dreifacher Collineation; die Centra der Collineationen mit abc sind die Eckp[illegible] 123, — und umgekehrt.

Wenn abc und $\overline{12}$, $\overline{23}$ gegeben sind, kann [illegible] irt werden, dass abc und 123 in $(a_1b_2c_3)$ ur

— genau so, wie im vorigen Falle. Dann sind aber die Dreiecke auch in $(a_3 b_1 c_2)$-Collineation.

III.

abc und 123 sind in $(a_1 b_2 c_3)$, $(a_1 b_3 c_2)$, $(a_3 b_2 c_1)$ und $(a_2 b_1 c_3)$-Collineationen, wenn $\lambda = \mu = \nu$ ist.

$\overline{23}$: $\lambda x + y + z = 0$ und die $(a_1 b_3 c_2)$-Axe: $\frac{1}{\lambda} x + y + z = 0$

$\overline{31}$: $x + \lambda y + z = 0$ die $(a_3 b_2 c_1)$-Axe: $x + \frac{1}{\lambda} y + z = 0$

$\overline{12}$: $x + y + \lambda z = 0$ die $(a_2 b_1 c_3)$-Axe: $x + y + \frac{1}{\lambda} z = 0$

und die $(a_1 b_2 c_3)$-Axe: $x + y + z = 0$

Das Dreieck der Nebenaxen ist also in vierfacher Collineation mit *abc*. Die Hauptaxe ist dieselbe, wie bei den Collineationen von *abc* und 123, die Nebenaxen sind die Seiten von 123.

Die Coordinaten des	$(a_1 b_2 c_3)$-Centrums sind	$1,$	$1,$	1
- - -	$(a_1 b_3 c_2)$- - -	$-\frac{1}{\lambda+1},$	$1,$	1
- - -	$(a_3 b_2 c_1)$- - -	$1,$	$-\frac{1}{\lambda+1},$	1
- - -	$(a_2 b_1 c_3)$- - -	$1,$	$1,$	$-\frac{1}{\lambda+1}$

seien diese Punkte mit *O*, *I*, *II*, *III* bezeichnet.

Das Hauptcentrum (*O*) ist der Pol der Hauptaxe in Bezug auf das Dreieck *abc*. Man kann auch umkehren und sagen:

Wenn *abc* und 123 in $(a_1 b_2 c_3)$-Collineation sind und das Collineationscentrum der Pol der Collineationsaxe ist in Bezug auf das Dreieck *abc*, so sind die Dreiecke auch in $(a_1 b_3 c_2)$, $(a_3 b_2 c_1)$ und $(a_2 b_1 c_3)$-Collineationen.

Die Gerade $\overline{II\ III}$: $-\frac{\lambda}{\lambda+1} x + y + z = 0$

$\overline{III\ I}$: $x - \frac{\lambda}{\lambda+1} y + z = 0$

$\overline{I\ II}$: $x + y - \frac{\lambda}{\lambda+1} z = 0$

Das Dreieck der [illegible]ntra ist also in vierfacher Collineation

Für $\varepsilon = 0$ würde S imaginär, folglich ist $S = 0$.

Die zweite und dritte der Elasticitätsgleichungen ergeben dasselbe Resultat, nur dass ε andern Wert erhält, nämlich:

Damit die an die Spitze gestellten Ausdrücke (7) den Elasticitätsgleichungen genügen, muss notwendig $S = 0$ sein. Damit aber fällt die ganze Arbeit des Herrn Maiss in nichts zusammen; denn alle weiteren Schlüsse werden hinfällig.

A. Wangerin.

IX.

Eigenschaften der Lemniskate und ihre Anwendung auf kubische Gleichungen, parabolische Bewegungen und bipolare Anziehungen.

Von

Emil Oekinghaus.

Unter denjenigen Curven, welche nächst den Kegelschnitten reich sind an vorzüglichen Eigenschaften, ist wohl in erster Linie die Lemniskate zu nennen. Mehrere Eigentümlichkeiten derselben, welche einiger Aufmerksamkeit wert erscheinen, haben wir im Folgenden zusammengestellt; sie beziehen sich auf die Trisection des Winkels und die damit verbundene geometrische Auflösung des casus irreductibilis der kubischen Gleichungen. Ebenso finden im Zusammenhang hiermit die übrigen Fälle ihre geometrisch-trigonometrische Begründung, so dass das Ganze unter einem einheitlichen Gesichtspunkt erscheint.

Ferner erlaubt im Anschluss hieran die Lemniskate vermittelst des Problems der Tangentenziehung eine bemerkenswerte Anwendung auf die parabolische Bewegung der Himmelskörper. Eine weitere Untersuchung zeigt, dass unter der Einwirkung zweier, nach bestimmtem Gesetze wirkender, gleichen und festen Massenpunkte ein dritter eine Lemniskate beschreiben kann. Endlich leiten wir noch den Satz ab, dass die Anziehung einer mit Masse gleichförmig belegten Lemniskate auf jeden ihrer Brennpunkte gleich Null ist, sofern das Newton'sche Gesetz zu Grunde gelegt wird.

§ 1.

In der Ebene einer Lemniskate, deren Polargleichung

1) $$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

ist, sei ein Punkt durch die Polarcoordinaten $R(\varphi)$ gegeben. Eine durch diesen Punkt gehende Gerade, welche im Allgemeinen die Curve in 4 Punkten schneidet, bilde mit R den Winkel δ, während die 4 Abschnitte derselben, vom Punkte $R(\varphi)$ an gerechnet durch x_1, x_2 etc. bezeichnet sein mögen. (Fig. 1.)

Dieselben sind die Wurzeln der leicht abzuleitenden Gleichung

2) $$x^4 - 4R\cos\delta \cdot x^3 + (2R^2 + 4R^2\cos\delta^2 - a^2\cos 2(\varphi - \delta))x^2 - (4R^3\cos\delta - 2a^2 R\cos(2\varphi - \delta))x + R^4 - a^2 R^2 \cos 2\varphi = 0.$$

Die Geminante der biquadratischen Gleichung hat bekanntlich die Form:

3) $$-(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_3)(x_2+x_4)(x_3+x_4) = a^2 d - abc + c^2.$$

Unter der Voraussetzung, dass R die Mitte einer der durch die Secante mit der Lemniskate gebildeten Abschnitte mit O verbindet, oder dass

4) $$x_1 + x_2 = 0$$

ist, geht die auf 2) angewandte Bedingungsgleichung

5) $$a^2 d - abc + c^2 = 0$$

nach einigen Entwickelungen über in die quadratische Gleichung

6) $$R^4 - c^2 \frac{\cos 2(\varphi - \delta)}{\cos\delta^2} R^2 + \frac{c^4}{4\cos\delta^4} \cos(2\varphi - \delta)\cos(2\varphi - 3\delta) = 0.$$

Die Wurzeln derselben sind

7) $$R^2 = \frac{c^2}{2\cos\delta^2}(\cos 2(\varphi - \delta) \pm \sin\delta).$$

Die vom Mittelpunkte der Lemniskate auf die Gerade gefällte Normale h bilde mit der X-Achse den Winkel ψ, dann ist $\varphi - \delta = 90 - \psi$. Wegen $h = R\sin\delta$ geht 7) über in

8) $$R^3 - \left(h^2 - \frac{c^2}{2}\cos 2\psi\right) R + \frac{c^2 h}{2} = 0.$$

Hierin ist $c = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$ die Entfernung der Brennpunkte vom Mittelpunkt der Curve.

Da in der kubischen Gleichung 8) das zweite Glied fehlt, so erhalten wir den Satz, dass die Summe der 3 Mittellinien $R_1 + R_2 + R_3 = 0$ ist, sofern dieselben einander entsprechen. Geht also ein mit der Lemniskate concentrischer Kreis durch die Mitte einer der 6 Sehnen, welche durch eine Gerade mit der Lemniskate gebildet werden, so geht er auch durch die Mitte der ihr entsprechenden zweiten, oder die Mitten zweier entsprechenden Sehnen haben vom Centrum gleichen Abstand. Die Summe der zusammengehörigen Radien $R_1 + R_2$ ist gleich dem dritten $-R_3$.

Für die durch einen Brennpunkt gehende Secante vereinfacht sich die Gleichung 8) zu

$$9) \qquad R^3 - \frac{c^2}{2} R + \frac{hc^2}{2} = 0$$

und kann zur geometrischen Auflösung der kubischen Gleichungen benutzt werden.

Dieselbe ist für die Trisection eines Winkels von Wert.

Ein Kreis P, dessen Mittelpunkt auf der X-Achse liegt, und dessen Peripherie durch O und einen Brennpunkt Q geht, schneidet die Curve in 2 Punkten, deren Radienvectoren r bei der Annahme $a^2 = 2c^2 = 3$ die Einheit sind. Substituiren wir diese Ausdrücke nebst $h = \frac{1}{3} \sin 3\varepsilon$ in 9), so geht dieselbe über in

$$10) \qquad R^3 - \tfrac{3}{4} R + \tfrac{1}{4} \sin 3\varepsilon = 0.$$

Da aber auch

$$11) \qquad \sin \varepsilon^3 - \tfrac{3}{4} \sin \varepsilon + \tfrac{1}{4} \sin 3\varepsilon = 0,$$

so sind die Wurzeln von 10)

$$12) \qquad \begin{aligned} R_1 &= \sin \varepsilon, \\ R_2 &= \sin(60 - \varepsilon), \\ R_3 &= \sin(60 + \varepsilon). \end{aligned}$$

Vermittelst der Lemniskate wird die Trisection des Winkels in folgender Weise gelöst:

Ist der feste Kreis P, der Einheitskreis, dessen Centrum O ist, und endlich der Halbkreis über dem Radiusvector $r = 1$ für alle Fälle construirt, so bestimmt der gegebene Winkel 3ε im Einheitskreise eine Strecke $3h = \sin 3\varepsilon$, deren Drittel h wir als Sehne, von O aus im Kreise P eintragen, die durch den Endpunkt der Sehne und den bezüglichen Brennpunkt Q gezogene Secante liefert die betreffenden Radien nach den Mitten ihrer Abschnitte, welche im Halb-

8*

kreise eingetragen die drei Winkel ε, $60^0-\varepsilon$, $60^0+\varepsilon$ sofort finden lassen.

Diese Methode wird uns von Nutzen sein bei der Auflösung der kubischen Gleichungen mit reellen Wurzeln.

Man bemerke noch die aus 7) hervorgehende Gleichung

$$13)\qquad R^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2\frac{\cos 2\tau\pm\sin\Theta}{\cos\Theta^2}$$

der aus zwei Teilen bestehenden Curve, welche die Sehnen einer Schaar paralleler mit der Achse den Winkel τ einschliessender Geraden halbirt. Für $\tau=\varphi-\Theta=0$ resultirt eine Curve, welche bemerkenswerte Eigenschaften besitzt und zu andern Curven eine gewisse Beziehung hat.

§ 2.

Von einem Punkte der X-Achse der Lemniskaten ziehen wir Tangenten an letztere. Bezeichnen wir allgemein die Polarwinkel der Berührungspunkte mit φ, so ist, wenn die Abscisse jenes Punktes m ist,

$$14)\qquad \frac{r}{m}=\frac{\sin(90^0-3\varphi)}{\cos 2\varphi}\quad\text{oder}$$

$$15)\qquad \frac{a^2}{m^2}=\frac{\cos 3\varphi^2}{\cos 2\varphi^3}$$

Die hieraus leicht zu entwickelnde Gleichung für $\cos 2\varphi$ ist

$$16)\qquad \cos 2\varphi^3-\frac{3}{4\left(1-\frac{c^2}{m^2}\right)}\cos 2\varphi+\frac{1}{4\left(1-\frac{c^2}{m^2}\right)}=0,$$

welche für $\frac{c}{m}=\cos 3\varepsilon$ übergeht in

$$17)\qquad \cos 2\varphi^3-\frac{3}{4\sin 3\varepsilon^2}\cos 2\varphi+\frac{1}{4\sin 3\varepsilon^2}=0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind für $m>c$

$$18)\quad \cos 2\varphi_1=\frac{\sin\varepsilon}{\sin 3\varepsilon},\quad \cos 2\varphi_2=\frac{\sin(60-\varepsilon)}{\sin 3\varepsilon},\quad \cos 2\varphi_3=\frac{\sin(60+\varepsilon)}{\sin 3\varepsilon},$$

und können nach § 1. leicht construirt werden, wodurch die Berührungspunkte der Tangenten bekannt sind.

Wir fällen vom Mittelpunkt O auf diese Tangenten die Senkrechten x_1, x_2, und wollen nachweisen, dass durch diese Normalen (Fig. 1.)

19)
$$x_1 = r_1 \cos 2\varphi_1,$$
$$x_2 = r_2 \cos 2\varphi_2,$$

die Wurzeln der kubischen Gleichung

20)
$$x^3 - px + q = 0,$$

welche in ihrer trigonometrischen Auflösung bekannt sind unter der Form

$$\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p\sqrt{\frac{1}{3}p}},$$

21)
$$x_1 = \sqrt{\tfrac{4}{3}p}\sin\varepsilon \quad \text{etc.},$$

erhalten werden können.

Führt man nämlich 19) in 17) ein, so resultirt

22)
$$x^3 - \frac{3r^2}{4\sin 3\varepsilon^2}x + \frac{r^3}{4\sin 3\varepsilon^2} = 0.$$

Die Identität dieser Gleichung mit 20) verlangt

23)
$$p = \frac{3r^2}{4\sin 3\varepsilon^2}, \qquad q = \frac{r^3}{4\sin 3\varepsilon^2},$$

woraus

24)
$$r = \frac{3q}{p},$$

$$\sin 3\varepsilon = \frac{3q}{p\sqrt{\frac{1}{3}p}},$$

25)
$$x_1 = \sqrt{\tfrac{4}{3}p}\sin\varepsilon,$$
$$x_2 = \sqrt{\tfrac{4}{3}p}\sin(60^0 - \varepsilon),$$

wie oben angegeben.

Der Casus irreductibilis der kubischen Gleichungen kann demnach vermittelst einer Lemniskate in folgender Art geometrisch aufgelöst werden.

Man construire gemäss 21) den Hülfswinkel 3ε als Centriwinkel des durch die beiden Brennpunkte gehenden Focalkreises. Durch den diesem Winkel entsprechenden Kreispunkt ziehen wir gemäss $\frac{c}{m} = \cos 3\varepsilon$ eine Tangente bis zum Durchschnitt mit der X-Achse

und von hier aus 2 Tangenten an die Lemniskate, dann sind die vom Centrum O auf dieselben gefällten Normalen 2 Wurzeln der Gleichung, wie sie in 25) angegeben sind. Das Mass für die Einheit bestimmt sich aus $r_{1,2} = \frac{3q}{p}$

Liegt m zwischen a und c, so existirt nur eine Normale. Ist dagegen $m < c$, so nimmt 16) eine andere Form an. Wir errichten in dem betreffenden Punkte eine Normale bis zum Durchschnitt mit dem Focalkreise und verbinden diesen Schnittpunkt mit O, der von diesen Geraden gebildete Winkel sei $\alpha = 90^0 - 2\varphi$, dann ist

$$26)\qquad \cos 2\psi^3 + \tfrac{3}{4}\operatorname{tg}\alpha^2 . \cos 2\psi - \tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\alpha^2 = 0,$$

und die Normale auf die Tangente ist

$$x = r\cos 2\psi.$$

Wir werden auf diesen Fall nachher wieder zurückkommen.

§ 3.

Um die übrigen Fälle der kubischen Gleichungen mit imaginären Wurzeln zu behandeln, gehen wir zurück auf 2), setzen darin aber voraus, dass $R(\varphi)$ sich auf die Lemniskate bezieht, und nehmen $\delta = 90^0$ an. Die Secante steht also auf dem Radiusvector $R = r$ senkrecht. Da eine Wurzel verschwindet, so resultirt aus diesen Voraussetzungen die kubische Gleichung:

$$27)\qquad x^3 + 3r^2 . x - 2r^3 \operatorname{tg} 2\varphi = 0.$$

Bezeichnen wir den Winkel zwischen der Tangente und dem Radiusvector mit α, so ist $\alpha = 90 - 2\varphi$. (Fig. 2.)

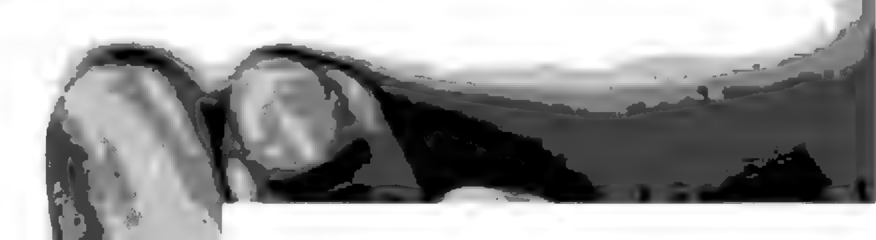
Nach den Methoden der trigonometrischen Auflösung ergeben sich nun folgende Formeln:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p}{3q}\sqrt{\tfrac{4}{3}p} = \cot 2\varphi,$$

$$28)\qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\delta^3,$$

$$x = \sqrt{\tfrac{4}{3}p}\cot\delta = 2r\cot\delta.$$

Verbinden wir der letzten Formel gemäss die Mitte der Lemniskatensehne x mit dem Mittelpunkt der Curve durch die Mittellinie y, so ist δ der Winkel zwischen x und y. Danach haben α und δ ihre geometrische Bedeutung erhalten.



Die geometrisch-trigonometrische Auflösung der kubischen Gleichung

$$x^3+px-q=0 \tag{29}$$

gestaltet sich also nach Obigem folgendermassen:

Der aus den Parametern p, q berechnete Winkel α, oder dessen betreffender Polarwinkel φ bestimmt auf der Lemniskate einen Punkt, in welchem wir senkrecht zum Radius r eine Normale bis zum Durchschnitt mit der Curve errichten. Diese Sehne oder Normale ist die reelle Wurzel der Gleichung, und das Mass für die Einheit ergiebt sich aus $3r^2=p$.

Die Tangentenziehung von einem Punkte der X-Achse innerhalb des Focalkreises ist nach dem Obigen leicht durchführbar.

Wendet man nämlich auf 26) die vorhin entwickelte Methode an, so resultirt schliesslich der Wurzelausdruck

$$\cos 2\psi = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\delta}. \tag{30}$$

Man hat demgemäss den für 26) betreffenden Winkel $2\varphi=90^0-\alpha$ zu halbiren, die Halbirungslinie bis zur Curve zu verlängern und daselbst senkrecht zur Linie eine Normale bis zum Durchschnitt zu errichten. Die Halbirungslinie y giebt den Winkel δ, und damit kann $\cos 2\psi$ vermöge 30) leicht construirt werden.

Bezüglich des letzten Falles der kubischen Gleichungen beziehen wir uns auf die Gleichung

$$R^3-\left(h^2-\frac{c^2}{2}\cos 2\varphi\right)R+\frac{c^2h}{2}=0, \tag{31}$$

welche wir durch die Annahme, dass der Punkt $h(\varphi)$ auf der Lemniskate liegt, oder dass $h^2=a^2\cos 2\varphi$ ist, vereinfachen in

$$y^3-\tfrac{3}{4}r^2y+a^2r=0. \tag{32}$$

Dabei ist $R=y$ gesetzt.

Vermöge der bekannten Formeln zur Auflösung der Gleichung

$$y^3-py+q=0 \tag{33}$$

erhalten wir die Relationen

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \cos 2\varphi = \frac{p}{3q}\sqrt{\tfrac{4}{3}p}, \\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha &= \operatorname{tg}\frac{\delta^3}{2}, \\ y &= \frac{r}{\sin\delta} = \sqrt{\tfrac{4}{3}p}\,.\operatorname{cosec}\delta. \end{aligned} \tag{34}$$



Die Methode der Auflösung der kubischen Gleichung 33) ist demnach der vorhin entwickelten analog. Die reelle Wurzel wird durch die Mittellinie $y = R$ eines rechtwinkligen Lemniskatendreiecks bestimmt, in welchem die eine Kathete durch einen Radiusvector, dessen Polarwinkel vermittelst $\cos 2\varphi = \frac{p}{3q}\sqrt{\frac{1}{3}p}$ berechnet wird, bestimmt ist. Die Mitte der andern Kathete, verbunden mit dem Centrum der Curve ist als Mittellinie des Dreiecks die betreffende Wurzel, für welche aus $r^2 = \frac{4}{3}p$ das Mass der Einheit hervorgeht. Wie vorhin ist δ der Winkel zwischen der Mittellinie und der andern Kathete.

Die Gleichung 27) wollen wir noch etwas transformiren, indem wir $\operatorname{tg}\frac{1}{2}v = \frac{x}{r}$ einführen. $\frac{1}{2}v$ ist der Winkel zwischen der Kathete r des genannten Dreiecks und seiner Hypotenuse r'.

Demgemäss ist

$$35)\qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3 + 3\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v - 2\operatorname{tg}2\varphi = 0.$$

Führen wir hierin statt $\operatorname{tg}\frac{1}{2}v$ den Ausdruck

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \frac{\sqrt{1-\cos\frac{1}{2}v^2}}{\cos\frac{1}{2}v}$$

ein, und entwickeln nach Potenzen von $\cos\frac{1}{2}v^2$, so resultirt schliesslich

$$36)\qquad (\cos\tfrac{1}{2}v^2)^3 - \frac{3}{4(1+\operatorname{tg}2\varphi^2)}(\cos\tfrac{1}{2}v^2) - \frac{1}{4(1+\operatorname{tg}2\varphi^2)} = 0.$$

Diese beiden Gleichungen werden uns im Folgenden von Nutzen sein.

Auf der Y-Achse der Lemniskate ziehen wir von einem Punkte $y = n$ Tangenten an dieselbe, ein Berührungspunkt habe die Polarcoordinaten $r(\psi)$, der Winkel zwischen den bezüglichen Brennstrahlen sei v. (Fig. 2.)

Zunächst ist leicht die Relation

$$37)\qquad \cos 2\psi = \cos\tfrac{1}{2}v^2$$

abzuleiten. Ferner ist

$$38)\qquad \frac{n}{r} = \frac{\cos 2\psi}{\sin 3\psi},$$

wo

$$r^2 = a^2\cos 2\psi.$$

Entwickeln wir 38) nach Potenzen von $\cos\frac{1}{2}v^2$, nachdem wir vorher darin $\cos 2\psi$ durch $\cos\frac{1}{2}v^2$ ausgedrückt haben, so gewinnen wir die Form

$$39)\qquad (\cos \tfrac{1}{2}v^2)^3 - \frac{3}{4\left(1+\frac{c^2}{n^2}\right)}(\cos \tfrac{1}{2}v^2) - \frac{1}{4\left(1+\frac{c^2}{n^2}\right)} = 0.$$

Diese Gleichung wird mit 36) identisch, wenn $\frac{c}{n} = \operatorname{tg} 2\varphi$ ist.

Das Problem der Tangentenziehung von einem Punkte der Y-Achse ist damit gelöst. Man verbinde nämlich den betreffenden Punkt $y = n$ mit einem Brennpunkt durch eine Gerade, deren Neigung gegen die X-Achse 2φ sei, betrachte alsdann φ als Polarwinkel, dessen Radiusvector r mit der Hypotenuse r' des rechtwinkligen Dreiecks rxr' den Winkel $\frac{1}{2}v$ einschliesst. Der entsprechende Winkel v zwischen den Brennstrahlen ergiebt als Focalwinkel der Curve den Berührungspunkt der Tangente.

Schliesslich wollen wir noch für die Hypotenuse $r'(\varphi')$ des genannten Dreiecks folgende Gleichung aufstellen:

$$40)\qquad \cos 2\varphi'^3 + 3\cos 2\varphi \,.\, \cos 2\varphi'^2 - 4\cos 2\varphi = 0,$$

oder auch

$$41)\qquad \left(\frac{a^2}{r'^2}\right)^3 - \frac{3}{4}\left(\frac{a^2}{r'^2}\right) - \frac{1}{4\cos 2\varphi} = 0.$$

Die trigonometrische Auflösung giebt die Relationen:

$$\frac{a^2}{r'^2} = \frac{1}{\sin\delta},$$

also

$$\cos 2\varphi' = \sin\alpha' = \sin\delta$$

und

$$42)\qquad \alpha' = \delta.$$

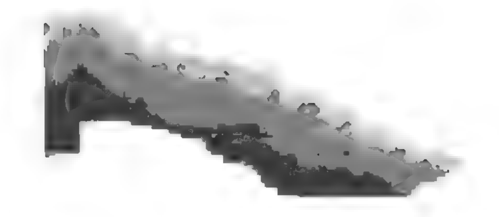
Demnach ist der Winkel zwischen r' und der zugehörigen Tangente gleich dem Winkel δ zwischen der Kathete x und der Mittellinie y. Macht diese mit der X-Achse den Winkel Θ, so ist noch $\varphi - \Theta = 2\varphi'$.

Wir werden später die soeben entwickelten Resultate noch auf einem andern Wege ableiten.

Bemerkung. Die Formel 37) ergiebt sich in folgender Art:

Heissen die beiden Brennstrahlen p und q, so hat man

$$4c^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos v,$$
$$p^2 + q^2 = 2r^2 + 2c^2,$$
$$pq = c^2,$$
$$r^2 = a^2\cos 2\varphi.$$



Hieraus erhält man leicht durch Substitution der letzten 3 Gleichungen in die erste die Bedingungsgleichung.

Ferner bestehen noch die Relationen

$$\sqrt{2}p = \sqrt{a^2 + r^2} + r,$$
$$\sqrt{2}q = \sqrt{a^2 + r^2} - r$$

und

$$\frac{p}{q} = \frac{\sin(\frac{1}{2}v - \varphi)}{\sin(\frac{1}{2}v + \varphi)}.$$

§ 4.

Die theoretische Astronomie zeigt bekanntlich, dass die Formel 35) oder

$$\text{43)} \qquad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}v^3 = \tfrac{2}{3} \operatorname{tg} 2\varphi$$

mit der parabolischen Bewegung der Kometen in Verbindung steht.

Da es von Interesse ist, zu untersuchen, in wie fern die Lemiskate mit diesem Bewegungsproblem Verknüpfungspunkte hat, wollen wir in Kürze die allgemeinen Bewegungsgleichungen für den speciellen Fall der Parabel entwickeln.

Nach dem Newton'schen Gesetz $\frac{k^2}{r^2}$, wo k^2 die Constante des Sonnensystems ist, sind die Componenten der auf den Kometen wirkenden Kraft parallel zu den Coordinatenachsen

$$\text{44)} \qquad \begin{aligned} X &= -\frac{k^2}{r^2}\cos(xr) = -\frac{k^2 x}{r^3}, \\ Y &= -\frac{k^2}{r^2}\cos(yr) = -\frac{k^2 y}{r^3}. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen sind demnach, da die Kräfte dem zweiten Differential nach der Zeit gleich gesetzt werden können

$$\text{45)} \qquad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k^2 x}{r^3} &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k^2 y}{r^3} &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man ohne Mühe

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad \text{oder}$$

46)

$$d\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=0.$$

Die Integration ergiebt

47) $$y\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=c.$$

Da nun bekanntlich

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=2d(\text{Sect})=r^2\,dv,$$

so ist

48) $$r^2\,dv=c\,dt.$$

Die Constante c ist nun, wenn die Masse des Kometen $=0$ angenommen wird, gleich $k\sqrt{p}$ und weil $r=\frac{p}{2\cos\frac{1}{2}v^2}$, so erhalten wir schliesslich den Ausdruck

49) $$r^2\,dv=\frac{p^2}{4\cos\frac{1}{2}v^4}\,dv=\tfrac{1}{2}p^2(1+\operatorname{tg}v^2)\,d\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v.$$

Die Integration ergiebt also

50) $$\tfrac{1}{2}p^2(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v+\tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3)=kt\sqrt{p},$$

d. i.

51) $$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v+\tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3=\frac{2kt}{p^{\frac{3}{2}}}.$$

Hierin bedeutet v die Anomalie und t die seit dem Periheldurchgang verflossene Zeit.

Die Identität der Gleichungen 43) und 51) verlangt die Bedingung

52) $$\operatorname{tg}2\varphi=\frac{t}{\frac{p^{\frac{3}{2}}}{3k}}=\frac{t}{c}.$$

Wir setzen $\frac{p^{\frac{3}{2}}}{3k}=c$ gleich dem Abstand eines Brennpunktes vom Mittelpunkt einer Lemiskate. Es ist $k=0{,}017202$, und p wird in Einheiten der halben grossen Axe der Erdbahn ausgedrückt.

Um also mit Hülfe dieser Lemiskate für jede Zeit die Anomalie oder den Ort eines sich in einer Parabel bewegenden Kometen zu finden, errichte man im Brennpunkte der ersteren senkrecht zur

Achse eine Normale $= t$, d. i. das Maass der, vom Perihel an gerechneten Zeit. Der hierdurch bekannte Winkel v, hervorgehend aus

$$53) \qquad \operatorname{tg} 2v = \frac{t}{c}$$

bestimmt als Polarwinkel der Lemniskate einen Punkt r, v' derselben. Darin errichten wir senkrecht zum Radiusvector r eine Senkrechte bis zum Durchschnitt mit der Curve, errichten und den Schnittpunkt mit dem Centrum verbinden; der zwischen diesen beiden Radienvectoren eingeschlossene Winkel ist φ oder die halbe wahre Anomalie des Himmelskörpers in seiner Bahn.

Diese Construction gestattet also den Ort zu finden, wenn die Zeit gegeben ist.

Bemerkung. Errichtet man im Punkte E einer Parabel die Normale bis zum Durchschnitt mit der Directrix, verbindet alsdann diesen Punkt mit dem Brennpunkt durch eine Gerade, so ist der Winkel zwischen ihr und der Achse gleich 2φ. Der durch die Normale bestimmte Abschnitt der Derectrix ist demnach der Zeit proportional.

Soll dagegen vermittelst der Lemniskate aus dem Ort des Kometen die entsprechende Zeit durch Construction gefunden werden, so muss man ausgehen von den Gleichungen

$$54) \quad \begin{cases} (\cos \tfrac{1}{2}v^2)^3 - \dfrac{3}{4(1+\operatorname{tg} 2\varphi^2)} (\cos \tfrac{1}{2}v^2) - \dfrac{1}{4(1+\operatorname{tg} 2\varphi^2)} = 0, \\[2ex] (\cos \tfrac{1}{2}v^3)^3 - \dfrac{3}{4\left(1+\dfrac{c^2}{n^2}\right)} (\cos \tfrac{1}{2}v^2)^3 - \dfrac{1}{4\left(1+\dfrac{c^2}{n^2}\right)} = 0. \end{cases}$$

Wie wir gezeigt, geht die erste aus einer Transformation von 51) hervor. Die zweite ist die Tangentengleichung der Lemniskate bezüglich der Y-Achse.

Da nun

$$\frac{c}{n} = \operatorname{tg} 2\varphi$$

und

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{t}{c},$$

so folgt

$$\frac{c}{n} = \frac{t}{c}$$

oder

$$55) \qquad c^2 = nt.$$

Dieser einfache Ausdruck gestattet eine leichte Construction für den Fall, die Zeit t durch v zu bestimmen (Fig. 2.).

Wir ziehen nämlich durch den Lemniskatenpunkt, dessen Brennstrahlen den gegebenen Winkel v einschliessen, eine Tangente bis zur Y-Achse, verbinden den Durchschnittspunkt mit einem Brennpunkt durch eine Gerade und errichten auf derselben gemäss 55) eine Normale bis zur Y-Achse. Die Entfernung dieses zweiten Durchschnittspunktes vom Centrum der Lemniskate ist das Mass der seit dem Durchgang durch das Perihel verflossenen Zeit.

Wollen wir dagegen, bei gegebener Zeit die Anomalie des Kometen suchen, so kommen wir, den angegebenen Weg rückwärts verfolgend, auf eine Tangentenziehung zurück, welche den gesuchten Winkel v als Winkel zwischen zwei Brennstrahlen der Lemniskate liefert.

Die Theorie der kometischen Bewegung lässt noch die Geschwindigkeit des Himmelskörpers in folgender Art finden:

Aus 45) erhalten wir

$$56)\qquad dx\frac{d^2x}{dt^2}+dy\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{k^2}{r^3}(x\,dx+y\,dy)=0,$$

welche Gleichungen wegen

$$57)\qquad \begin{aligned} r^2 &= x^2+y^2, \\ r\,dr &= x\,dx+y\,dy, \end{aligned}$$

übergeht in

$$58)\qquad \frac{d(dx^2+dy^2)}{dt^2}+\frac{2k^2}{r^2}dr=0.$$

Integrirt man, so resultirt

$$59)\qquad \frac{dx^2+dy^2}{dt^2}=\frac{2k^2}{r}.$$

Die Integrationsconstante ist in unserm Falle $=0$. Die Geschwindigkeit g ist demnach, wenn R anstatt r gesetzt wird

$$60)\qquad g=\sqrt{\frac{2k^2}{R}},$$

wo R den Radiusvector der Parabel bedeutet.

Die letzte Formel geht nun, da

$$71) \qquad \begin{aligned} p\sqrt{2} &= \sqrt{a^2+r^2}+r, \\ q\sqrt{2} &= \sqrt{a^2+r^2}-r, \end{aligned}$$

so reducirt sich der obige Ausdruck für N nach einigen Transformationen auf

$$72) \qquad N = \frac{v^2}{\varrho} = \frac{2r}{c^2} \cdot k^2$$

Da der Krümmungsradius $\varrho = \frac{2c^2}{3r}$ ist, so ist die Normalcomponente

$$73) \qquad N = \frac{3v^2}{2c^2} \cdot r.$$

Also ist auch

$$\frac{2rk^2}{c^2} = \frac{3v^2}{2c^2} \cdot r,$$

mithin

$$v^2 = \tfrac{4}{3}k^2,$$

oder

$$74) \qquad v = \sqrt{\tfrac{4}{3}k^2}.$$

Wir haben demnach folgendes Resultat:

Ein Punkt beschreibt unter der Einwirkung der Anziehung $f = \frac{k^2}{r}$ zweier gleichen in den Brennpunkten einer Lemniskate sich befindenden Massenpunkte diese Curve mit gleichförmiger Bewegung, wenn man demselben in der Mitte der Verbindungslinie der Brennpunkte, deren Abstand vom Centrum $c = 1$ ist, eine Geschwindigkeit $v = \frac{2k}{\sqrt{3}}$ erteilt, welche in ihrer Richtung mit der Achse den Winkel von 45^0 einschliesst.

Da k^2 der anziehenden Masse proportional sein muss, so folgt, dass die constante Geschwindigkeit der Quadratwurzel aus der anziehenden Masse direct proportional ist.

Die gleichförmige Bewegung in der Lemniskate steht in eigentümlicher Beziehung zur Bewegung eines materiellen Punktes im Kreise. Steht die Achse der Lemniskate lotrecht, so hat auf dem die Lemiskate einschliessenden Berührungskreis vom Radius $a = c\sqrt{2}$, derjenige Punkt, dessen Polarwinkel 2φ dem Lemniskatenpunkt $r(\varphi)$ in seiner gleichförmigen Bewegung entspricht, eine mit der Pendelbewegung übereinstimmende Bewegung, insofern die Geschwindigkeit in der ersteren im tiefsten Punkte der Bahn durch $v' = \sqrt{2ga}$ aus-

gedrückt ist. Halbirt man also den Ausschlagswinkel des Pendels und trägt auf der Geraden eine der Geschwindigkeit des Punktes im Kreise proportionale Strecke $r = \sqrt{\frac{a}{ag}} . v$ ab, so beschreibt ihr Endpunkt in gleichförmiger Geschwindigkeit $\frac{v'}{2}$ eine Lemniskate. Diese Sätze folgen aus den leicht abzuleitenden Relationen:

$$75)\quad \begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{ag}{2}} . t = \frac{v'}{2} t, \\ v &= \sqrt{2ga} \cos \operatorname{am} u = \sqrt{\frac{2g}{a}} . r, \end{aligned}$$

worin u der dem Punkte $r(\varphi)$ entsprechende Lemniskatenbogen ist.

§. 6.

Wir wollen jetzt die Anziehung eines Bogens einer Lemniskate, in welcher eine gleichförmig verteilte anziehende oder abstossende nach dem Newton'schen Gesetze $f = \frac{m}{r^2}$ wirkende Masse angenommen ist, in Beziehung auf die Brennpunkte berechnen. Die Masse in der Längeneinheit sei m.

Da das Bogendifferential gleich

$$76)\quad ds = \frac{a d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

ist, so wirkt es mit der Stärke

$$77)\quad \frac{ma\, d\varphi}{q^2 \sqrt{\cos 2\varphi}},$$

...ie Masseneinheit im Brennpunkt Q ein. Die Componente in ...htung der X-Achse hat also, da der Brennstrahl q mit der... Winkel $2\varphi + \frac{1}{2}v$ einschliesst, die Intensität

$$\frac{ma\, d\varphi}{q^2 \sqrt{\cos 2\varphi}} \cos(2\varphi + \tfrac{1}{2}v)$$

... den andern Brennpunkt die entsprechende Com-

$$79)_* \quad \frac{p}{c} = \frac{c}{q} = \sqrt{2}\cos\varphi + \cos\tfrac{1}{2}v, \qquad \frac{q}{c} = \frac{c}{p} = \sqrt{2}\cos\varphi - \cos\tfrac{1}{2}v,$$

nehmen die Componenten die Form an:

$$80) \quad \frac{2m}{a}\cdot\frac{\cos(2\varphi+\frac{1}{2}v)}{\sqrt{\cos 2\varphi}}(\sqrt{2}\cos\varphi+\cos\tfrac{1}{2}v)\,d\varphi, \qquad \frac{2m}{a}\cdot\frac{\cos(2\varphi-\frac{1}{2}v)}{\sqrt{\cos 2\varphi}}(\sqrt{2}\cos\varphi-\cos\tfrac{1}{2}v)\,d\varphi.$$

Die Anziehung des vom Scheitelpunkt $r(0)$ bis zum Punkte $r(\varphi)$ gehenden Bogens ist demnach für die beiden Brennpunkte zugleich ausgedrückt in der vereinfachten Form

$$81) \quad \frac{2m}{a}\int_0^\varphi \frac{\cos(2\varphi\pm\frac{1}{2}v)}{\sqrt{\cos 2\varphi}}(\sqrt{2}\cos\varphi\pm\cos\tfrac{1}{2}v)\,d\varphi$$

Führen wir die Multiplication unter dem Integralzeichen durch, so resultirt schliesslich bei Berücksichtigung von $\cos\frac{1}{2}v^2 = \cos 2\varphi$

$$82) \quad \frac{2m}{a}\int_0^\varphi\left(-2+\cos 2\varphi+4\cos\varphi^2 \mp \sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{\cos 2\varphi}}\,1+\cos 2\varphi-4\cos 2\varphi^2)\right)d\varphi.$$

Wird die Integration ausgeführt, so resultirt als anziehende Kraftcomponente in der X-Achse

$$83) \quad \begin{aligned} &\frac{m}{a}(\sin 2\varphi(\cos v+2)\pm\sin v(1+\cos 2\varphi)),\\ &= \frac{m}{a}(\sin(2\varphi\pm v)\pm\sin v+2\sin 2\varphi),\\ &= \frac{m}{a}(2\sin(\varphi\pm v)\cos\varphi+2\sin 2\varphi),\\ &= \frac{m}{a}\sin 2\varphi(\sqrt{2}\cos\varphi\pm\cos\tfrac{1}{2}v)^2. \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich bei Berücksichtigung von 79_*), wenn wir noch den doppelten, also zur Achse symmetrischen Bogen einführen als anziehende Kraft desselben auf die Brennpunkte P und Q bezüglich

84)
$$P = ma \cdot \frac{\sin 2\varphi}{p^2},$$
$$Q = ma \cdot \frac{\sin 2\varphi}{q^2}$$

Aus der Proportion

85)
$$P : Q = \frac{1}{p^2} : \frac{1}{q^2}$$

folgt demnach, dass sich die Anziehungen oder Abstossungen eines mit Masse gleichförmig belegten zur Achse der Lemniskate symmetrischen Bogens auf die beiden Brennpunkte umgekehrt wie die Quadrate der bezüglichen Brennstrahlen verhalten.

Für $\varphi = 45^0$ d. i. für die halbe Lemniskate wird $P = Q = \frac{ma}{c^2}$, woraus wir schliessen, dass die Anziehung der halben Lemniskate auf den innern Brennpunkt dieselbe Wirkung, wie auf den äussern, ausübt, und dass der innere Punkt in diesem Falle sich im Gleichgewicht befindet, wenn im Centrum eine Masse *ma* concentrirt ist.

Endlich erhalten wir aus dem Vorstehenden den merkwürdigen Satz:

Die Anziehung einer mit Masse gleichförmig belegten Lemniskate auf jeden Brennpunkt derselben ist gleich Null.

Die Wirkung eines Bogens auf einen Brennpunkt wird also durch die Gegenwirkung des andern aufgehoben.

Diese Sätze haben aber nur für das Newton'sche Gravitationsgesetz Gültigkeit.

Der durch das Centrum der Curve und einen Brennpunkt gehende Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Achse liegt, schneidet von der Lemniskate einen (äussern) Bogen ab, welcher das Maximum der Differenz $P - Q$ der betreffenden Kräfte repräsentirt. Die von dem andern Brennpunkt an die Lemniskate gezogenen Tangenten gehen durch die bezüglichen Durchschnittspunkte beider Curven.

Zusatz zur Tangentenziehung.

Will man von einem Punkte $r(\alpha)$ einer Lemniskate Tangenten an dieselben ziehen, so hängt die Lösung dieser Aufgabe von der folgenden biquadratischen Gleichung ab:

$$\cos 2\varphi^4 + 2 \cos 2\alpha \cdot \cos 2\varphi^3 - \cos 2\alpha \cdot \cos 2\varphi + \tfrac{1}{4} \cos 2\alpha^2 = 0.$$

2 Wurzeln derselben sind imaginär, die andern sind reell und liefern die Polarwinkel φ_1 und φ_2 für die Berührungspunkte.

Diese Winkel können vermittelst einer Parabel in folgender Art gefunden werden.

Setzen wir in der auf S. 188 des 69. Teils d. Zeitschrift gegebenen Gleichung für die Durchschnittspunkte von Parabel und Kreis, d. i. in

$$r^4 + 4R\cos\varphi r^3 + 4\left(R^2\cos\varphi^2 - Rp\cos\varphi + \frac{R^2-s^2}{2}\right)r^2$$
$$+ (4R(R^2-s^2)\cos\varphi - 8R^2p)r + (R^2-s^2-2Rp\cos\varphi)^2 + 4R^2p^2\sin\varphi^2 = 0,$$

$$R = s, \quad 4q = 2p = \cos 2\alpha, \quad 2R = 1,$$

so geht sie, wenn wir α statt φ schreiben, über in

$$r^4 + 2\cos 2\alpha \,.\, r^3 - \cos 2\alpha \,.\, r + \tfrac{1}{4}\cos 2\alpha^2 = 0.$$

Für $r = \cos 2\varphi$ wird dieselbe mit der obigen identisch.

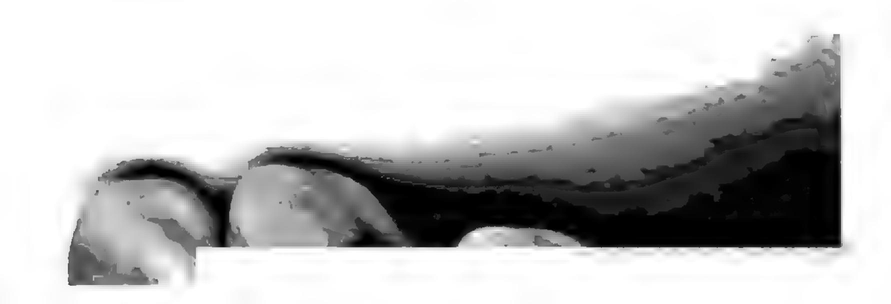
Demnach betrachte man 2α als Polarwinkel einer Parabel, verlängere den betreffenden Schenkel bis zum Durchschnitt Y mit der auf der X-Achse stehenden Normalen, welche vom Brennpunkte der Parabel den Abstand $4q = 2p$ hat und beschreibe über FY einen Kreis, dann schliessen die vom Brennpunkt F nach den Schnittpunkten von Kreis und Parabel gehenden Leitstrahlen mit dem Durchmesser FY die gesuchten Winkel $2\varphi_1$ und $2\varphi_2$ ein.

Zu vorstehender Abhandlung möchte ich noch nachträglich eine Bemerkung machen:

Eine Gerade, deren Abstand vom Mittelpunkt Q einer Cassinischen Linie h ist, schneide diese Curve in 4 Punkten. Die Mitte S einer der hierdurch entstehenden 6 Sehnen verbinde man mit Q und es sei α der Winkel zwischen h und der Achse, dann ist, wenn $QS = R$ gesetzt wird, die folgende Gleichung leicht abzuleiten:

$$R^6 - R^4(2h^2 - c^2\cos 2\alpha) + \tfrac{1}{4}(2h^2 - c^2\cos 2\alpha)^2 + q^4 - c^4)R^2 - \frac{h^2q^4}{4} = 0.$$

Aus dieser bikubischen Gleichung folgt der Satz, dass die zu einander gehörigen Sehnen entsprechend gleiche Radien $R = R'$ besitzen, wodurch also der zu Anfang aufgestellte Satz verallgemeinert wird.



X.

Trigonometrische Auflösung biquadratischer Gleichungen in geometrischer Darstellung.

Von

Emil Oekinghaus.

Die vorliegende Abhandlung wird eine neue Methode der trigonometrischen Auflösung der biquadratischen Gleichungen entwickeln, welche den Zweck verfolgt, diejenigen mathematischen Probleme, deren Lösung von einer derartigen Gleichung abhängt, einer geometrischen Interpretation zugänglicher zu machen, als es nach den bisher bekannten Methoden, so vorzüglich dieselben auch in analytischer Hinsicht sind, möglich ist. Diese letztern leiten aus den verschiedenen zu Grunde gelegten Wurzeltypen die entsprechenden Resolventen ab, mit deren Hülfe die Unbekannten sich berechnen lassen; aber die Wurzeln dieser Gleichungen dritten Grades stehen, geometrisch aufgefasst, mit dem betreffenden Problem oft nicht in recht ersichtlichem Zusammenhang und gewährt mithin die Bearbeitung desselben nach dieser Richtung hin nur geringe geometrische Ausbeute.

Unsere Methode dagegen ist im Stande, alle diejenigen geometrischen Beziehungen, welche allgemein jener bestimmten Classe von Aufgaben eigentümlich sind, analytisch in solchen Formen darzustellen, dass dieselben auf jeden speciellen Fall direct übertragbar sind und die ganze Geometrie des Problems innerhalb der angegebenen Grenzen ohne Mühe ableiten lassen.

Die aus diesen allgemeinen Formen entwickelte Cosinusresolvente führt in ihrer Auflösung auf sehr elegante Wurzelausdrücke der Gleichungen 4. Grades.

Vermittelst Einführung hyperbolischer Functionen gelangen wir bei der Darstellung imaginärer Wurzeln als Functionen complexen Arguments in das Gebiet der imaginären Verwandtschaften, vermöge welcher complexe Wurzelpaare geometrisch in ihrer Uebertragung durch Kreis-, Ellipsen- oder Hyperbelpunkte definirt werden.

Aus einer andern Form der biquadratischen Gleichung, welche wir zum Zwecke einfachern Anschlusses an geometrische Aufgaben eingeführt haben, resultiren ausser einer neuen geometrischen Bedeutung der Wurzeln unserer Resolvente bemerkenswerte Sätze und elegante Relationen zwischen den Seiten, Diagonalen, Winkeln etc. des Kreisvierecks. Für die Pole und Polare finden sich gleichfalls eigentümliche metrische Bestimmungen und Sätze, die sich aus der genauern Untersuchung der Constanten der Gleichungen ergeben.

Die Anwendung der Theoreme auf die Kegelschnitte löst in mehrfacher Art das Problem der Trisection des Winkels. Ferner sind die geometrische Auflösung der reducirten kubischen Gleichungen nebst der Bedeutung der in der trigonometrischen Auflösung vorkommenden Hülfswinkel, sowie einige neue Sätze über Kegelschnitte weitere Consequenzen der entwickelten Methode. Endlich haben wir das bis jetzt noch nicht vollständig durchgeführte Problem der Normalen der Ellipse und Hyperbel allgemein behandelt und erledigt.

Die weiteren Anwendungen der entwickelten Methoden auf Kegelschnitte, Lemniskaten, etc. werden wir in den folgenden Teilen weiter erörtern.

I. Teil.

§ 1.

Die biquadratische Gleichung

$$1)\qquad \operatorname{tg}\varphi^4 - a\operatorname{tg}\varphi^3 + b\operatorname{tg}\varphi^2 - c\operatorname{tg}\varphi + d = 0,$$

welche durch Substitution von

$$2)\qquad x = \operatorname{tg}\varphi$$

aus

$$3)\qquad x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$$

hervorgeht, wählen wir im Folgenden zum Ausgangspunkt unserer Untersuchungen.

Vermittelst der bekannten Relationen

$$\sin 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi^2}, \quad \cos 2\varphi = \frac{1-\operatorname{tg}\varphi^2}{1+\operatorname{tg}\varphi^2}$$

lassen sich noch leicht die folgenden Gleichungen ableiten

4) $\sin 2\varphi^4((a-c)^2+(1-b+d)^2)-2(a(1+b-3d)+c(-3+b+d))\sin 2\varphi^3$
$+4(ac+b+bd-4d)\sin 2\varphi^2+8(ad+c)\sin 2\varphi+16d=0,$

5) $((a-c)^2+(1-b+d)^2)\cos 2\varphi^4-2(a^2-c^2+2(1-d)(1-b+d))\cos 2\varphi^3$
$+2(3+2ac-b^2-2d+3d^2)\cos 2\varphi^2+2(a^2-c^2-2(1-d)(1+b+d))\cos 2\varphi$
$-(a+c)^2+(1+b+d)^2=0,$

wofür wir bezüglich schreiben

$$6)\qquad \begin{aligned}\sin 2\varphi^4-A\sin 2\varphi^3+B\sin 2\varphi^2-C\sin 2\varphi+D&=0,\\ \cos 2\varphi^4-A'\cos 2\varphi^3+B'\cos 2\varphi^2-C'\cos 2\varphi+D'&=0.\end{aligned}$$

Nach einer bekannten goniometrischen Formel ist ferner

$$\operatorname{tg}(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4)=\frac{\operatorname{tg}(\varphi_1+\varphi_2)+\operatorname{tg}(\varphi_3+\varphi_4)}{1-\operatorname{tg}(\varphi_1+\varphi_2)\operatorname{tg}(\varphi_3+\varphi_4)}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\varphi_1+\operatorname{tg}\varphi_2+\operatorname{tg}\varphi_3+\operatorname{tg}\varphi_4-\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2(\operatorname{tg}\varphi_3+\operatorname{tg}\varphi_4)-\operatorname{tg}\varphi_3\operatorname{tg}\varphi_4(\operatorname{tg}\varphi_1+\operatorname{tg}\varphi_2)}{1-\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_3\operatorname{tg}\varphi_4-(\operatorname{tg}\varphi_1+\operatorname{tg}\varphi_2)(\operatorname{tg}\varphi_3+\operatorname{tg}\varphi_4)+\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2\operatorname{tg}\varphi_3\operatorname{tg}\varphi_4}$$

Führen wir ein

$$8)\qquad \varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4=\omega,$$

so geht die letzte Formel bei Berücksichtigung der Bedeutung der Constanten der Gleichung 1) über in

$$9)\qquad \operatorname{tg}\omega=\frac{a-c}{1-b+d}.$$

Man kann diese wichtige Formel erweitern auf Gleichungen $n$ten Grades.

Indem wir nämlich in

$$10)\qquad x^n-ax^{n-1}+bx^{n-2}-cx^{n-3}+dx^{n-4}\ldots=0$$

$$11)\qquad x=\operatorname{tg}\varphi$$

substituiren, verallgemeinert sich nach Analogie der vorigen Entwickelung die Gleichung 9) zu

$$12)\qquad \operatorname{tg}(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\ldots\varphi_n)=\frac{a-c+e-g\ldots}{1-b+d-f\ldots},$$

worin das Gesetz des Fortschreitens der Coefficienten der Gleichung leicht zu ersehen ist. Wir werden später auf diese Formel und ihr ähnliche wieder zurückkommen und neue Eigenschaften der Curven 2ten bis $n$ten Grades daraus herleiten. Die specielle Form 9) wird uns ferner für die Aufstellung einer neuen trigonometrischen Resolvente für die Gleichungen 4ten Grades von Nutzen sein.

§ 2.

Aus der Formel

$$\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_3 + \sin 2\varphi_4 = A$$

folgt mit Hülfe goniometrischer Beziehungen, wenn wir noch der Einfachheit wegen die folgenden Abkürzungen einführen

$$13)\qquad \begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 &= \sigma, \\ \varphi_1 - \varphi_2 &= \delta, \\ \varphi_3 + \varphi_4 &= \sigma', \\ \varphi_3 - \varphi_4 &= \delta', \end{aligned}$$

$$14)\qquad \sin\sigma\cos\delta + \sin\sigma'\cos\delta' = \frac{A}{2},$$

und ähnlich ergibt sich aus

$$\cos 2\varphi_1 + \cos 2\varphi_2 + \cos 2\varphi_3 + \cos 2\varphi_4 = A'$$

$$15)\qquad \cos\sigma\cos\delta + \cos\sigma'\cos\delta' = \frac{A'}{2}$$

Beachten wir die Formel

$$\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2},$$

so folgt nach einigen Transformationen aus der Doppelgleichung

$$a \pm c = \operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2 + \operatorname{tg}\varphi_3 + \operatorname{tg}\varphi_4 \pm \operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2(\operatorname{tg}\varphi_3 + \operatorname{tg}\varphi_4) \pm \operatorname{tg}\varphi_3\operatorname{tg}\varphi_4(\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2)$$

durch Division der einen durch die andere

$$16)\qquad \sin\sigma\cos\delta' + \sin\sigma'\cos\delta = \frac{a+c}{a-c}\sin\omega.$$

Dabei ist

$$17)\qquad \sin\omega = \frac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2 + (1-b+d)^2}},\quad \cos\omega = \frac{1-b+d}{\sqrt{(a-c)^2 + (1-b+d)^2}}$$

Multipliciren wir 14) mit $\cos\sigma'$ und 15) mit $\sin\sigma'$ und subtrahiren, so folgt

$$18)\qquad \cos\delta = \frac{A\cos\sigma' - A'\sin\sigma'}{2\sin(\sigma-\sigma')},$$

Ebenso folgt

$$19)\qquad \cos\delta' = \frac{-A\cos\sigma + A'\sin\sigma}{2\sin(\sigma-\sigma')}.$$

Durch Combination der bis jetzt dargestellten Formen erhalten wir noch

$$20)\quad \begin{aligned} \cos\delta\sin(\sigma-\sigma')\sin\omega &= \frac{A}{2}\sin\sigma-\frac{a+c}{a-c}\sin\omega\sin\sigma', \\ \cos\delta\sin(\sigma-\sigma')\cos\omega &= \frac{A'}{2}\sin\sigma-\frac{a+c}{a-c}\sin\omega\cos\sigma'. \end{aligned}$$

Um noch andere Formeln zu gewinnen, erinnern wir an die Bedeutung von B und B' und ohne Mühe lassen sich folgende Relationen ableiten

$$21)\quad \begin{aligned} \frac{B+B'}{2} &= \cos(\delta+\delta)\cos(\delta-\delta')+\cos(\sigma-\sigma')\cos(\delta-\delta')+\cos(\sigma-\sigma')\cos(\delta+\delta') \\ -\frac{B-B'}{2\cos\omega} &= \cos(\sigma-\sigma')+\cos(\delta+\delta')+\cos(\delta-\delta'). \end{aligned}$$

Eliminiren wir in beiden Formeln $\cos(\sigma-\sigma')$, so erhalten wir eine bemerkenswerte Beziehung zwischen δ und δ'

$$22)\quad \cos\delta^2-4\cos\delta^2\cos\delta'^2+\cos\delta'^2-\frac{B-B'}{\cos\omega}\cos\delta\cos\delta' = \tfrac{1}{4}(A^2+A'^2) = R.$$

Hierbei ist

$$\tfrac{1}{4}(A^2+A'^2) = \frac{B+B'}{2}+1 = \frac{4(1-d^2)+(a+c)^2}{(a-c)^2+(1-b+d)^2} = R.$$

Der Ausdruck R hat eine merkwürdige geometrische Bedeutung, wie wir nachher zeigen werden.

Wegen

$$\frac{B'-B}{\cos\omega} = \frac{2(3+b+3d)}{\sqrt{(a-c)^2+(1-b+d)^2}}$$

geht 22) über in

$$23)\quad \cos\delta^2-4\cos\delta^2\cos\delta'^2+\cos\delta'^2+\frac{2(3+b+3d)}{\sqrt{(a-c)^2+(1-b+d)^2}}\cos\delta\cos\delta' = \frac{(a+c)^2+4(1-d)^2}{\sqrt{(a-c)^2+(1-b+d)^2}}.$$

Wir bilden ferner aus 14) und 15)

$$\frac{A}{2}\sin\omega+\frac{A'}{2}\cos\omega$$

und erhalten

$$24)\quad \cos\sigma\cos\delta'+\cos\sigma'\cos\delta = \frac{2(1-d)}{\sqrt{(a-c)^2+(1-b+d)^2}},$$



ferner ist

25)
$$\cos\sigma\cos\sigma' + \cos\delta\cos\delta' = \frac{2(1+d)}{\sqrt{(a-c)^2+(1-b+d)^2}}.$$

$$\cos\delta\cos\delta' + \sin\sigma\sin\sigma' = \frac{1+b+d}{\sqrt{(a-c)^2+(1-b+d)^2}} = P.$$

Bevor wir die Resolvente der Gleichung 1) entwickeln, wollen wir noch einige Formeln aufstellen, die sich aus dem Vorstehenden leicht ableiten lassen.

$$\sin\sigma = \frac{\frac{A}{2}\cos\delta - \frac{a+c}{a-c}\sin\omega\cos\delta'}{\cos\delta^2 - \cos\delta'^2}.$$

$$\sin\sigma' = \frac{-\frac{A}{2}\cos\delta' + \frac{a+c}{a-c}\sin\omega\cos\delta'}{\cos\delta^2 - \cos\delta'^2}.$$

26)
$$\cos\delta + \cos\delta' = \frac{\frac{A}{2}\sin\tfrac{1}{2}\omega + \frac{A'}{2}\cos\tfrac{1}{2}\omega}{\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')},$$

$$\cos\delta - \cos\delta' = \frac{\frac{A}{2}\cos\tfrac{1}{2}\omega - \frac{A'}{2}\sin\tfrac{1}{2}\omega}{\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')}.$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma') = \frac{\frac{A}{2} + \frac{a+c}{a-c}\sin\omega}{\cos\delta + \cos\delta'}.$$

$$2\cos\tfrac{1}{2}\omega\sin\tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma') = \frac{\frac{A}{2} - \frac{a+c}{a-c}\sin\omega}{\cos\delta - \cos\delta'},$$

$$\left(\frac{A\sin\tfrac{1}{2}\omega + A'\cos\tfrac{1}{2}\omega}{2(\cos\delta+\cos\delta')}\right)^2 + \left(\frac{A\cos\tfrac{1}{2}\omega - A'\sin\tfrac{1}{2}\omega}{2(\cos\delta-\cos\delta')}\right)^2 = 1,$$

$$\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3\cos\varphi_4 = \frac{1}{\sqrt{(a-c)^2+(1-b+d)^2}}$$

Es liesse sich noch eine Gleichung für $\cos\delta$ aufstellen, dieselbe würde indessen etwas weitläufig ausfallen, weswegen wir sie hier nicht geben.

§ 3.

In der zweiten Formel von 25) substituiren wir für $\cos\delta$ und $\cos\delta'$ die in 18) und 19) berechneten Ausdrücke und beachten, dass

$\sigma - \sigma' = 2\sigma - \omega$ ist. Die Wurzeln der hieraus hervorgehenden kubischen Gleichung sind

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4 = \sigma - \sigma', \\
\omega_2 &= \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4 = \delta + \delta', \\
\omega_3 &= \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4 = \delta - \delta',
\end{aligned}$$

die Resolvente selbst ist

27) $$\cos\omega'^3 + (\cos\omega + 2P)\cos\omega'^2 + (R-1)\cos\omega' - (R-1)\cos\omega + 2P - \frac{2(a+c)}{Q^3}(a(1+b-3d) + c(-3+b+d)) = 0.$$

Hierin ist der Abkürzung wegen

28) $$Q^2 = (a-c)^2 + (1-b+d)^2$$

gesetzt und besitzt geometrische Bedeutung.

Aus den Wurzelformen ω' resultiren

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \tfrac{1}{4}(\omega + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3), \\
\varphi_2 &= \tfrac{1}{4}(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3), \\
\varphi_3 &= \tfrac{1}{4}(\omega - \omega_1 + \omega_2 - \omega_3), \\
\varphi_4 &= \tfrac{1}{4}(\omega - \omega_1 - \omega_2 + \omega_3).
\end{aligned}$$

Wir geben noch andere Darstellungen der Resolvente

30) $$\cos\omega'^3 - \frac{3+b+3d}{Q}\cos\omega'^2 + (R-1)\cos\omega' + \frac{3+b+3d}{Q} - \frac{R(1-b+d)}{Q} - \frac{2(a+c)}{Q^3}(a(1+b-3d) + c(-3+b+d)) = 0,$$

31) $$\cos\omega'^3 - \frac{3+b+3d}{\sqrt{(a-c)^2+(1-b+d)^2}}\cos\omega'^2 + \left(\frac{(a+c)^2+4(1-d)^2}{(a-c)^2+(1-b+d)^2} - 1\right)\cos\omega' - \frac{d^3 - 8(a^2d+c^2) + bd(18-b+d) + -(b-1)(b+1)^2 + 4ac(1+b+d) - 13d(1+d)}{((a-c)^2+(1-b+d)^2)\times\sqrt{(a-c)^2+(1-b+d)^2}} = 0,$$

32) $$\cos\omega'^3 - A\cos\omega' + B\cos\omega' - AB + 8\frac{(1+b+d)(1-d)^2 + (a+c)(ad+c)}{Q^3} = 0,$$

33) $$(\cos\omega' - \cos\omega)^3 - \frac{4b}{Q}(\cos\omega' - \cos\omega)^2 + 4\frac{(b^2+ac-4d)}{Q^2}(\cos\omega' - \cos\omega) + 8\frac{(a^2d - abc + c^2)}{Q} = 0,$$

welch' letztere auch aus dem Typus

$$y = (\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2)(\operatorname{tg}\varphi_3 + \operatorname{tg}\varphi_4)$$

hervorgeht.

Wir führen in 30) ein

$$\text{34)} \qquad \cos\omega' = \frac{1 + \frac{b}{3} + d - 4z}{Q}$$

und entwickeln nach Potenzen von z, wir erhalten alsdann die Cardinalresolvente der biquadratischen Gleichungen

$$\text{35)} \quad z^3 - \tfrac{1}{12}(b^2 - 3ac + 12d)z + \tfrac{1}{216}(72bd + 9abc - 27c^2 - 27a^2d - 2b^3) = 0,$$

welche auch, wenn wir für die quadratische und kubische Invariante

$$12J = b^2 - 3ac + 12d,$$
$$432K = 72bd + 9abc - 27c^2 - 27a^2d - 2b^3,$$

die typischen Zeichen einführen, wie folgt geschrieben werden kann

$$\text{36)} \qquad z^3 - Jz + 2K = 0.$$

Dieselbe kann bei reellen Wurzeln nach der Methode der Dreiteilung eines Winkels aufgelöst werden.

Demgemäss ist

$$\cos 3\varepsilon = \frac{K}{\sqrt{\frac{1}{27}J^3}},$$

$$z_1 = -\sqrt{\tfrac{4}{3}J}\,.\cos\varepsilon, \quad z_2 = +\sqrt{\tfrac{4}{3}J}\,.\cos(60^0 - \varepsilon), \quad z_3 = +\sqrt{\tfrac{4}{3}J}\,.\cos(60^0 + \varepsilon).$$

§ 4.

Wir stellen die eben entwickelten Formeln übersichtlich zusammen und gelangen damit zu folgender neuen Methode der trigonometrischen Auflösung biquadratischer Gleichungen:

Um die Gleichung mit reellen Wurzeln

$$\text{37)} \qquad x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$$

aufzulösen, berechne man zunächst

$$\text{38)} \qquad \cos 3\varepsilon = \frac{72bd + 9abc - 27c^2 - 27a^2d - 2b^3}{2(b^2 - 3ac + 12d)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{a - c}{1 - b + d},$$

und ferner

$$\cos\omega_1 = \frac{3+b+3d+4\sqrt{b^2-3ac+12d}\,.\cos\varepsilon}{3\sqrt{(a-c)^2+(1-b+d)^2}},$$

39) $$\cos\omega_2 = \frac{3+b+3d+4\sqrt{b^2-3ac+12d}\,.\cos(60^0-\varepsilon)}{3\sqrt{(a-c)^2+(1-b+d)^2}},$$

$$\cos\omega_3 = \frac{3+b+3d-4\sqrt{b^2-3ac+12d}\,.\cos(60^0+\varepsilon)}{3\sqrt{(a-c)^2+(1-b+d)^2}},$$

dann resultiren hieraus die folgenden eleganten Wurzelausdrücke

40) $$\begin{aligned} X_1 &= \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(\omega+\omega_1+\omega_2+\omega_3),\\ X_2 &= \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(\omega+\omega_1-\omega_2-\omega_3),\\ X_3 &= \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(\omega-\omega_1+\omega_2-\omega_3),\\ X_4 &= \operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(\omega-\omega_1-\omega_2+\omega_3). \end{aligned}$$

Diese bisher entwickelten Gleichungssysteme umfassen innerhalb bestimmter Grenzen formell und allgemein die Geometrie derjenigen mathematischen Probleme, deren Lösung von einer trigonometrischen Gleichung vorbestimmter Art abhängt, so dass im concreten Fall, etwa in der Theorie der Kegelschnitte, der Lemniskaten etc., die betreffenden Formeln gleich niedergeschrieben werden können. Wir werden nachher einige Beispiele geben.

§ 5.

Man kann, wenn $x = k\operatorname{tg}\varphi$ in 3) substituirt wird, über die Constante k nach Willkür verfügen und dadurch die Resolvente vereinfachen. So erhält man für die Annahme $R=1$ eine reciproke Gleichung 4. Grades für k.

Wir wollen hier noch die Auflösung der reciproken Gleichungen 4. Grades nach unserer Methode in Kürze skizziren.

Die Resolvente der gegebenen reciproken Gleichung

$$x^4-ax^3+bx^2-ax+1=0$$

geht wegen $\cos\omega_3 = 1$ über in

41) $$\cos\omega^2 - \frac{8}{b-2}\cos\omega + \frac{4a^2}{(b-2)^2} - \frac{b+6}{b-2} = 0.$$

Die Wurzeln sind

42) $$\cos\omega_1 \text{ und } \cos\omega_2 = \frac{4\pm\sqrt{(b+2)^2-4a^2}}{b-2}.$$

Wegen $\varphi_2 = 90 - \varphi_1$ und $\varphi_4 = 90 - \varphi_3$ ist

$$\omega_1 = 2(\varphi_1 + \varphi_3) - 180^0,$$
$$\omega_2 = 2(\varphi_1 - \varphi_3).$$

Hieraus ergeben sich φ_1 und φ_2 und damit die Wurzeln $x = \operatorname{tg}\varphi$.

Liegt dagegen die Gleichung

$$x^4 - ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

vor, so ist wegen

$$\cos\omega_2 = +1,$$
$$\cos\omega_3 = -1,$$

$$\text{43)} \quad \cos 2(\varphi_1 - \varphi_2) = -\frac{b+6}{\sqrt{4a^2 + (b-2)^2}}, \qquad \operatorname{tg} 2(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{2a}{2-b}.$$

Aus beiden Gleichungen ergeben sich φ_1 und φ_2 und damit die Wurzeln.

Auf ähnliche Art werden die Gleichungen

$$x^4 - bx^2 + d = 0,$$
$$x^2 - ax + b = 0$$

erledigt.

Die Auflösung der letzten Gleichung würde auf die bekannte Grunert'sche Methode geführt haben.

Die entwickelte Methode umfasst also alle Fälle und besitzt mithin den Vorteil der Allgemeinheit und Einfachheit.

§ 6.

Wir haben bisher die Reellität der Wurzeln der biquadratischen Gleichungen vorausgesetzt, wir nehmen jetzt an, dass alle Wurzeln conjugirt complex sind, und bezeichnen sie in folgender Art:

$$\text{44)} \quad \begin{aligned} x_1 &= \operatorname{tg}(u + iv), \\ x_2 &= \operatorname{tg}(u - iv), \\ x_3 &= \operatorname{tg}(u' + iv'), \\ x_4 &= \operatorname{tg}(u' - iv'). \end{aligned}$$

Dann bestehen die Ausdrücke

$$
45)\qquad
\begin{aligned}
\cos\omega &= \cos 2(u - u'),\\
\cos\omega_1 &= \cos 2(u + u'),\\
\cos\omega_2 &= \cos 2(v - v')i,\\
\cos\omega_3 &= \cos 2(v + v')i.
\end{aligned}
$$

Aus den beiden ersten folgen

$$
46)\qquad
\begin{aligned}
2u &= \tfrac{1}{2}(\omega + \omega_1),\\
2u' &= \tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega).
\end{aligned}
$$

In der bekannten Formel

$$
47)\qquad \mathrm{tg}(u + iv) = \frac{\sin 2u + \frac{i}{2}(e^{2v} - e^{-2v})}{\cos 2u + \frac{1}{2}(e^{2v} + e^{-2v})}
$$

führen wir 46) ein und berücksichtigen, dass

$$
48)\qquad
\begin{aligned}
e^{2(v+v')} &= \cos\omega_3 - \sqrt{\cos\omega_3^2 - 1},\\
e^{2(v-v')} &= \cos\omega_2 - \sqrt{\cos\omega_2^2 - 1},\\
e^{\pm 2v} &= \sqrt{(\mathfrak{Cos}\,\omega_2 \mp \mathfrak{Sin}\,\omega_2)(\mathfrak{Cos}\,\omega_3 \mp \mathfrak{Sin}\,\omega_3)},\\
e^{\pm 2v'} &= \sqrt{(\mathfrak{Cos}\,\omega_2 \pm \mathfrak{Sin}\,\omega_2)(\mathfrak{Cos}\,\omega_3 \mp \mathfrak{Sin}\,\omega_3)}.
\end{aligned}
$$

Bei der Einführung der hyperbolischen Functionen in unsere Formeln haben wir zu setzen

$$
49)\qquad
\begin{aligned}
\cos\omega_2 &= \mathfrak{Cos}\,\omega_2 = \cos 2(v - v')i,\\
\cos\omega_3 &= \mathfrak{Cos}\,\omega_3 = \cos 2(v + v')i.
\end{aligned}
$$

Substituiren wir diese Ausdrücke in 47), so ergibt sich durch Zusammenziehung zweier Wurzeln in eine bei Benutzung der Function

$$\mathfrak{Cos}(\alpha \pm \beta) = \mathfrak{Cos}\,\alpha\,\mathfrak{Cos}\,\beta \pm \mathfrak{Sin}\,\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\beta$$

schliesslich folgendes Resultat. Die complexen Wurzeln sind

$$
50)\qquad
\begin{aligned}
x_1 \text{ und } x_2 &= \frac{\sin\frac{1}{2}(\omega + \omega_1) \pm \mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_3)\sqrt{-1}}{\cos\frac{1}{2}(\omega + \omega_1) + \mathfrak{Cos}\,\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_3)},\\
x_3 \text{ und } x_4 &= \frac{\sin\frac{1}{2}(\omega - \omega_1) \pm \mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_3)\sqrt{-1}}{\cos\frac{1}{2}(\omega - \omega_1) + \mathfrak{Cos}\,\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_3)},
\end{aligned}
$$

und es gelten hierfür die in 38) und 39) berechneten Formeln, bei welchen Ein Cosinus die Einheit nicht übersteigt.

§ 7.

Die Formeln 50) und 47) gestatten eine Anwendung auf die Theorie der conformen Abbildung

$$
51)\qquad X + iY = \mathrm{tg}(u + iv).
$$

Die Complexität der Wurzeln vorausgesetzt haben wir demnach

$$52)\quad X = \frac{\sin\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)+\mathfrak{Cof}\,\frac{1}{2}(\omega_2+\omega_3)},$$

$$Y = \frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}(\omega_2+\omega_3)}{\cos\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)+\mathfrak{Cof}\,\frac{1}{2}(\omega_2+\omega_3)}$$

Betrachten wir in der z-Ebene u und v als Coordinaten eines Punktes, so beschreibt derselbe bei variabeln Werten der Coefficienten der Gleichung eine Curve. Durchläuft nun der Punkt u, v eine in der Entfernung $u=$ Const parallel zur y-Achse liegende Gerade, so beschreibt der Punkt XY in der Z-Ebene einen Kreis, dessen Gleichung

$$53)\quad X^2+Y^2+2\cot\tfrac{1}{2}(\omega+\omega_1)X-1=0$$

vermöge der Bedingung

$$2u=\tfrac{1}{2}(\omega+\omega_1)=\text{Const}$$

durch Elimination von $\frac{1}{2}(\omega_2+\omega_3)$ aus 52) abgeleitet wird, wie bekannt ist. Der Mittelpunkt hat die Abscisse $-\cot\frac{1}{2}(\omega+\omega_1)$, der Radius ist $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{2}(\omega+\omega')}$.

Da diese Darstellungsweise der Wurzeln uns in das Gebiet der isogonalen Verwandtschaften geführt hat, so wollen wir die bemerkenswertesten daraus entfliessenden Formeln und Sätze hier ableiten und werden uns mit den bekannten Functionen $\operatorname{tg}(x+iy)$, $\sin(x+iy)$, $\cos(x+iy)$ im folgenden beschäftigen.

Zunächst müssen wir die oben gegebene Bedingungsgleichung $\omega+\omega_1=$ Const in geeigneter Form entwickeln um für die Gleichungen 4. Grades mit wenigstens einem complexen Wurzelpaar die Relation zu finden, unter welcher imaginaire Wurzeln durch Kreiscoordinaten in der Z-Ebene eingedrückt werden.

Dieselbe erhalten wir ohne Weiteres aus 33), in welcher

$$\cos\omega'-\cos\omega = 2\sin\tfrac{1}{2}(\omega+\omega')\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega') = 2\sin 2u\sin(\omega-2u)$$

ist. Demnach ist auch

$$54)\quad \sin 2u^3\sin(\omega-2u)^3-\frac{2b}{Q}\sin 2u^2\sin(\omega-2u)^2$$
$$+\frac{b^2+ac-4d}{Q^2}\sin 2u\sin(\omega-2u)+\frac{a^2d-abc+c^2}{Q^3}=0,$$

oder wegen 17)

$$55)\quad \sin 2u^3((a-c)\cos 2u-(1-b+d)\sin 2u)^3$$
$$-2b\sin 2u^2((a-c)\cos 2u-(1-b+d)\sin 2u)^2$$
$$+\sin 2u(b^2+ac-4d)((a-c)\cos 2u-(1-b+d)\sin 2u)$$
$$+a^2d-abc+c^2=0.$$

Dies ist die Bedingungsgleichung zwischen den Constanten der biquadratischen Gleichungen, wenn complexe Wurzelpaare $X+iY$ derselben bei der Voraussetzung $2u=$ Const durch Punkte Z eines Kreises charakterisirt werden sollen.

Die Bedingung 55) wird durch die Annahme

$$2u=\tfrac{1}{2}(\omega+\omega_1)=90^0$$

zu

$$56)\qquad (1-b+d)(1-d)^2=(a-c)(ad-c)$$

vereinfacht und entsprechen die Wurzeln dem Kreise

$$X^2+Y^2=1.$$

Die Gleichung 56) würde auch durch Elimination von φ zwischen den Relationen

$$\cos 4\varphi-a\cos 3\varphi+b\cos 2\varphi-c\cos\varphi+d=0,$$
$$\sin 4\varphi-a\sin 3\varphi+b\sin 2\varphi-c\sin\varphi\qquad=0$$

hervorgehen.

Wir entwickeln 55) nach Potenzen von $\cot 2u$, es resultirt

$$\cot 2u^7(abc-a^2d-c^2)-\cot 2u^5(a-c)(b^2+ac-4d)$$
$$+\cot 2u^4(2b(a-c)^2+(b^2+ac-4d)(1-b+d)-3(a^2d-abc+c^2))$$
$$-\cot 2u^3(a-c)((a-c)^2+4b(1-b+d)+2(b^2+ac-4d))$$
57)
$$+\cot 2u^2((a-c)^2(3-b+3d)+2b(1-b+d)^2$$
$$+2(1-b+d)(b^2+ac-4d)-3(a^2d-abc+c^2))$$
$$-\cot 2u(a-c)(b^2+ac-4d+(1-b+d)(3+b+3d))$$
$$+(1-b+d)(1-d)^2-(a-c)(ad-c)=0.$$

Bemerken wir nun, dass, wenn aus der Gleichung

$$58)\quad \sin 2u^3\sin 2u'^3-\frac{2b}{Q}\sin 2u^2\sin 2u'^2+\frac{b^2+ac-4d}{Q^2}\sin 2u\sin 2u'+\frac{a^2d-abc+c^2}{Q^2}=0$$

der geeignete Wurzelwert bestimmt ist, dann auch aus dieser Wurzel

59) $$W = (a-c)\sin 2u \cos 2u - (1-b+d)\sin 2u^2,$$

zwei Wurzeln $2u$ und $2u'$ hervorgehen.

Indem wir also hiermit das 2. complexe Wurzelpaar der biquadratischen Gleichungen berücksichtigen, für welches $\frac{1}{2}(\omega - \omega_1) = 2u'$ = Const zu setzen ist, so ergibt sich aus 58) ohne Weiteres, dass für beide Wurzelpaare dieselbe Bedingungsgleichung besteht, dass demnach die den conplexen Wurzeln der biquadratischen Gleichung entsprechenden beiden Wurzeln der Bedingungsgleichung zwei der Lage nach bekannte Kreise

60) $$\begin{aligned} &X^2 + Y^2 + 2\cot 2u\,X - 1 = 0, \\ &X^2 + Y^2 + 2\cot 2u'\,X - 1 = 0, \end{aligned}$$

als geometrischen Ort der Wurzeln der Hauptgleichung bestimmen.

§ 8.

Wir discutiren jetzt den Fall $\omega_2 + \omega_3$ = Const, wobei wir also voraussetzen, dass der Punkt uv der z-Ebene auf einer in dem Abstande v parallel zur x-Achse liegenden Geraden fortrückt. Aus den Gleichungen erhalten wir nach Elimination von $\frac{1}{2}(\omega + \omega_1)$ die bekannte Kreisgleichung

61) $$X^2 + Y^2 - 2\,\mathfrak{Cot}\tfrac{1}{2}(\omega_2 + \omega_3)\,Y + 1 = 0.$$

Wir führen ein

$$\mathfrak{Cos}(\omega_2 + \omega_3) = g = \mathfrak{Cos}\,\omega_2\,\mathfrak{Cos}\,\omega_3 + \sqrt{(\mathfrak{Cos}\,\omega_2^2 - 1)(\mathfrak{Cos}\,\omega_3^2 - 1)}$$

woraus folgt

$$g^2 - 2\,\mathfrak{Cos}\,\omega_2\,\mathfrak{Cos}\,\omega_3\,g + \mathfrak{Cos}\,\omega_2^2 + \mathfrak{Cos}\,\omega_3^2 - 1 = 0,$$

und

$$\cos\omega_1^2 - (g^2 + A^2 - 2B - 1)\cos\omega_1 + 2Cg = 0.$$

Aus dieser und der Resolvente

$$\cos\omega_1^3 - A\cos\omega_1^2 + B\cos\omega_1 - C = 0$$

geht durch Elimination von $\cos\omega_1$ die Resultante, geordnet nach Potenzen von g hervor:

63) $$\begin{aligned} &g^6 - 2Bg^5 + (2A^2 + 4AC - 4B - 3)g^4 - 2(A^2B - 2B^2 + AC - 2B + 4C^2)g^3 \\ &+ (A^4 - 4A^2 - 4A^2B + 5B^2 + 4ABC - 6AC - 12C^2 + 8B + 3)g^2 \\ &- 2(A^3C - A^2B^2 - A^2B - 3ABC - 3AC + 3C^2 + B(B+1)^2)g \\ &+ (A^2 - 2B - 1)(A^2 - B - 1)^2 - (A(A^2 - 2B - 1) + C)^2 = 0. \end{aligned}$$

Demnach haben wir auch hier folgendes:

... quadratischen Gleichungen ... bei bestimmten ...

änderlicher
$2(\varphi_1-\varphi_2)$
$3+b+3d)$.

die Ellipse

ingungs-
p, q die
erisiren,
, und

auf.
die
sche
ar-
bst
s,

$$W = (a - c)\sin 2u \cos 2u - (1 - b + d)\sin 2u^2, \tag{59}$$

zwei Wurzeln $2u$ und $2u'$ hervorgehen.

Indem wir also hiermit das 2. complexe Wurzelpaar der biquadratischen Gleichungen berücksichtigen, für welches $\frac{1}{2}(\omega - \omega_1) = 2u' = \text{Const}$ zu setzen ist, so ergibt sich aus 58) ohne Weiteres, dass für beide Wurzelpaare dieselbe Bedingungsgleichung besteht, dass demnach die den conplexen Wurzeln der biquadratischen Gleichung entsprechenden beiden Wurzeln der Bedingungsgleichung zwei der Lage nach bekannte Kreise

$$\begin{aligned} &X^2 + Y^2 + 2\cot 2u\, X - 1 = 0, \\ &X^2 + Y^2 + 2\cot 2u'\, X - 1 = 0, \end{aligned} \tag{60}$$

als geometrischen Ort der Wurzeln der Hauptgleichung bestimmen.

§ 8.

Wir discutiren jetzt den Fall $\omega_2 + \omega_3 = \text{Const}$, wobei wir also voraussetzen, dass der Punkt uv der z-Ebene auf einer in dem Abstande v parallel zur x-Achse liegenden Geraden fortrückt. Aus den Gleichungen erhalten wir nach Elimination von $\frac{1}{2}(\omega + \omega_1)$ die bekannte Kreisgleichung

$$X^2 + Y^2 - 2\,\mathfrak{Cot}\tfrac{1}{2}(\omega_2 + \omega_3)\, Y + 1 = 0. \tag{61}$$

Wir führen ein

$$\mathfrak{Cos}(\omega_2 + \omega_3) = g = \mathfrak{Cos}\,\omega_2\,\mathfrak{Cos}\,\omega_3 + \sqrt{(\mathfrak{Cos}\,\omega_2^2 - 1)(\mathfrak{Cos}\,\omega_3^2 - 1)}$$

woraus folgt

$$g^2 - 2\,\mathfrak{Cos}\,\omega_2\,\mathfrak{Cos}\,\omega_3\, g + \mathfrak{Cos}\,\omega_2^2 + \mathfrak{Cos}\,\omega_3^2 - 1 = 0,$$

und

$$\cos\omega_1^2 - (g^2 + A^2 - 2B - 1)\cos\omega_1 + 2Cg = 0.$$

Aus dieser und der Resolvente

$$\cos\omega_1^3 - A\cos\omega_1^2 + B\cos\omega_1 - C = 0$$

geht durch Elimination von $\cos\omega_1$ die Resultante, geordnet nach Potenzen von g hervor:

$$\begin{aligned} &g^6 - 2Bg^5 + (2A^2 + 4AC - 4B - 3)g^4 - 2(A^2B - 2B^2 + AC - 2B + 4C^2)g^3 \\ &+ (A^4 - 4A^2 - 4A^2B + 5B^2 + 4ABC - 6AC - 12C^2 + 8B + 3)g^2 \\ &- 2(A^3C - A^2B^2 - A^2B - 3ABC - 3AC + 3C^2 + B(B+1)^2)g \\ &+ (A^2 - 2B - 1)(A^2 - B - 1)^2 - (A(A^2 - 2B - 1) + C)^2 = 0. \end{aligned} \tag{63}$$

Demnach haben wir auch hier folgendes:

Betrachtet man bei allen denjenigen biquadratischen Gleichungen mit complexen Wurzeln $X + iY$, deren Coefficienten bei bestimmten Werten von g der Bedingungsgleichung 62) genügen, die Grössen X und Y als Coordinaten eines Punktes Z, so ist der geometrische Ort dieser Punkte ein Kreis, dessen Mittelpunkt um

$$\mathfrak{Cot}\,\tfrac{1}{2}(\omega_2 + \omega_3) = \sqrt{\frac{g+1}{g-1}} = \frac{e^{2v} + e^{-2v}}{e^{2v} - e^{-2v}}$$

vom Coordinatenumfang entfernt auf der Y-Achse liegt, und dessen Radius $= \sqrt{\dfrac{2}{g-1}}$ ist.

Da die dem zweiten Wurzelpaar der Hauptgleichung entsprechende Bedingung $\omega_2 - \omega_3 =$ Const auf dieselbe so eben abgeleitete Bedingungsgleichung 62) führt, so existirt also ein zweiter Kreis in ähnlicher Lage, und für beide sind die vom Anfangspunkte aus an die Kreise gezogenen Tangenten von der Länge $= 1$. Die durch die Wurzeln der aufgestellten Bedingungsgleichungen bestimmten einander entsprechenden 2 Kreispaare bestimmen demnach in je zwei entsprechenden Durchschnittspunkten die complexen Wurzeln der biquadratischen Gleichung.

§ 9.

Sind die Wurzeln zu zweien complex und die übrigen reell, so nehmen sie die Form an

$$\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{tg}\varphi_1, \\ x_2 &= \operatorname{tg}\varphi_2, \\ x_3 &= \operatorname{tg}(u + iv), \\ x_4 &= \operatorname{tg}(u - iv). \end{aligned} \tag{63}$$

Demnach ist

$$\begin{aligned} \omega &= \varphi_1 + \varphi_2 + 2u, \\ \omega_1 &= \varphi_1 + \varphi_2 - 2u, \\ \omega_2 &= \varphi_1 - \varphi_2 + 2vi, \\ \omega_3 &= \varphi_1 - \varphi_2 - 2vi, \end{aligned} \tag{64}$$

wo

$$\cos\omega'^3 - A\cos\omega'^2 + B\cos\omega' - C = 0.$$

Ferner ist, wenn

$$\cos\omega' = \frac{\dfrac{3+b+3d}{3} - z}{Q}, \tag{65}$$

66) $z^3 - \frac{4}{3}(b^2 - 3ac + 12d)z + \frac{8}{27}(72bd + 9abc - 27c^2 - 27a^2d - 2b^3) = 0.$

Die complexen Wurzeln dieser Gleichung besitzen eine bemerkenswerte geometrische Eigenschaft, welche wir entwickeln wollen.

Die Wurzeln der Resolvente sind zu zweien complex, wir schreiben sie

67) $$\cos\omega_2 = X' + iY' = \cos(\varphi_1 - \varphi_2 + 2vi).$$

Dieser Function complexen Arguments entspricht aber eine bekannte conforme Abbildung, und es ist, wenn

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \delta$$

68) $$X' = \frac{e^{2v} + e^{-2v}}{2}\cos\delta, \quad Y' = \frac{e^{2v} - e^{-2v}}{2}\sin\delta.$$

Vermittelst einfacher Eliminationen erhalten wir hieraus zunächst

69) $$\frac{X'^2}{\cos\delta^2} - \frac{Y'^2}{\sin\delta^2} = 1.$$

Diese Hyperbel in der Z-Ebene entspricht den Linien $x - \varphi_1 - \varphi_2 \pm 2n\pi$ in der z-Ebene.

Die complexen Wurzeln der Gleichung

$$z = p \pm qi$$

eingesetzt in 65) ergeben

70) $$X' = \frac{\frac{3 + b + 3d}{3} - p}{Q}, \quad Y' = \frac{q}{Q},$$

mithin wird aus 69):

71) $$\frac{\left(p - \frac{3 + b + 3d}{3}\right)^2}{Q^2\cos\delta^2} - \frac{Q^2\sin\delta^2}{q^2} = 1.$$

Wir gewinnen damit folgendes Resultat:

Betrachtet man die Grössen p und q der complexen Wurzeln $z = p + qi$ der Cardinalresolvente der biquadratischen Gleichungen, welche 2 reelle und 2 complexe Wurzeln besitzen, als Coordinaten eines Punktes Z in der entsprechenden Ebene, so ist der geometrischer Ort dieser Punkte für alle diejenigen Gleichungen, welche der Bedingung $\delta = \text{Const}$ genügen, eine Hyperbel, deren Excentricität $= Q$, deren Asymptotenwinkel $= 2\delta$ ist, und deren Halbachsen bezüglich $Q\cos\delta$ und $Q\sin\delta$ sind. Bei variabeln Werten von $\delta = \varphi_1 - \varphi_2$, aber constantem

72) $$Q^2 = (a-c)^2 + (1-b+d)^2$$

tritt eine Folge von confocalen Hyperbeln mit unveränderlicher Exentricität Q auf, in welchen die Asymptotenwinkel durch $2(\varphi_1 - \varphi_2)$ definirt sind. Der Coordinatenanfang hat die Abscisse $-\frac{1}{3}(3+b+3d)$.

Ferner setzen wir $v = \text{Const}$ voraus. Dem entspricht die Ellipse

73) $$\frac{X'^2}{\left(\frac{e^{2v}+e^{-2v}}{2}\right)^2} + \frac{Y'^2}{\left(\frac{e^{2v}-e^{-2v}}{2}\right)^2} = 1.$$

Wir setzen

$$\cos 2vi = \frac{e^{2v}+e^{-2v}}{2} = h,$$

wo

$$2h^2 - 1 = g,$$

und analog dem vorigen ist

74) $$\frac{\left(p - \frac{3+b+3d}{3}\right)^2}{\frac{1}{2}(g+1)Q^2} + \frac{q^2}{\frac{1}{2}(g-1)Q^2} = 1.$$

75) $$X^2 + Y^2 - 2\sqrt{\frac{g+1}{g-1}}\,Y + 1 = 0.$$

Hierin ist

$$\frac{g-1}{g+1} = \frac{h^2-1}{h^2} = \operatorname{tg}\varepsilon^2$$

und ε hat eine einfache geometrische Bedeutung.

Demgemäss haben wir den Satz:

Bei der Annahme $v = \text{Const}$, welche wie δ auf die Bedingungsgleichung 62) führt, liegt der Punkt Z, dessen Coordinaten p, q die complexe Wurzel $Z = p + qi$ der Cardinalresolvente charakterisiren, auf einer Ellipse, deren Halbachsen hQ und $\sqrt{h^2-1}\,Q$ sind, und deren Exentricität

$$Q^2 = (a-c)^2 + (1-b+d)^2$$

ist. Bei constantem Q tritt eine Folge von confocalen Ellipsen auf. Verbindet sich hiermit $v = \text{Const}$, so erhalten wir eine feste, für die biquadratischen Gleichungen vorbezeichneter Art charakteristische Ellipse als geometrischen Ort der complexen Wurzeln Z der Cardinalresolvente jener Gleichungen, deren complexe Wurzeln selbst wiederum in ihrer Aufeinanderfolge durch Punkte eines Kreises, dessen Gleichung 75) ist, definirt sind.

Bei Erfüllung der genannten Bedingungen geht also ein Wandern in drei einander entsprechenden Curven, in einer Geraden, in einer Ellipse und einem Kreise vor sich.

Die Bedingung $\delta =$ Const setzt für die Hyperbel $g < 1$, dagegen die Bedingung $\delta =$ Const für die Ellipse g oder $h > 1$ voraus.

Die durch die quadratische und kubische Invariante ausgedrückten p und q sind:

76)
$$p = -2\left(\sqrt[3]{-K+\sqrt{K^2-\left(\frac{J}{3}\right)^2}}+\sqrt[3]{-K-\sqrt{K^2-\left(\frac{J}{3}\right)^2}}\right),$$
$$q = 2\left(\sqrt[3]{-K+\sqrt{K^2-\left(\frac{J}{3}\right)^2}}-\sqrt[3]{-K-\sqrt{K^2-\left(\frac{J}{3}\right)^2}}\right)\sqrt{3}.$$

In wie fern die Parabel als geometrischer Ort der reellen und complexen Wurzeln der Gleichungen 4. Grades betrachtet werden kann, haben wir Teil 69, 2. Heft gezeigt.

§ 10.

Um noch zum Schluss für die Gleichungen 4. Grades mit reellen Wurzeln ähnliche Relationen, wie die vorhin entwickelten abzuleiten, gehen wir auf die Formeln 30)—40) zurück.

Die Resolvente

$$\cos\omega'^3 - A\cos\omega'^2 + B\cos\omega' - C = 0$$

oder

$$\cos(\delta\pm\delta')^3 - A\cos(\delta\pm\delta')^2 + B\cos(\delta\pm\delta') - C = 0$$

gibt aufgelöst, wenn

$$\cos\delta\cos\delta' = x, \qquad \sin\delta\sin\delta' = y$$

die Beziehungen

$$x^3 - Ax^2 + \tfrac{1}{4}(A^2+B)x - \tfrac{1}{8}(AB-C) = 0,$$

$$x^2 - \tfrac{2}{3}Ax + \frac{y^2+B}{3} = 0.$$

Beachten wir, dass

$$\frac{x^2}{\cos\delta^2} + \frac{y^2}{\sin\delta^2} = 1,$$

so ist die Resultante von

$$x^3 - \frac{3+b+3d}{Q}x^2 + \frac{3+3d^2+2d+2b+2bd+ac}{Q^2}x$$
$$- \frac{(1+b+d)(1-d)^2+(a+c)(ad+c)}{Q^3} = 0 \quad \text{und}$$

77)

$$x^2(\operatorname{tg}\delta^2 - 3) + 2\frac{(3+b+3d)}{Q}x + \cos\delta^2 - \frac{4(1-d)^2+(a+c)^2}{Q^2} = 0$$

eine Gleichung 6. Grades für $\operatorname{tg}\delta^2$ oder $\cos\delta^2$.

Es ist nun gemäss der Bedeutung von ω_2 und ω_3

78)
$$\cos\omega_2 = \cos\delta\cos\delta' - \sin\delta\sin\delta' = \frac{\frac{3+b+3d}{3} - z_2}{Q}$$
$$\cos\omega_3 = \cos\delta\cos\delta' + \sin\delta\sin\delta' = \frac{\frac{3+b+3d}{3} - z_3}{Q},$$

die z folgen aus

79) $z^3 - \frac{4}{3}(b^2 - 3ac + 12d)z + \frac{8}{27}(72bd + 9abc - 27c^2 - 27a^2d - 2Q^3) = 0.$

Aus den obigen Formeln resultirt

$$\cos\delta\cos\delta' = \frac{\frac{3+b+3d}{3} - \frac{1}{2}(z_2+z_3)}{Q},$$
$$\sin\delta\sin\delta' = \frac{\frac{1}{2}(z_2 - z_3)}{Q},$$

und hieraus folgt durch Elimination von δ oder δ' die Ellipse

80)
$$\frac{\left(\frac{1}{2}(z_3+z_3) - \frac{3+b+3d}{3}\right)^2}{Q^2\cos\delta^2} + \frac{(\frac{1}{2}(z_2-z_3))^2}{Q^2\sin\delta^2} = 1$$

mit den Halbachsen $Q\cos\delta$, $Q\sin\delta$.

Der Coordinatenanfang hat die Abscisse $-\frac{1}{3}(3+b+3d)$.

In der letzten Gleichung kann statt δ auch δ' eingesetzt werden, so dass allgemein 3 Paar Ellipsen vorhanden sind, deren Achsen an die Bedingung

81)
$$A^2 + B^2 = A'^2 + B'^2 = \ldots = Q^2$$

geknüpft sind. Der durch $\frac{B}{A} = \operatorname{tg}\delta$ definirte Winkel δ ist somit geometrisch bestimmt

Betrachtet man demnach für die bestimmte Classe der biquadratischen Gleichungen mit reellen Wurzeln, welche der Bedingung $\delta = \text{Const}$ und $Q = \text{Const}$ genügen, die aus der Cardinalresolvente entnommenen Wurzelausdrücke

$$X = \tfrac{1}{2}(z_2 + z_3) = -\frac{z_1}{2}$$

$$Y = \tfrac{1}{2}(z_2 - z_3)$$

als Coordinaten eines Punktes, so ist der geometrische Ort dieser Punkte eine Ellipse.

Den betreffenden Gleichungen können wir nun folgende Form geben, wenn wir zur Abkürzung $e = \dfrac{3+b+3d}{3}$ setzen:

$$\frac{\left(4\sqrt{\frac{J}{3}}\,.\cos\varepsilon - e\right)^2}{Q^2\cos\delta^2} + \frac{\left(4\sqrt{\frac{J}{3}}\,.\sin\varepsilon\right)^2}{\frac{1}{3}Q^2\sin\delta^2} = 1,$$

81a)
$$\frac{\left(4\sqrt{\frac{J}{4}}\,.\cos(60^0+\varepsilon)+e\right)^2}{Q^2\cos\delta_1{}^2} + \frac{\left(4\sqrt{\frac{J}{3}}\,.\sin(60^0+\varepsilon)\right)^2}{\frac{1}{3}Q^2\sin\delta_1{}^2} = 1,$$

$$\frac{\left(4\sqrt{\frac{J}{3}}\,.\cos(60^0-\varepsilon)+e\right)^2}{Q^2\cos\delta_{11}{}^2} + \frac{\left(4\sqrt{\frac{J}{3}}\,.\sin(60^0-\varepsilon)\right)^2}{\frac{1}{3}Q^2\sin\delta_{11}{}^2} = 1.$$

Hierin ist $\delta = \varphi_1 - \varphi_2$ oder $\varphi_3 - \varphi_4$ etc.

Ein um den Coordinatenanfang mit dem Radius $4\sqrt{\frac{J}{3}}$ beschriebener Kreis trifft demnach diese Ellipsen unter andern in drei bestimmten Punkten, deren Polarwinkel ε, $120^0 - \varepsilon$ und $120^0 + \varepsilon$ sind. Diese Punkte bilden ein gleichseitiges Dreieck. Die Achsen der Ellipsenpaare haben die Beziehungen

82)
$$A^2 + 3B^2 = A'^2 + 3B'^2 \text{ etc.}$$

§. 11.

Eine weitere Relation zwischen den Wurzeln der Resolvente lässt sich in Form einer Gleichung aufstellen.

Wir führen ein

83)
$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \tau.$$

Die Entwickelung von $\cos(\omega_2 + \omega_3) = \cos(\tau - \omega_1)$ ergibt, wenn wir setzen

$$\cos\omega_2\cos\omega_3 = \frac{C}{\cos\omega^1},$$

$$\sin\omega_2^2\sin\omega^3_2 = 1 - A^2 + 2B + \frac{C^2}{\cos\omega_1^2} + \cos\omega_1^2$$

die Gleichung

$$84)\quad \cos\omega_1^6 - (A^2 - 2B)\cos\omega_1^4$$
$$+\left(\frac{(\cos\tau^2 + 2C\cos\tau - A^2 + 2B)^2}{4\sin\tau^2} + 2C\cos\tau + C^2\right)\cos\omega_1^2 - C^2 = 0.$$

Bilden wir

$$\cos\omega_1^2 = x,$$

so resultirt aus der letzten Gleichung in Verbindung mit der Gleichung der Wurzelquadrate durch Vergleichung der beiden die Bedingung

$$85)\quad (\cos\tau^2 + 2C\cos\tau - A^2 + 2B)^2 = 4(B^2 - 2AC - C^2 - 2C\cos\tau)\sin\tau^2$$

wird dieselbe nach Potenzen von $\cos\tau$ geordnet, so kommt

$$86)\quad \cos\tau^4 - 4C\cos\tau^3 + 2(-A^2 + 2B + 2B^2 - 4AC)\cos\tau^2$$
$$-4C(A^2 - 2B - 2)\cos\tau + A^4 - 4A^2B + 8AC + 4C^2 = 0$$

und die Wurzeln sind

$$87)\quad \begin{aligned} \tau &= \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \\ \tau_1 &= \omega_1 + \omega_2 - \omega_3, \\ \tau_2 &= \omega_1 - \omega_2 + \omega_3, \\ \tau_3 &= -\omega_1 + \omega_2 + \omega_3. \end{aligned}$$

Von diesen Entwickelungen werden wir nachher Gebrauch machen

§ 12.

In einigen geometrischen Anwendungen der in den ersten §§ entwickelten Methoden kommt der Fall vor, dass

$$88)\quad a + c = 0$$

ist. Mit dieser Bedingung ist auch die andere $A + C = 0$ verknüpft.

Einige der dort angeführten Formeln vereinfachen sich dadurch bedeutend, so ist

$$2\sqrt{R}\sin\omega = A,\quad 2\sqrt{R}\cos\omega = A',$$

$$89)\quad \frac{\cos\delta}{\cos\delta'} = -\frac{\sin\sigma}{\sin\sigma'} \quad \text{oder} \quad \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos(\varphi_3 - \varphi_4)} = -\frac{\sin(\varphi_1 + \varphi_2)}{\sin(\varphi_3 + \varphi_4)}.$$

Ferner bestehen die Relationen

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\omega^2}{(\cos\delta+\cos\delta')^2}+\frac{\sin\frac{1}{2}\omega^2}{(\cos\delta-\cos\delta')^2}=\frac{1}{R^2},$$

wo

$$R=\frac{4(1-d)^2}{4a^2+(1-b+d)^2},$$

$$90)\quad \cos\sigma\cos\delta'=\frac{R+\cos\delta'^2-\cos\delta^2}{2\sqrt{R}},\quad \cos\sigma'\cos\delta=\frac{R-\cos\delta'^2+\cos\delta^2}{2\sqrt{R}},$$

$$\cos\delta\sin(\sigma-\sigma')=\sqrt{R}\sin\sigma.$$

Die Resolvente ist

$$91)\quad \cos\omega'^3-\frac{3+b+3d}{Q}\cos\omega'^2+(R-1)\cos\omega' + \frac{3+b+3d-R(1-b+d)}{Q}=0,$$

und diese ist es, welche in der Geometrie der Lemniskate, welche wir später behandeln werden, auftritt.

II. Teil.

§ 13.

Die im I. Teil entwickelten Formeln nehmen ihren Ausgangspunkt von der biquadratischen Gleichung für $\operatorname{tg}\varphi$. So einfach auch im Allgemeinen die daraus entwickelten Formeln sind, so lassen sich dieselbdn in noch kürzerer und eleganterer Weise aus einer andern Gleichungsform ableiten, welche den Vorteil bietet, ohne Aufstellung einer Gleichung durch die blosse Ansicht der Constanten die Gleichungssysteme und Formeln niederschreiben zu können. Diese Form ist

$$1)\quad a+b\sin\varphi+c\cos\varphi+d\sin2\varphi+e\cos2\varphi=0,$$

welche wir den folgenden Entwickelungen zu Grunde legen.

Aus ihr resultirt

$$2)\quad (a-c-e)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi^4+2(b-2d)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi^3+2(a-3e)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi^2 +2(b+2d)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi+a+c+e=0,$$

Ferner ist

$$3)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4)=\frac{d}{e},$$

während die Resolvente sich umformt in

$$4)\quad \cos\gamma^3 - \frac{a}{\sqrt{d^2+e^2}}\cos\gamma^2 + \left(\frac{1}{4}\frac{b^2+c^2}{d^2+e^2} - 1\right)\cos\gamma$$
$$+ \frac{4a(d^2+e^2) - 2b(cd-be) - e(b^2+c^2)}{4(d^2+e^2)\sqrt{d^2+e^2}} = 0.$$

Die Wurzeln derselben sind

$$5)\quad \begin{aligned} \gamma_1 &= \tfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3-\varphi_4) = \tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma') \\ \gamma_2 &= \tfrac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2+\varphi_3-\varphi_4) = \tfrac{1}{2}(\delta+\delta') \\ \gamma_3 &= \tfrac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2-\varphi_3+\varphi_4) = \tfrac{1}{2}(\delta-\delta'). \end{aligned}$$

Der Abkürzung wegen schreiben wir 2)

$$6)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi^4 - A\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi^3 + B\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi^2 - C\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi + D = 0.$$

Demnach ergibt sich durch Vergleichung von 2) und 6) nach Gleichsetzen der Coefficienten gleich hoher Potenzen von $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$

$$7)\quad \begin{aligned} a &= 3+B+3D, \\ b &= -2(A+C), \\ c &= 4(D-1), \\ d &= A-C, \\ e &= 1-B+D. \end{aligned}$$

Man kann demnach die eine der Gleichungsformen 1) und 6) leicht aus der anderen ableiten.

Ferner ist

$$8)\quad \begin{aligned} \cos\gamma_1 &= \frac{a+\sqrt{4a^2-3(b^2+c^2)+12(d^2+e^2)}\,.\cos\varepsilon}{3\sqrt{d^2+e^2}}, \\ \cos\gamma_2 &= \frac{a-\sqrt{4a^2-3(b^2+c^2)+12(d^2+e^2)}\,.\cos(60^0-\varepsilon)}{3\sqrt{d^2+e^2}}, \\ \cos\gamma_3 &= \frac{a-\sqrt{4a^2-3(b^2+c^2)+12(d^2+e^2)}\,.\cos(60^0+\varepsilon)}{3\sqrt{d^2+e^2}}. \end{aligned}$$

Die Beziehung zwischen δ und δ' ergibt sich aus

$$9)\quad \cos\tfrac{1}{2}\delta^2 - 4\cos\tfrac{1}{2}\delta^2\cos\tfrac{1}{2}\delta'^2 + \cos\tfrac{1}{2}\delta'^2$$
$$+ \frac{2a}{\sqrt{d^2+e^2}}\cos\tfrac{1}{2}\delta\cos\tfrac{1}{2}\delta' - \frac{1}{4}\frac{b^2+c^2}{d^2+e^2} = 0,$$

und es zeigt sich somit, dass die typische Form 1) die Gleichungen sehr vereinfacht. Endlich bestimmen wir noch

$$10)\quad \cos 3\varepsilon = \frac{8a^3-72a(d^2+e^2)-9a(b^2+c^2)+54b(cd-be)+27e(b^2+c^2)}{(4a^2-3(b^2+c^2)+12(d^2+e^2))^{\frac{3}{2}}}.$$

§ 14.

Wir wollen jetzt die geometrische Bedeutung der Wurzeln der Resolvente 4) nachweisen.

Auf einem Kreise vom Radius s seien 4 Punkte A, B, C, D gegeben. Die Radien OA etc. mögen mit einem festen Radius OE bezüglich die Winkel φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 bilden.

Wir fällen vom Mittelpunkt des Kreises auf die Sehnen AB und CD die Senkrechten p_1 und p_2, welche mit dem festen Radius bezüglich die Winkel Θ und Θ' einschliessen, dann ist

$$\Theta = \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = \tfrac{1}{2}\sigma,$$

$$\Theta' = \tfrac{1}{2}(\varphi_3 + \varphi_4) = \tfrac{1}{2}\sigma',$$

mithin

$$\Theta - \Theta' = \tfrac{1}{2}(\sigma - \sigma') = \gamma_1.$$

Es ist aber $\Theta - \Theta'$, wie man sofort aus der Figur ersieht, dem Winkel oder besser dem Supplement des Winkels gleich, welchen die betreffenden Seiten des Kreisvierecks $ABCD$ mit einander einschliessen. Führt man die Betrachtung für $\delta \pm \delta'$ in ähnlicher Art weiter aus, so ergibt sich mit Hülfe bekannter Kreissätze, dass allgemein γ_1, γ_2, γ_3 nichts anderes sind, als die bezüglichen Winkel zwischen den gegenüberstehenden Seiten des Kreisvierecks und zwischen den Diagonalnn desselben, welche letztere übrigens auch als Seiten aufgefasst werden können.

Hiermit haben wir ein wichtiges weiteres Moment für die geometrische Deutung unserer Ausdrücke gewonnen.

Nach den Formeln 14) und 15) im I. Teil haben wir nun:

$$\text{11)} \qquad \sin\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\delta}{2} + \sin\frac{\sigma'}{2}\cos\frac{\delta'}{2} = \frac{be - cd}{2(d^2 + e^2)},$$

$$\text{12)} \qquad \cos\frac{\sigma}{2}\cos\frac{\delta}{2} + \cos\frac{\sigma'}{2}\cos\frac{\delta'}{2} = -\frac{bd + ce}{2(d^2 + e^2)},$$

und da

$$\cos\frac{\delta}{2} = \frac{p_1}{s}, \qquad \cos\frac{\delta'}{2} = \frac{p_2}{s},$$

so erhalten wir

$$\text{13)} \qquad \begin{aligned} p_1 \sin\Theta + p_2 \sin\Theta' &= -\frac{be - cd}{2(d^2 + e^2)} \cdot s, \\ p_1 \cos\Theta + p_2 \cos\Theta' &= -\frac{bd + ce}{2(d^2 + e^2)} \cdot s. \end{aligned}$$

Quadrirt und addirt geben diese Gleichungen

14) $$p_1^2 + 2p_1 p_2 \cos\gamma + p_2^2 = \tfrac{1}{4}\frac{b^2+c^2}{d^2+e^2}\cdot s^2.$$

Die Gerade, welche die Fusspunkte von p_1 und p_2 mit einander verbindet, sei P, dann ist auch

15) $$p_1^2 - 2p_1 p_2 \cos\gamma + p_2^2 = P^2.$$

Subtrahiren wir die beiden letzten Gleichungen, so folgt die Relation

16) $$4p_1 p_2 \cos\gamma = \tfrac{1}{4}\frac{b^2+c^2}{d^2+e^2}\cdot s^2 - P^2.$$

Die Mitte von P sei mit dem Kreismittelpunkte durch die Strecke ϱ verbunden, nach einem bekannten Satze haben wir dann

17) $$p_1^2 + p_2^2 = 2\varrho^2 + \frac{P^2}{2}$$

Wir substituiren für $p_1^2 + p_2^2$ den aus 15) folgenden Wert, dann folgt

18) $$4p_1 p_2 \cos\gamma = 4\varrho^2 - P^2.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit 16), so resultirt die wichtige Formel

19) $$\varrho^2 = \tfrac{1}{16}\frac{b^2+c^2}{d^2+e^2}\cdot s^2.$$

Denselben Ausdruck hätten wir erhalten, wenn wir von zwei andern Seiten des Kreisvierecks ausgegangen wären. Die drei Mittellinien eines Kreisvierecks schneiden sich mithin in einem Punkte. Dieser Satz gilt übrigens allgemein von jedem Viereck.

Wir bemerken noch, dass aus 19) in Beziehung auf 7)

20) $$\frac{\varrho^2}{s^2} = \frac{\tfrac{1}{4}(A+C)^2 + (1-D)^2}{(A-C)^2 + (1-B+D)^2} = \frac{R}{4} \quad \text{folgt.}$$

Die geometrische Bedeutung von R ist hiermit nachgewiesen. Vergl. I. 22).

Bevor wir die allgemeinen Formeln aufstellen, wollen wir noch aus den vorstehenden einzelne Sätze ableiten.

Aus 17) und 19) folgt

21) $$\begin{aligned} 2(p_1^2 + p_2^2) &= P_1^2 + \tfrac{1}{4}\frac{b^2+c^2}{d^2+e^2}\cdot s^2, \\ 2(p_3^2 + p_4^2) &= P_2^2 + \tfrac{1}{4}\frac{b^2+c^2}{d^2+e^2}\cdot s^2, \\ 2(p_5^2 + p_6^2) &= P_3^2 + \tfrac{1}{4}\frac{b^2+c^2}{d^2+e^2}\cdot s^2. \end{aligned}$$

Die Addition dieser Ausdrücke ergibt

$$22)\qquad 2\Sigma p^2 = \Sigma P^2 + \tfrac{3}{4}\,\frac{b^2+c^2}{d^2+e^2}\cdot s^2.$$

Ferner ist

$$23)\qquad \Sigma p^2 = \tfrac{1}{4}\,\frac{b^2+c^2}{d^2+e^2}\cdot s^2 + 2s^2.$$

Diese Formel folgt nämlich aus 21) im I. T. oder aus

$$\cos\frac{\delta+\delta'}{2}\cos\frac{\delta-\delta'}{2}+\cos\frac{\sigma-\sigma'}{2}\cos\frac{\delta-\delta'}{2}+\cos\frac{\sigma-\sigma'}{2}\cos\frac{\delta+\delta'}{2}=R-1.$$

Ist nun S die Länge einer Sehne, so erhalten wir wegen

$$p^2 = s^2 - \frac{S^2}{4}$$

aus den vorstehenden Formeln

$$24)\qquad 4(P_1{}^2{}_2+P^2+P_3{}^2)=S_1{}^2+S_2{}^2+S_3{}^2+S_4{}^2+S_5{}^2+S_6{}^2=16(s^2-\varrho^2).$$

Oder:

Die Summe der Quadrate über den Seiten und Diagonalen eines Kreisvierecks ist gleich der vierfachen Summe der Quadrate über den drei Mittellinien.

§ 15.

Aus der Gleichung

$$25)\qquad \cos\tfrac{1}{2}(\delta\pm\delta')^3-\frac{a}{\sqrt{d^2+e^2}}\cos\tfrac{1}{2}(\delta\pm\delta')^2+\left(\tfrac{1}{4}\frac{b^2+c^2}{d^2+e^2}-1\right)\cos\tfrac{1}{2}(\delta\pm\delta')$$
$$+\frac{4a(d^2+e^2)-e(b^2+c^2)-2d(cd-be)}{4(d^2+e^2)\sqrt{d^2+e^2}}=0$$

leiten wir 2 andere Gleichungen ab vermöge der Formel

$$\cos\tfrac{1}{2}(\delta\pm\delta')=\frac{p_1p_2}{s^2}\mp\frac{S_1S_2}{4s^2}=\frac{p_1p_2\mp s_1s_2}{s^2},$$

wo s_1 die halbe Sehne bedeutet.

Nach Durchführung der Rechnungen erhalten wir

$$26)\qquad \left(\frac{S_1S_2}{s^2}\right)^3-\frac{4a^2-3(b^2+c^2)+12(d^2+e^2)}{d^2+e^2}\left(\frac{S_1S_2}{s^2}\right)$$
$$-\tfrac{8}{3}\sqrt{\frac{4a^2-3(b^2+c^2)+12(d^2+e^2)}{3(d^2+e^2)^3}}\,\sin 3\varepsilon=0,$$

$$27)\quad \left(\frac{p_1 p_2}{s^2}\right)^3 - \frac{a}{\sqrt{d^2+e^2}}\left(\frac{p_1 p_2}{s^2}\right)^2 + \frac{4a^2+b^2+c^2-4(d^2+e^2)}{16(d^2+e^2)}\left(\frac{p_1 p_2}{s^2}\right)$$
$$-\frac{(a+e)(b^2+c^2)+2b(cd-be)}{32(d^2+e^2)\sqrt{d^2+e^2}} = 0.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen erhalten wir wegen des Fehlens des ersten Gliedes sofort den Ptolemäischen Satz vom Kreise:

$$S_1S_2 + S_3S_4 + S_5S_6 = 0.$$

Die Wurzeln von 26) sind

$$28)\quad \begin{aligned} \frac{S_1S_2}{s^2} &= -2\sqrt{\frac{4a^2-3(b^2+c^2)+12(d^2+e^2)}{3(d^2+e^2)}}\sin\varepsilon, \\ \frac{S_3S_4}{s^2} &= -2\sqrt{\frac{4a^2-3(b^2+c^2)+12(d^2+e^2)}{3(d^2+e^2)}}\sin(60^0-\varepsilon), \\ \frac{S_5S_6}{s^2} &= 2\sqrt{\frac{4a^2-3(b^2+c^2)+12(d^2+e^2)}{3(d^2+e^2)}}\sin(60^0+\varepsilon). \end{aligned}$$

Aus 27) erhalten wir die Wurzeln

$$29)\quad \begin{aligned} \frac{p_1p_2}{s^2} &= \frac{a}{3\sqrt{d^2+e^2}} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{4a^2-3(b^2+c^2)+12(d^2+e^2)}{d^2+e^2}}\cos\varepsilon, \\ \frac{p_3p_4}{s^2} &= \frac{a}{3\sqrt{d^2+e^2}} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{4a^2-3(b^2+c^2)+12(d^2+e^2)}{d^2+e^2}}\cos(60^0-\varepsilon), \\ \frac{p_5p_6}{s^2} &= \frac{a}{3\sqrt{d^2+e^2}} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{4a^2-3(b^2+c^2)+12(d^2+e^2)}{d^2+e^2}}\cos(60^0+\varepsilon). \end{aligned}$$

Aus den leicht abzuleitenden Formeln

$$30)\quad \begin{aligned} \cos\gamma &= \frac{a}{\sqrt{d^2+e^2}} - \frac{2p_1p_2}{s^2}, \\ \frac{p_1p_2}{s^2}\cos\gamma &= \frac{4\varrho^2-P_1^2}{4s^2}, \end{aligned}$$

folgen

$$31)\quad \cos\gamma^2 - \frac{a}{\sqrt{d^2+e^2}}\cos\gamma + \frac{4\varrho^2-P_1^2}{2s^2} = 0,$$

$$32)\quad \cos\gamma\left(\frac{2\varrho^2}{s^2}+\frac{P_1^2}{2s^2}-1\right)+\frac{4a(d^2+e^2)-e(b^2+c^2)-2b(cd-be)}{4(d^2+e^2)\sqrt{d^2+e^2}} = 0.$$

Setzen wir $\cos\gamma$ in die Resolvente 4) ein, so erhalten wir eine Gleichung für die 3 Mittellinien eines Kreisvierecks.

Aus 28) und 29) lassen sich noch in folge… sätze entwickeln.

Vergleichen wir nämlich

33) $$\frac{p_3 p_4 - p_5 p_6}{s^2} = \sqrt{\frac{4a^2 - 3(b^2 + \ldots}{12(d^2 + \ldots}}$$

mit

34) $$\frac{s_1 s_2}{s^2} = \sqrt{\frac{4a^2 - 3(b^2 + c^2) + 12(d^2 + e^2)}{12(d^2 + e^2)}} \sin \varepsilon,$$

so erhalten wir

35) $$p_3 p_4 - p_5 p_6 = s_1 s_2$$

womit sich noch 2 andere ähnliche Relationen verbinden. Demgemäss haben wir den Satz:

Bezeichnet man die halben Seiten und Diagonalen eines Kreisvierecks mit $s_1, s_2 \ldots s_6$, und die Höhen vom Mittelpunkte des Kreises auf sie mit $p_1, p_2 \ldots p_6$, so ist die algebraische Summe der Producte $p_1 p_2 + p_3 p_4$ aus den Senkrechten vom Mittelpunkt auf je zwei einander gegenüber stehenden Seiten gleich dem Producte $s_5 s_6$ der ihnen entsprechenden halben Diagonalen des Kreisvierecks.

Indem wir also die Lage des Vierecks in Bezug auf den Kreismittelpunkt berücksichtigen, haben wir

36) $$\begin{aligned} s_1 s_2 &= p_3 p_4 + p_5 p_6, \\ s_3 s_4 &= p_1 p_2 - p_5 p_6, \\ s_5 s_6 &= p_1 p_2 + p_3 p_4. \end{aligned}$$

Diese Relationen lassen sich auch noch auf andern Wege finden.

§ 16.

Wir kehren zu dem in § 12 beschriebenen Kreise zurück, verbinden seinen Mittelpunkt mit dem Durchschnittspunkt etwa der Diagonalen und nennen diese Strecke R. Wir halbiren den Winkel 2α dieser Diagonalen durch eine Gerade und bezeichen den Winkel, den dieselbe mit R macht durch ψ. Endlich seien die Winkel zwischen den gegenüber stehenden Seiten und den Diagonalen des Kreisvierecks bezüglich $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Dieselben sind die Wurzeln der folgenden leicht zu entwickelnden Gleichung

$$37)\quad \cos\gamma^3 - \left(\frac{R^2}{s^2}(\cos 2\psi - \cos 2\alpha) - \cos 2\alpha\right)\cos\gamma^2$$
$$+\left(\frac{R^2}{s^2}(1 - 2\cos 2\alpha\cos 2\psi + \cos 2\alpha^2) - 1\right)\cos\gamma$$
$$-\left(\frac{R^2}{s^2}\cos 2\alpha(\cos 2\alpha\cos 2\psi - 1) + \cos 2\alpha\right) = 0.$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit der Resolvente 4) oder

$$37^*)\quad \cos\gamma^3 - A\cos\gamma^2 + B\cos\gamma^2 - C = 0$$

lässt sich ein neuer Satz ableiten.

Setzen wir nämlich

$$38)\quad \begin{aligned} &\frac{R^2}{s^2}(\cos 2\psi - \cos 2\alpha) - \cos 2\alpha = A,\\ &\frac{R^2}{s^2}(1 - 2\cos 2\alpha\cos 2\psi + \cos 2\alpha^2) - 1 = B.\\ &\frac{R^2}{s^2}\cos 2\alpha(\cos 2\alpha\cos 2\psi - 1) + \cos 2\alpha = C, \end{aligned}$$

und eliminiren hieraus $\cos 2\varphi$ und $\cos 2\alpha$, so erhalten wir eine Gleichung 3. Grades für $\frac{R^2}{s^2} = z$, nämlich

$$39)\quad \begin{aligned} &z^3((A+C)^3-(1+B)^2)-z^2(2(A+BC)^2-(1+B+2C^2)(3+B^2))\\ &+z(12C^2-2AC(3+5B)+4A^3C+2B^3+B^2-3+A^2-A^2B^2)\\ &+8C^2+4AC(1-B)+(1+B)(1-B)^2 = 0. \end{aligned}$$

Substituiren wir hierin $z = x + 1$, wo $x = \frac{R^2 - s^2}{s^2} = \frac{p^2}{s^2}$ ist, so erhalten wir als schliessliches Resultat eine Gleichung für x von der Form

$$40)\quad a'x^3 + b'x^2 + D_3 x + D_3 = 0.$$

Daraus erhalten wir sofort die Relation

$$41)\quad \frac{1}{p'^2} + \frac{1}{p''^2} + \frac{1}{p'''^2} + \frac{1}{s^2} = 0.$$

Dabei sind p'', p''' die Tangenten von den Durchschnittspunkten der paarweise gegenüber stehenden Seiten an den Kreis.

Beachten wir, dass

$$42)\quad \begin{aligned} p'^2 &= -(R_1^2 - s^2),\\ p''^2 &= R_2^2 - s^2,\\ p'''^2 &= R_3^2 - s^2 \end{aligned}$$

bezüglich die Potenzen der Durchschnittspunkte der beiden Diagonalen und der entgegengesetzten Seiten des Vierecks in Bezug auf den Kreis sind, so haben wir das Resultat, dass die Summe der reciproken Potenzen der Durchschnittspunkte der einander gegenüber stehenden Seiten sowie der Diagonalen aller Kreisvierecke eines Kreises eine constante Grösse ist. s^2 ist die Potenz des Mittelpunkts. Die Formel 41) kann man noch leicht trigonometrisch umformen.

Dieselbe steht in einer gewissen Beziehung zu den Polen und Polaren am Kreise. Führen wir in unserm Kreise die Pole der oben angegebenen Durchschnittspunkte ein und nennen die Potenzen dieser 3 Punkte bezüglich P'^2, P''^2, P'''^2, so haben wir die einfachen Beziehungen

$$\frac{1}{P'^2} = \frac{1}{p''^2} + \frac{1}{p'''^2},$$

43)
$$\frac{1}{P''^2} = \frac{1}{p'^2} + \frac{1}{p'''^2},$$

$$\frac{1}{P'''^2} = \frac{1}{p'^2} + \frac{1}{p''^2}.$$

Hierbei sind, da die Potenz p'^2 des Durchschnittspunkts der Diagonalen negativ ist, die Potenzen P''^2 und P'''^2 ebenfalls negativ, indem die bezüglichen Pole im Kreise liegen.

Bekanntlich liegen in allen Kreisvierecken, deren Diagonalen sich in demselben Punkte durchschneiden, die Durchschnittspunkte der gegenüber stehenden Seiten in der Polare jenes Punktes. In diesem Falle wird P'^2 als Potenz des Poles des Durchschnittspunktes constant und die Summe der reciproken Potenzen der Durchschnittspunkte der gegenüber stehenden Seiten ist ebenfalls constant. Die beiden letzten Relationen 43) ergeben ähnliche Sätze.

Die Formeln 43) enthalten also metrische Bestimmungen zwischen den Potenzen der Pole der betreffenden Durchschnittspunkte der Seiten und Diagonalen der Kreisvierecke.

Verbinden wir die Mitten von P_1, P_2 oder P_3 mit den Durchschnittspunkten der bezüglichen Seiten und Diagonalen durch die Strecken M_1, M_2, M_3, für welche allgemein $M_1^2 = R_1^2 - \frac{P_1^2}{2} - \varrho^2$ ist, so lassen sich leicht folgende Formeln ableiten, in welchen λ der Winkel zwischen R und ϱ ist,

44)
$$\Sigma p'^3 - \Sigma M^2 = \varrho^2 - s^2, \quad \Sigma R \cos\lambda = \frac{s^2}{\varrho} + 2\varrho,$$

$$\frac{2R_1\varrho\cos\lambda}{s^2} = 1 + \cos\gamma_2\cos\gamma_3 \quad \text{u. s. w.}$$

Stehen also die Diagonalen auf einander senkrecht ($\gamma_1 = 90$), so geht die durch ϱ bezeichnete Strecke verlängert durch den Durchschnittspunkt derselben und steht auf der Verbindungslinie der Durchschnittspunkte der gegenüber liegenden Seiten senkrecht, ferner ist

$$R_2^2 - M_2^2 = R_3^2 - M_3^2 = (s + \varrho)(s - \varrho).$$

Man kann noch eine andere Relation aus 39) entwickeln. Schreiben wir diese Gleichung

$$z^3 - A'z^2 + Bz' - C' = 0,$$

so ist, wie man leicht findet

45) $$A' - C' = 2,$$

mithin

45*) $$\frac{R_1^2}{s^2} + \frac{R_2^2}{s^2} + \frac{R_3^2}{s^2} - \frac{R_1^2 R_2^2 R_3^2}{s^6} = 2,$$

oder auch wegen $p^2 = R^2 - s^2$

46) $$\frac{p'^2}{s^2} + \frac{p''^2}{s^2} + \frac{p'''^2}{s^2} + 1 = \frac{R_1^2 R_2^2 R_3^2}{s^6}.$$

Berechnet man ferner in 40) das Absolutglied, so findet man, dass dasselbe die Discriminante der kubischen Gleichung 37*) ist, und weil

$$(A + C)^2 - (1 + B)^2 = -\sin\gamma_1^2 \sin\gamma_2^2 \sin\gamma_3^2$$

ist, haben wir, wenn wir die Determinante

$$4A^3C - A^2B^2 + 4B^3 - 18ABC + 27C^2 = D_3$$

durch die Wurzeln ausdrücken, aus der Relation

$$\frac{p'^2 p''^2 p'''^2}{s^6} = -\frac{D_3}{(A + C)^2 - (1 + B)^2}$$

das Resultat

47) $$\frac{p'p''p'''}{s^3} = \frac{\cos\gamma_1 - \cos\gamma_2}{\sin\gamma_1} \cdot \frac{\cos\gamma_2 - \cos\gamma_3}{\sin\gamma_2} \cdot \frac{\cos\gamma_3 - \cos\gamma_1}{\sin\gamma_3}.$$

In ähnlicher Art erhalten wir aus 40)

48) $$\frac{p'^3 p''^2}{s^4} + \frac{p'^2 p'''^2}{s^4} + \frac{p''^2 p'''^2}{s^4}$$

$$= \left(\frac{\cos\gamma_1 - \cos\gamma_2}{\sin\gamma_1}\right)^2 \left(\frac{\cos\gamma_2 - \cos\gamma_3}{\sin\gamma_2}\right)^2 \left(\frac{\cos\gamma_3 - \cos\gamma_1}{\sin\gamma_3}\right)^2.$$

Um mehrere andere Formeln zu gewinnen, betrachten wir in den

Bedingungsgleichungen 38) $\cos 2\psi$ als Unbekannte und eleminiren $\frac{R^2}{s^2}$ und $\cos 2\alpha$ aus denselben.

Die etwas weitläufigen Transformationen führen schliesslich auf folgende Gleichung, in welcher

$$A + C = P$$
$$A - C = Q,$$
$$1 + B = R$$

gesetzt ist

$$\begin{aligned} &\cos 2\psi^3(-4PQ + RQ^2 + P^2(4-R) + R(2-R)^2) \\ 49)\quad &-\cos 2\psi^2(PR^2 - P^3 + PQ^2 + 4P - 4RQ) \\ &+\cos 2\psi(4PQ - 4R + 4R^2 - RQ^2 - 4P^2) \\ &+PQ^2 + 4P - 4RQ = 0. \end{aligned}$$

In derselben ist, wenn wir sie in folgender Form schreiben

$$50)\quad \cos 2\psi^3 - a\cos 2\psi^2 + b\cos 2\psi - c = 0,$$

$$\begin{aligned} &a = \cos 2\psi_1 + \cos 2\psi_2 + \cos 2\psi_3, \\ 51)\quad &b = \cos 2\psi_1 \cos 2\psi_2 + \cos 2\psi_2 \cos 2\psi_3 + \cos 2\psi_3 \cos 2\psi_1, \\ &c = \cos 2\psi_1 \cos 2\psi_2 \cos 2\psi_3. \end{aligned}$$

Nach gehöriger Gruppirung der P, Q und R in 49) geht dieselbe über in

$$52)\quad \cos 2\psi^3 - \cos 2\psi^2\left(\frac{P(R^2-P^2)}{N} - c\right) + \cos 2\psi\left(\frac{R(R^2-P^2)}{N} - 1\right) - c = 0,$$

wo N der Coefficient von $\cos 2\psi^3$ in 49) ist.

Demnach ist

$$53)\quad \begin{aligned} N(a+c) &= P(R^2 - P^2), \\ N(1+b) &= R(R^2 - P^2), \end{aligned}$$

daraus erhalten wir durch Division

$$54)\quad \frac{a+c}{a+b} = \frac{P}{R} = \frac{A+C}{1+B}.$$

oder

$$55)\quad \frac{\cos 2\psi_1 + \cos 2\psi_2 + \cos 2\psi_3 + \cos 2\psi_1 \cos 2\psi_2 \cos 2\psi_3}{1 + \cos 2\psi_1 \cos 2\psi_2 + \cos 2\psi_2 \cos 2\psi_3 + \cos 2\psi_3 \cos 2\psi_1}$$
$$= \frac{\cos\gamma_1 + \cos\gamma_2 + \cos\gamma_3 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 \cos\gamma_3}{1 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 + \cos\gamma_2 \cos\gamma_3 + \cos\gamma_3 \cos\gamma_1}.$$

Die Winkel $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ zwischen den paarweise gegenüber stehenden Seiten und den Diagonalen eines Kreisvierecks und die Winkel ψ_1, ψ_2, ψ_3 zwischen den vom Kreismittelpunkt nach den 3 Durchschnittspunkten gezogenen Strecken R und den die Winkel γ halbirenden Geraden stehen also in der aus 55) leicht abzuleitenden Beziehung $\operatorname{tg}\psi_1 \operatorname{tg}\psi_2 \operatorname{tg}\psi_3 = \operatorname{tg}\frac{\gamma_1}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma_2}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma_3}{2}$.

Bildet man den Ausdruck

$$\frac{b}{1+b}-\frac{c}{a+c},$$

indem man die aus 49) bekannten Grössen P, Q, R einführt, so erhält man

$$56)\qquad \frac{8C}{R(A+C)}=\frac{b}{1+b}-\frac{c}{a+c},$$

oder

$$57)\qquad \frac{8C}{R^2}=\frac{ab-c}{(1+b)^2}.$$

Endlich leitet man noch ohne Mühe die Gleichung zwischen $R=\frac{4\varrho^2}{s^2}$ und den Winkeln ψ ab:

$$58)\qquad \left(\frac{\varrho^2}{s^2}\right)^4\left(\frac{ab-c}{1+b}\right)^2-2\left(\frac{ab-c}{1+b}\right)(a+c).\left(\frac{\varrho^2}{s^2}\right)^3$$
$$+\,(a(a+c)+b(1+b))\left(\frac{\varrho^2}{s^2}\right)^2-(1+b)^2\left(\frac{\varrho^2}{s^2}\right)+\frac{(1+b)^2}{4}=0.$$

Wir bemerken, dass das Absolutglied der Gleichung 39) der Coefficient von $\cos 2\psi^3$ in 49) ist.

Also ist

$$59)\qquad z_1z_2z_3=\frac{N}{R^2-P^2}=\frac{R}{1+b},$$

oder

$$60)\qquad \frac{R_1{}^2R_2{}^2R_3{}^2}{s^6}=\frac{4\varrho^2}{s^2(1+b)}.$$

Aus 54) folgt aber

$$\frac{(a+c)^2-(1+b)^2}{(1+b)^2}=\frac{(A+C)^2-(1+B)^2}{(1+B)^2},$$

welcher Ausdruck übergeht in

$$61)\qquad \frac{\sin 2\psi_1 \sin 2\psi_2 \sin 2\psi_3}{1+b}=\frac{\sin\gamma_1\sin\gamma_2\sin\gamma_3}{R}.$$

Aus 59) und 61) folgt also die elegante Relation

$$62)\qquad \frac{R_1^2 R_2^2 R_3^2}{s^6} = \frac{\sin\gamma_1 \sin\gamma_2 \sin\gamma_3}{\sin 2\psi_1 \sin 2\psi_2 \sin 2\psi_3},$$

Beachten wir ferner, dass in 57) $ab - c$ die Geminante G_2 der kubischen Gleichung 50) ist, so erhalten wir vermöge der Bedeutung derselben und durch Combination von 57) und 59)

$$63)\qquad \frac{R_1^2 R_2^2 R_3^2}{s^6} = \frac{8\cos\gamma_1 \cos\gamma_2 \cos\gamma_3}{(\cos 2\psi_1 + \cos 2\psi_2)(\cos 2\psi_2 + \cos 2\psi_3)(\cos 2\psi_3 + \cos 2\psi_1)}$$

Aus den letzten Gleichungen resultirt

$$64)\qquad \operatorname{tg}\gamma_1 \operatorname{tg}\gamma_2 \operatorname{tg}\gamma_3 = \frac{8\sin 2\psi_1 \sin 2\psi_2 \sin 2\psi_3}{(\cos 2\psi_1 + \cos 2\psi_2)(\cos 2\psi_2 + \cos 2\psi_3)(\cos 2\psi_3 + \cos\psi_1)}.$$

Diese allgemeinen für alle Kreisvierecke gültigen Formeln, welche welche noch leicht vermehrt werden können, vereinfachen sich sehr durch die Annahme $C = 0$ oder $\gamma_1 = 90^0$. Aus 57) oder 62) folgt sofort

$$\cos 2\psi_2 + \cos 2\psi_3\ 0.$$

Damit haben wir den Satz:

Stehen in einem Kreisvierecke die Diagonalen senkrecht auf einander, so schliessen die vom Mittelpunkt des Kreises an die Durchschnittspunkte der gegenüber stehenden Seiten gezogenen Strecken R_2 und R_3 mit den die bezüglichen Winkel γ_2 und γ_3 halbirenden Geraden gleiche Winkel ψ_2 ein. Aus 54) folgt dann noch

$$65)\qquad \cos 2\psi_1 = \frac{\cos\gamma_2 + \cos\gamma_3}{1 + \cos\gamma_2 \cos\gamma_3} \quad \text{oder}$$

$$\operatorname{tg} 2\psi_1 = \frac{\sin\gamma_2 \sin\gamma_3}{\cos\gamma_2 + \cos\gamma_3}.$$

Aus 58) folgt

$$\frac{2}{R} = 1 + \frac{\sin 2\psi_1}{\sin 2\psi_2}.$$

Aus 61) folgt

$$R = \frac{\sin\gamma_2 \sin\gamma_3}{\sin 2\psi_1},$$

also auch

$$\frac{1}{\sin 2\psi_1} + \frac{1}{\sin 2\psi_2} = \frac{2}{\sin\gamma_2 \sin\gamma_3}$$

und

$$R = \frac{4\varrho^2}{s^2} = 1 + \cos\gamma_2 \cos\gamma_3 \quad \text{S. Formel 44).}$$

Ferner ist

$$P_1 = 2\varrho, \quad P_2^2 = P_3^2 = 2t^2 - (2\varrho)^2 \quad \text{etc.}$$

Betrachtet man die letzte Gleichung 38) unter der Annahme $C = 0$ oder $\cos\gamma = 0$, so geht eine Ellipsengleichung hervor

66)
$$\frac{x^2}{\frac{s^2}{2\sin\alpha^2}} + \frac{y^2}{\frac{s^2}{2\cos\alpha^2}} = 1.$$

Sind a und b die Halbachsen, so besteht für s die Relation

$$\frac{2}{s^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

und es ist

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Dabei ist s ein Halbmesser der Ellipse, welcher gegen die Achsen um 45^0 geneigt ist.

Zieht man durch die Scheitelpunkte Tangenten und in dem entstandenen Rechtecke die Diagonalen, beschreibt man ferner mit s als Radius um einen Ellipsenpunkt als Centrum einen Kreis, so bilden die Verbindungslinien zweier Durchschnittspunkte von Ellipse und Kreis mit den bezüglichen Durchschnittspunkten der Diagonalen und dem Kreise einen rechten Winkel.

Die Annahme $A = 0$ oder $\cos\gamma_1 + \cos\gamma_2 + \cos\gamma_3 = 0$ würde uns auf eine Hyperbel

67)
$$\frac{x^2}{\frac{s^2\cos 2\alpha}{2\sin\alpha^2}} - \frac{y^2}{\frac{s^2\cos\alpha}{2\cos\alpha^2}} = 1, \quad s^2 = \frac{2a^2b^2}{a^2 - b^2}$$

geführt haben.

Die Annahme $B = 0$ oder $R = \frac{4\varrho^2}{s^2} = 1$, das ist

$$\varrho = \frac{s}{2}$$

führt wiederum zu einer Ellipse

68)
$$\frac{x^2}{\frac{s^2}{4\sin\alpha^4}} + \frac{y^2}{\frac{s^2}{4\cos\alpha^4}} = 1,$$

worin $s = \frac{2AB}{A+B}$ das harmonische Mittel zwischen den Halbachsen bedeutet, und es ist

$$\operatorname{tg}\alpha^2 = \frac{B}{A}.$$

Allgemein ist bei der Annahme γ = Constante die Gleichung 37) die Polargleichung einer Ellipse

$$\text{69)} \qquad \frac{x^2 \sin\alpha^2}{\cos\frac{1}{2}\omega^2} + \frac{y^2 \cos\alpha^2}{\sin\frac{1}{2}\omega^2} = s^2,$$

worin

$$\frac{\cos\frac{1}{2}\omega^2}{a^2} + \frac{\sin\frac{1}{2}\omega^2}{b^2} = \frac{1}{s^2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{b}{a}$$

Die Grössen s und α sind wie man sieht leicht construirbar und das vorhin Gesagte bezüglich $\gamma = 90^0$ gilt hier allgemein für γ = Const.

Wir werden diese Sätze nachher verallgemeinern.

Die im Vorhergehenden abgeleiteten Sätze und Formeln über die Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln des Kreisvierecks, den Polen und Polaren sind übrigens hiermit noch nicht abgeschlossen, wir werden dieselben später auf dem Wege der elliptischen Integrale wieder aufnehmen und im Anschluss an das Vorige fortsetzen.

III. Teil.

§ 17.

Die in den beiden ersten Teilen entwickelten Methoden wollen wir jetzt auf die Kegelschnitte anwenden.

Die 4 Schnittpunkte eines Kreises und einer Ellipse verbinden wir mit dem Kreismittelpunkt und bezeichnen die 4 Winkel, welche die Radien mit der Verbindungslinie R von Kreis- und Ellipsenmittelpunkt bilden, mit ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4. Der Neigungswinkel der Linie R gegen die grosse Achse der Ellipse sei φ und der Halbmesser des Kreises s.

Die Gleichung, auf welche wir geführt werden, ist von der Form

$$\text{1)} \qquad a + b\sin\psi + c\cos\psi + d\sin 2\psi + e\cos 2\psi = 0.$$

Darin bedeuten

$$\text{2)} \qquad \begin{aligned} a &= R^2a^2\sin\varphi^2 + R^2b^2\cos\varphi^2 - a^2b^2 + \frac{a^2+b^2}{2} \cdot s^2, \\ b &= -2Rs\sin\varphi\cos\varphi\,(a^2-b^2), \end{aligned}$$

$$2)\qquad \begin{aligned} c &= -2Rs\,(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2),\\ d &= \frac{s^2}{2}\sin 2\varphi\,(a^2-b^2),\\ e &= \frac{-s^2}{2}\cos 2\varphi(a^2-b^2).\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir sofort

$$3)\qquad \begin{aligned} \mathrm{tg}(\psi_1+\psi_2+\psi_3+\psi_4) &= -\,\mathrm{tg}\,2\varphi, \quad \text{also}\\ \psi_1+\psi_2+\psi_3+\psi_4 &= 720^0-2\varphi.\end{aligned}$$

Die Winkel müssen in dem richtigen Sinne genommen werden.

Die Cosinusresolvente der Gleichung 1) ist nach früherem

$$4)\qquad \cos\gamma^3-\frac{2R^2(a^2\sin\varphi^2+b^2\cos\varphi^2)-2a^2b^2+(a^2+b^2)s^2}{c^2s^2}\cos\gamma^2$$
$$+\left(\frac{4R^2}{c^4s^2}(a^4\sin\varphi^2+b^4\cos\varphi^2)-1\right)\cos\gamma$$
$$-\frac{2R^2(a^2+b^2)(a^2\sin\omega^2-b^2\cos\varphi^2)+2a^2b^2c^2-(a^4-b^4)s^2}{c^4s^2}=0.$$

Wir wollen zeigen, dass diese Gleichung das Problem der Trisection des Winkels in vollster Allgemeinheit löst.

Wir gehen dabei von der bekannten Formel

$$\cos 3\varepsilon = 4\cos\varepsilon^3-3\cos\varepsilon$$

aus und bringen die daraus hervorgehende

$$5)\qquad \cos\varepsilon^3-\tfrac{3}{4}\cos\varepsilon-\tfrac{1}{4}\cos 3\varepsilon=0$$

mit 4) zur Identität. Demnach haben wir die Bedingungsgleichungen:

$$6)\qquad \begin{aligned} &R^2a^2\sin\varphi^2+R^2b^2\cos\varphi^2-a^2b^2+\frac{a^2+b^2}{2}s^2=0,\\ &\frac{4R^2}{c^4s^2}(a^4\sin\varphi^2+b^4\cos\varphi^2)=\tfrac{1}{4},\\ &\frac{2R^2(a^2+b^2)(a^2\sin\varphi^2-b^2\cos\varphi^2)+2a^2b^2c^2-(a^4-b^4)s^2}{c^4s^2}=\tfrac{1}{4}\cos 3\varepsilon,\end{aligned}$$

aus welchen folgende Relationen hervorgehen:

$$7)\qquad \cos 3\varepsilon=\frac{a^4\sin\varphi^2-b^4\cos\varphi^2}{a^4\sin\varphi^2+b^4\cos\varphi^2},$$

d. i.

$$8)\qquad \mathrm{tg}\,\tfrac{3}{2}\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{b^2}{a^2}.$$

9) $$s^2 = 16R^2 \frac{(a^4 \sin\varphi^2 + b^4 \cos\varphi^2)}{c^4}.$$

10) $$\frac{(a^2+3b^2)^2}{a^2} \cos\varphi^2 + \frac{(3a^2+b^2)^2}{b^2} \sin\varphi^2 = \frac{c^4}{R^2},$$

11) $$\varrho = \tfrac{1}{4}.$$

Dabei sind die Winkel, welche in dem, dem Kreise und der Ellipse angehörigen Viereck die paarweise gegenüber stehenden Seiten sowohl als auch die Diagonalen mit einander einschliessen, bezüglich

12) $$\begin{aligned} \gamma_1 &= \varepsilon, \\ \gamma_2 &= 60^0 + \varepsilon, \\ \gamma_3 &= 60^0 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Diese 3 Bestimmungen rühren daher, dass mit jedem Winkel 3ε zwei andere zugleich mit existiren, nämlich $180 \pm 3\varepsilon$.

Wir haben also allgemein folgendes:

Um einen Winkel 3ε in 3 gleiche Teile zu teilen mit Hülfe eines Kegelschnitts, dessen Halbachsen a und b sind, construire man einen zweiten, dessen Achsen aus 10) bekannt sind, und bestimmen den aus 8) hervorgehenden Winkel φ. Damit erhält man einen auf dem zweiten Kegelschnitte liegenden Punkt als Centrum eines Kreises, dessen Radius s aus 9) berechnet wird, und endlich resultirt durch die Schnittpunkte dieses Kreises mit dem ersten Kegelschnitt ein Kreisviereck, dessen Seiten- und Diagonalenpaare bezüglich die dritten Teile der Winkel 3ε, $180 \pm 3\varepsilon$, d. i. ε, $60 \pm \varepsilon$ mit einander einschliessen.

Wir wählen einige specielle Formen der Kegelschnitte, um die Formeln und Gleichungen zu vereinfachen.

Der erste Kegelschnitt sei die gleichseitige Hyperbel

13) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Der zweite Kegelschnitt 10) hat demzufolge die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

fällt also mit dem ersten zusammen, und ist demnach diese Curve für die Trisection im Besonderen recht geeignet.

Die Gleichung 9) für den Radius s des Kreises geht über in

14) $$s = 2R$$

und 7) wird, wenn wir noch beachten, dass in unserm Falle die Gleichung 4) für $\gamma = 180 - \gamma$ gesetzt das Absolutglied im Zeichen umkehrt und damit jeden Winkel γ in seinen Nebenwinkel umwandelt,

$$2\varphi = 3\varepsilon.$$

Das Vorstehende konnte auch aus der allgemeinern Formel für die gleichseitige Hyperbel aus 4) abgeleitet werden, sie ist:

$$15) \quad \cos\gamma^3 + \frac{R^2\cos 2\varphi - a^2}{s^2}\cos\gamma^2 + \left(\frac{R^2}{s^2} - 1\right)\cos\gamma + \frac{a^2}{s^2} = 0.$$

Unter diesen Einschränkungen fassen wir das Obige folgendermassen zusammen.

Um einen Winkel 3ε in 3 gleiche Teile zu teilen, bestimmen wir vermöge $\varphi = \frac{3\varepsilon}{2}$ in einer gleichseitigen Hyperbel den Polarwinkel φ; um den dadurch erhaltenen Hyperbelpunkt beschreiben wir mit $2R = s$ einen Kreis, das bezügliche Kreisviereck gibt alsdann in der oben beschriebenen Art die betreffenden Winkel ε, $60^0 \pm \varepsilon$.

Wir kehren wieder zur Kegelschnittsgleichung 10) zurück und machen die Annahme $b^2 = -3a^2$.

Dieselbe führt also wiederum auf eine Hyperbel

$$16) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3b^2} = 1,$$

deren grosse Halbachse a und deren Excentricität $e = 2a$ ist.

Aus 10) folgt

$$17) \quad 2R\cos\varphi = a,$$

aus 9) aber

$$18) \quad s^2 = R^2\sin\varphi^2 + (\tfrac{3}{2}a)^2.$$

Die Curve 10) wird also zu einer auf der Abscissenachse senkrecht stehenden Geraden, welche vom Mittelpunkt der Hyperbel um $\frac{a}{2}$ und also von einem Brennpunkt um $\frac{3}{2}a$ entfernt ist. Mithin geht der Kreis durch diesen Brennpunkt und einen Scheitelpunkt der Hyperbel. Endlich ist vermöge

$$19) \quad \operatorname{tg}\tfrac{3}{2}\varepsilon \operatorname{tg}\varphi = 3$$

der Winkel 3ε dem Centriwinkel gleich, welcher von den Radien nach dem einen Brennpunkt und dem entfernteren Scheitelpunkt der

Hyperbel gebildet wird. Die Trisection des Winkels 3ε ist demnach auch in diesem Falle sehr leicht und an die einfache Construction einer Hyperbel geknüpft. Wir kommen nachher auf dieselbe noch einmal zurück.

Bezüglich der Formel 8) bemerken wir beiläufig, dass man den zu OP zugehörigen conjugirten Halbmesser OQ des Kegelschnitts in der Art findet, indem man P mit einem Brennpunkt verbindet, auf dieser Strecke die Halbachse a von P aus abträgt und den Endpunkt mit dem Mittelpunkt O verbindet. Verlängert man diese Verbindungslinie bis zum Kegelschnitt, so erhält man den conjugirten Durchmesser. Bei einer Hyperbel ist OQ der Radiusvector der Complementarhyperbel.

§ 18.

Auf die im vorigen § in 1) — 12) entwickelten Formeln, welche den Fall $a = 0$, $b^2 + c^2 = d^2 + e^2$ oder die Trisection des Winkels einschliessen, lassen sich die Gleichungssysteme des § 13. mit Leichtigkeit anwenden.

Nach denselben ist

$$\text{20)} \qquad \begin{aligned} \frac{2p_1p_2}{s^2} &= \cos\gamma = \cos\varepsilon, \\ \frac{2p_3p_4}{s^2} &= -\cos(60^0 - \varepsilon), \\ \frac{2p_5p_6}{s^2} &= -\cos(60^0 + \varepsilon). \end{aligned}$$

Ausserdem folgen

$$\text{21)} \qquad \begin{aligned} \frac{S_1S_2}{\sqrt{12\,s^2}} &= \sin\varepsilon, \\ \frac{S_3S_4}{\sqrt{12\,s^2}} &= \sin(60^0 - \varepsilon), \\ \frac{S_5S_6}{\sqrt{12\,s^2}} &= -\sin(60^0 + \varepsilon), \end{aligned}$$

woraus

$$\text{22)} \qquad S_3S_4 - S_5S_6 = 12p_1p_2,$$

und durch Elimination von $\cos\varepsilon$ und $\sin\varepsilon$ und den übrigen resultirt

$$\text{23)} \qquad 48p_1^2p_2^2 + S_1^2S_2^2 = 12\,s^4.$$

Wegen

$$p^2 = s^2 - \frac{S^2}{4}$$

erhalten wir aus 23) nach einigen Umgestaltungen allgemein

$$3s^2 = S^2. \tag{24}$$

Das in § 16. abgeleitete Kreisviereck, welches mit der Trisection des Winkels verknüpft ist, hat die Eigenschaft, dass zwei Seiten und eine Diagonale desselben von gleicher Grösse S sind, und also ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Die andere Diagonale S_3 und die übrigen Seiten S_1 und S_2 sowie die darauf errichteten Normalen p_3, p_1, p_2 haben bezüglich die Relationen

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 &= 0, \\ p_1 + p_2 + p_3 &= 0, \\ S^2 &= S_1^2 + S_1S_2 + S_2^2, \\ 3p^2 &= p_1^2 - p_1p_2 + p_2^2. \end{aligned} \tag{25}$$

Aus 24) gewinnen wir noch folgenden Satz:

Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller in einen Kegelschnitt einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecke ist ein Kegelschnitt, dessen Gleichung 10) ist.

Bezeichnet man die Winkel, welche ϱ, oder die Verbindungslinie des Kreismittelpunktes und des Durchschnittspunktes der Mittellinien P_1, P_2, P_3 mit den letzteren macht, mit δ_1, δ_2, δ_3, so sind leicht die folgenden Relationen nachzuweisen:

$$\operatorname{tg}\delta_1 = \frac{\sin 2\varepsilon}{\frac{1}{2} + \cos 2\varepsilon}, \quad \operatorname{tg}\delta_2 = \frac{\sin 2(30^0 + \varepsilon)}{\frac{1}{2} - \cos 2(30^0 - \varepsilon)}, \quad \operatorname{tg}\delta_3 = \frac{\sin 2(30^0 - \varepsilon)}{\frac{1}{2} - \cos 2(30^0 + \varepsilon)}$$

§ 19.

Es liegt nahe, die vorstehenden Resultate auf den irreductibeln Fall der kubischen Gleichung anzuwenden. Derselbe kann in folgender Art geometrisch gedeutet werden.

Aus 20) folgt

$$2pp_1 = s^2 \cos \varepsilon,$$

und weil

$$p = \frac{s}{2}$$

ist

$$p_1 = s \cos \varepsilon, \tag{26}$$

und ε ist ein Peripheriewinkel.

Für den irreductibeln Fall der kubischen Gleichung

27) $$x^3 - Px - Q = 0$$

folgen aus

$$\cos 3\varepsilon = \frac{3Q}{P\sqrt{\frac{4}{3}P}}$$

bekanntlich die Wurzeln

$$x = \sqrt{\tfrac{4}{3}P}\cos\varepsilon \quad \text{etc.},$$

also ist, wenn

$$P = \tfrac{3}{4}s^2 = 3R^2 \quad \text{(gleichseitige Hyperbel)}$$

und demnach

$$\cos 3\varepsilon = \frac{Q}{2R^3}$$

gesetzt wird, die eine Wurzel

28) $$x_1 = p_1$$

und die betreffende Gleichung wird

29) $$x^3 - 3R^2x - 2R^3\cos 3\varepsilon = 0,$$

oder wegen $3\varepsilon = 2\varphi$ und $R^2\cos 2\varphi = a^2$

30) $$x^3 - 3R^2x - 2Ra^2 = 0,$$

deren Wurzeln die Normalen p_1, p_2, p_3 sind.

Fassen wir das Obige zusammen, so erhalten wir bezüglich der geometrischen Auflösung der kubischen Gleichungen mit 3 reellen Wurzeln Folgendes:

Liegt die kubische Gleichung

$$x^3 - Px - Q = 0$$

vor, so ergibt die Formel

$$\cos 2\varphi = \cos 3\varepsilon = \frac{3Q}{P\sqrt{\frac{4}{3}P}}$$

den Winkel φ als Polarwinkel einer gleichseitigen Hyperbel, dessen zugehöriger Radius $R = \frac{s}{2}$ einen Punkt derselben bestimmt, um welchen man mit $2R$ einen Kreis beschreiben muss, um in den Schnittpunkten desselben mit der Hyperbel ein Kreisviereck zu gewinnen, für welches die vom Mittelpunkt des Kreises auf die drei bezüglichen Seiten (Diagonale) gefällten Normalen die Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind. Hiernach ist der bekannte Hülfswinkel 3ε geometrisch definirt.

Ferner erhalten wir aus den Formeln 21)

31) $$SS' = \sqrt{12}\, s^2 \sin \varepsilon,$$

und weil

$$S = \sqrt{3}\, s,$$

32) $$S' = 2s \sin \varepsilon.$$

Wenden wir diese Formeln an auf die Gleichung

$$x^3 - Px - Q = 0 \text{ (Casus irreductibilis)},$$

indem wir setzen

$$\tfrac{4}{3}P = 4s^2,$$

also

$$P = 3s^2 = 12R^2,$$

so erhalten wir die kubische Gleichung

$$x^3 - 12R^2x - 16R^3 \sin 2\varphi = 0 \text{ (siehe I. Form. 26)}$$

oder, wenn wir die halben Seiten $s_1 = \frac{S_1}{2}$ einführen,

33) $$y^3 - 3R^2y - 2R^3 \sin 2\varphi = 0.$$

Diese Gleichung ist das Correlat zur Gleichung 29), ihre Wurzeln sind die halben Seiten des Kreisvierecks.

Auch dieses zusammenfassend erhalten wir folgende zweite analoge Auflösung der kubischen Gleichung

$$x^3 - Px - Q = 0.$$

Die Formel

$$\sin 2\varphi = \sin 3\varepsilon = \frac{3Q}{P\sqrt{\frac{4}{3}P}}$$

ergibt den Polarwinkel φ einer gleichseitigen Hyperbel; indem wir um den zugehörigen Hyperbelpunkt mit dem doppelten Radiusvector einen Kreis beschreiben, erhalten wir durch die Schnittpunkte des Kreises und der Hyperbel das Kreisviereck, in welchem zwei bezügliche halbe Seiten und eine halbe Diagonale, sofern dieselben nicht dem gleichseitigen Dreieck angehören, die Wurzeln der reducirten kubischen Gleichung sind.

Endlich ziehen wir noch die Gleichung 40) im II. Teil in den Kreis unserer Betrachtungen.

Dieselbe geht für den irreductibeln Fall über in

34) $$\left(\frac{t^2}{s^2}\right)^3 - \tfrac{9}{4}(5 + 9 \cot 3\varepsilon^2)\left(\frac{t^2}{s^2}\right)^2 + 27\left(\frac{t^2}{s^2}\right) + 27 = 0.$$

Hierbei sind die t die Tangenten von den 3 Durchschnittspunkten

der paarweise gegenüberstehenden Seiten und der Diagonalen des Kreisvierecks an den Kreis. (Für den innern Punkt ist natürlich t die betreffende halbe Sehne.)

Aus der Gleichung folgt

$$t_1 t_2 t_3 = S$$

und die schon bekannte

$$\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2} + \frac{1}{t_3^2} + \frac{1}{s^2} = 0.$$

Wir führen ein die Relation

$$\frac{t^2}{s^2} + 3 = \frac{9R^2}{z^2},$$

dann folgt aus der Gleichung

$$35) \qquad z^3 - 3R^2 z + 2R^3 \sin 3\varepsilon = 0,$$

welche mit 33) identisch ist, zunächst wegen des Fehlens des ersten Gliedes

$$36) \qquad \frac{1}{\sqrt{t_1^2 + S^2}} + \frac{1}{\sqrt{t_2^2 + S^2}} + \frac{1}{\sqrt{t_3^2 + S^2}} = 0,$$

und noch

$$37) \qquad \frac{t^2}{S^2} = \frac{S^2 - S_1^2}{S_1^2}.$$

Substituiren wir in 34)

$$u^3 = \frac{s^2}{t^2},$$

so erhalten wir aus

$$u^3 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{9}{2\sin 3\varepsilon}\right)^{\frac{2}{3}} u + \tfrac{1}{3} = 0$$

$$38) \qquad \frac{1}{t_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{t_2^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{t_3^{\frac{2}{3}}} = 0.$$

§ 19.

Wir wollen jetzt zeigen, wie die gleichseitige Hyperbel im Stande ist, auch die übrigen Fälle der kubischen Gleichungen

$$39) \qquad x^3 \pm Px - Q = 0,$$

auf welche die Cardanische Formel Anwendung findet, geometrisch aufzulösen und wollen zugleich die Bedeutung der in der goniometrischen Auflösung vorkommenden Hülfswinkel nachweisen.

Nach der genannten Methode sind für die Form

$$40)\qquad x^3+Px+Q=0$$

die Hülfswinkel

$$41)\qquad \operatorname{tg}2\alpha^2=\frac{4P^3}{27Q^2},\qquad \operatorname{tg}\beta=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\alpha},$$

zu berechnen, und es ist die reelle Wurzel

$$42)\qquad x=\sqrt{\tfrac{4}{3}P}\cot 2\beta.$$

Ebenso hat man für

$$43)\qquad y^3-Py-Q=0,\ \text{wenn}\ 4P^3 \overline{\leq}\ 27Q^2,$$

die Hülfswerte

$$44)\qquad \sin 2a^2=\frac{4P^3}{27Q^2},\qquad \operatorname{tg}\beta=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\alpha},$$

zu berechnen, und die reelle Wurzel ist

$$45)\qquad y=\sqrt{\tfrac{4}{3}P}:\sin 2\beta.$$

Von dem Punkte $R(\varphi)$ der gleichseitigen Hyperbel fällen wir eine Senkrechte auf den andern Ast derselben, und bezeichnen den Winkel, den die verlängerte Normale mit der grossen Achse macht, mit Θ. Den Fusspunkt der Normale verbinden wir mit dem Mittelpunkt der Hyperbel O, und bezeichnen den neuen Radiusvector mit r; derselbe schliesst ebenfalls mit der Hauptachse den Winkel Θ ein. Aus der Formel

$$46)\qquad R\sin(\varphi-\Theta)=r\sin 2\Theta$$

eliminiren wir r vermittelst

$$r^2=\frac{a^2}{\cos 2\Theta},$$

und erhalten nach einigen Umformungen die kubische Gleichung

$$47)\qquad \operatorname{tg}2\Theta^3+\tfrac{3}{4}\operatorname{tg}2\Theta-\tfrac{1}{4}\operatorname{tg}2\varphi=0.$$

Wenden wir auf dieselbe die Auflösung 40) bis 42) an, so finden wir sofort, dass α der Winkel zwischen dem Radiusvector R und der zugehörigen Asymptote, und dass β der Winkel zwischen dem Radiusvector r und der andern Asymptote ist.

Nennen wir ferner den Winkel, welchen der verlängerte Radiusvector R mit r einschliesst u, so ist

48) $$R^2 \cos 2(u - \Theta) = a^2,$$

und nach ähnlichen Umformungen wie vorhin resultirt

49) $$\operatorname{tg} u^3 + 3 \operatorname{tg} u - 2 \operatorname{tg} 2\varphi = 0,$$

also ist

$$\operatorname{tg} u = 2 \operatorname{tg} 2\Theta.$$

Indem wir noch die Hyperbelsehne

50) $$x = r \operatorname{tg} u$$

einführen und bemerken, dass der Winkel zwischen r und x ein Rechter ist, so geht durch diese Substitution 49) über in

51) $$x^3 + 3r^2 x - 2r^3 \operatorname{tg} 2\varphi = 0.$$

Um nun die kubische Gleichung

$$x^3 + Px + Q = 0$$

aufzulösen, ergibt der aus

$$\operatorname{tg} 2\alpha^2 = \frac{4P^3}{27Q^2}$$

berechnete Winkel α als Winkel zwischen der Asymptote und R einen Hyperbelpunkt, welchen wir mit O verbinden und bis zur andern Hälfte der Curve verlängern. Ein über der Verlängerung construirter Halbkreis ergibt in der dadurch entstehenden Hyperbelsehne die reelle Wurzel der kubischen Gleichung. Der Halbkreis kann auch über dem Radius R construirt werden.

Um endlich die Gleichung 43) aufzulösen, transformiren wir 47) in die Form

$$\frac{1}{\cos 2\Theta^3} - \frac{3}{4} \frac{1}{\cos 2\Theta} - \frac{1}{4 \cos 2\varphi} = 0.$$

Die Normale y zwischen den Punkten $R(\varphi)$ und $r(\Theta)$ oder

48) $$\cos 2\Theta = \frac{2r}{y}$$

in 47) eingeführt ergibt

$$y^3 - 3r^2 y - \frac{2r^3}{\cos 2\varphi} = 0$$

als Correlat zu 51). Die Methode der Auflösung der Gleichung 43) ist analog der für 40), nur ist jetzt die Normale y oder die Sehne zwischen den getrennten Hyperbelästen die Wurzel der betreffenden

Gleichung. Die Hülfsgrössen 41) und 44) haben also hiermit ihre geometrische Erklärung erhalten.

Eine Modification der letzten Gleichung geht noch aus 15) hervor, welche Gleichung jetzt die Form hat

$$50)\qquad \cos\gamma^3 + \left(\frac{R^2}{s^2} - 1\right)\cos\gamma + \frac{a^2}{s^2} = 0,$$

worin R ein Radiusvector, s ein beliebiger Kreisradius ist.

Soll der Kreis den andern Hyperbelast berühren, so muss die Discriminante verschwinden. Der Radius s wird zur Normale y und die Discriminantengleichung $D_3 = 0$ gibt

$$51)\qquad y^{2} - y^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\tfrac{27}{4}a^4} - R^2 = 0.$$

Auf die Gleichung 49)

$$\operatorname{tg} u + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg} u^3 = \tfrac{2}{3}\operatorname{tg} 2\varphi$$

werden wir in einer andern Abhandlung, in welcher wir die oben dargestellte Methode der geometrischen Auflösung der reducirten kubischen Gleichungen auf anderm Wege ableiten werden, wieder zurückkommen.

§ 20.

Aus einzelnen Gleichungen dieses Abschnittes lassen sich mannigfache Folgerungen ziehen, so können wir in der Resolvente 4) $\cos\gamma$ oder γ als constant betrachten und die betreffende Polargleichung suchen. Führen wir diesen Gedanken durch, so ergibt sich als schliessliches Resultat die Kegelschnittsgleichung

$$52)\qquad x^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\cot\frac{\gamma}{2}\right)^2 - y^2\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}\frac{\gamma^2}{2}\right) = c^2s^2\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{r^2}\right),$$

r findet man aus

$$53)\qquad \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma^2}{a^2} + \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma^2}{b^2} = \frac{1}{r^2},$$

es ist also ein Halbmesser des Kegelschnitts.

Führt man einen bekannten Hülfswinkel ein, so wird die obige Gleichung

$$54)\qquad \frac{x^2}{\cos\alpha^2} - \frac{y^2}{\sin\alpha^2} = c^2s^2\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{r^2}\right).$$

Legen wir also eine Ellipse zu Grunde, so ist eine Hyperbel

der geometrische Ort der Centra der Kreise, deren Radien $= s$, und deren Schnittpunkte mit der Ellipse Kreisvierecke liefern, in welchen einer der Winkel zwischen den gegenüberliegenden Seiten eine constante Grösse behält.

Hätten wir dagegen eine Hyberbel zu Grunde gelegt, so würden wir eine Ellipse als geometrischen Ort der gedachten Kreise erhalten haben.

Gehen wir ferner auf 86) I. Teil zurück und setzen fest, dass $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=180^0$ oder $\gamma_1+\gamma_2=\gamma_3$ ist, so erhalten wir für den ersten Fall den Kegelschnitt

80) $$a^2\sin\varphi^2+b^2\frac{(a^2+3b^2)^2}{c^4}\cos\varphi^2=\frac{a^2b^2}{R^2},$$

$$s=\frac{4b^2}{c^2}R\cos\varphi,$$

und für den zweiten Fall

81) $$b^2\cos\varphi^2+a^2\frac{(3a^2+b^2)^2}{c^4}\sin\varphi^2=\frac{a^2b^2}{R^2},$$

$$s=\frac{4a^2}{c^2}R\sin\varphi.$$

Die Gleichungen werden noch einfacher, wenn wir die Bedingungen $b^2=-3a^2$ oder $b^2=-a^2$ einführen, wir würden damit auf schon betrachtete Verhältnisse zurückkommen.

Ferner folgt aus 4) die Ellipse

82) $$\frac{R^2}{c^4}(a^4\sin\varphi^2+b^4\cos\varphi^2)=\varrho^2.$$

Da s ausfällt, so haben wir allgemein den Satz, dass concentrische Kreise durch ihre Schnittpunkte mit einem Kegelschnitte Kreisvierecke liefern, deren Mittellinien sich alle in Einem Punkte schneiden. Die gegenüberliegenden Seiten wie die Diagonalen stehen, wie sich leicht zeigen lässt, symmetrisch gegen die Achsen.

Zieht man nämlich durch einen beliebigen Punkt $R(\psi)$ in der Ellipsenebene eine Gerade, welche mit der grossen Achse den Winkel τ bildet, so ergeben sich die durch die Ellipse und den Punkt bestimmten Strecken jener Geraden aus

83) $$x^2(a^2\sin\tau^2+b^2\cos\tau^2)+2x.R(a^2\sin\tau\sin\psi+b^2\cos\tau\cos\psi)$$
$$+R^2(a^2\sin\psi^2+b^2\cos\psi^2)-a^2b^2=0.$$

Drehen wir die Gerade um den Punkt $R(\psi)$, bis ihre zweite Lage

mit der ersten symmetrisch gegen die X-Achse ist, d. h. setzen wir $\tau = 180^0 - \tau$, so bleibt das Product

$$x_1 x_2 = x_3 x_4 \tag{84}$$

unverändert, so dass durch die entsprechenden Schnittpunkte ein Kreis geht.

Die Achsen der obigen Ellipse stehen zu ϱ in der Beziehung

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{\varrho},$$

ausserdem folgt noch

$$\frac{B}{A} = \frac{a^2}{b^2},$$

und aus II. 44)

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 - p'^2 - p''^2 - p'''^2 = s^2 - \varrho^2.$$

Endlich resultirt aus 4) noch

$$\frac{b^2}{a^2} \cot \varphi = \operatorname{tg}\frac{\gamma_1}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma_2}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma_3}{2} = \operatorname{tg}\psi.$$

§ 21.

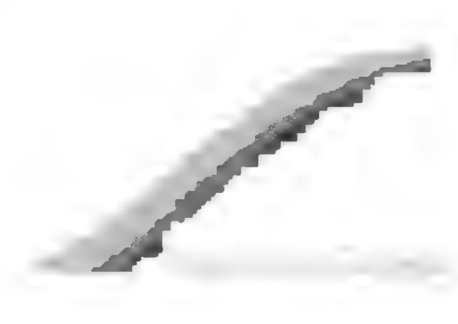
Das Problem der Normalen der Ellipse scheint bis jetzt noch nicht allgemein gelöst worden zu sein, so einfach dasselbe auch ist. Wir wollen zeigen, dass die im I. Teil entwickelten Methoden die vollständige Auflösung dieser Aufgabe enthalten.

Der Punkt in der Ebene der Ellipse, von welchem aus die Normalen gezogen werden sollen, habe in Bezug auf den Mittelpunkt der Curve die Polarcoordinaten $R(\alpha)$. In den Fusspunkten der Normalen ziehen wir senkrecht zur grossen Achse Gerade bis zum Durchschnitt mit dem um das Centrum mit der grossen Halbachse beschriebenen Kreise, verbinden diese Schnittpunkte mit dem Mittelpunkt und bezeichnen die hierdurch mit der X-Achse eingeschlossenen Winkel mit φ_1, φ_2, etc.

Entwickeln wir nun die Bedingungsgleichung für das Senkrechtstehen der Normalen der Ellipse in der Form

$$a + b \sin\varphi + c\cos\varphi + d\sin 2\varphi + e\cos 2\varphi = 0,$$

so finden wir



$$85)\quad \begin{aligned} a &= 0, \\ b &= a\cos\alpha, \\ c &= b\sin\alpha, \\ d &= \frac{c^2}{2R}, \\ e &= 0. \end{aligned}$$

Demzufolge ist die Cosinusresolvente

$$86)\quad \cos\gamma^3 + \left(\frac{a^2\cos\alpha^2 + b^2\sin\alpha^2}{c^4}R^2 - 1\right)\cos\gamma + \frac{R^2ab}{c^4}\sin 2\alpha = 0,$$

deren Wurzeln

$$\gamma_1 = \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) \quad \text{etc.}$$

sind.

Man bemerke die aus dem Fehlen des 2. Gliedes hervorgehende Formel

$$87)\quad \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) + \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4) + \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4) = 0,$$

und ferner

$$88)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) = \frac{d}{e} = \infty,$$

woraus

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 180^0,$$

und man wird erkennen, mit welcher Leichtigkeit unsere Methode zu diesen bekannten Formeln führt, welche ohne sie nur auf beschwerlichem Wege gefunden werden können.

Ferner beschreiben wir um einen Punkt $R'(\alpha')$ mit einem Radius s einen Kreis, ziehen wie vorhin nach den Durchschnittspunkten der Curven senkrecht zur grossen Achse Gerade bis zum Kreise um die Ellipse, und bezeichnen die Winkel zwischen den von den neuen Durchschnittspunkten nach dem Mittelpunkte gezogenen Radien und der Achse mit φ_1, φ_2, etc.

Die Constanten der Bedingungsgleichung in der Form

$$a + b\sin\varphi \ \ldots \ \text{etc.}$$

sind

$$89)\quad \begin{aligned} a &= a^2 + b^2 - 2(s^2 - R'^2), \\ b &= -4bR'\sin\alpha', \\ c &= -4aR'\cos\alpha', \\ d &= 0, \\ e &= c^2. \end{aligned}$$

Die Resolvente der Kreisgleichung ist demnach, wenn $a = 0$,

90)
$$\cos\gamma'^3+\left(4\frac{a^2\cos\alpha'^2+b^2\sin\alpha'^2}{c^4}R'^2-1\right)\cos\gamma'-4\frac{R'^2(a^2\cos\alpha'^2-b^2\sin\alpha'^2)}{c^4}=0.$$

Ferner folgt wegen $d=0$

$$\psi_1+\psi_2+\psi_3+\psi_4=0.$$

Sollen nun die beiden Resolventen identisch sein, so ergeben sich durch Gleichsetzen der Coefficienten gleich hoher Potenzen aus beiden Gleichungen die Bedingungen

91)
$$\frac{4R'^2}{c^4}(a^2\cos\alpha'^2+b^2\sin\alpha'^2)=\frac{R^2}{c^4}(a^2\cos\alpha^2+b^2\sin\alpha^2),$$
$$4R'^2\frac{(a^2\cos\alpha'^2-b^2\sin\alpha'^2)}{c^4}=\frac{abR^2}{c^4}\sin 2\alpha,$$

woraus wir nach einigen Umänderungen die einfachen Relationen erhalten

92)
$$\frac{b}{a}\operatorname{tg}\alpha'=\frac{1-\frac{b}{a}\operatorname{tg}\alpha}{1+\frac{b}{a}\operatorname{tg}\alpha},$$
$$4R'^2=\frac{R^2ab\sin 2\alpha}{a^2\cos\alpha'^2-b^2\sin\alpha'^2},$$

dieselben können auch in folgenden Formen auftreten

93)
$$R'\cos\alpha'=\frac{R}{2a\sqrt{2}}(a\cos\alpha+b\sin\alpha),$$
$$R'\sin\alpha'=\frac{R}{2b\sqrt{2}}(a\cos\alpha-b\sin\alpha).$$

Führt man die Projectionen ein, so ist

94)
$$p'=\frac{ap+bq}{2a\sqrt{2}},\qquad q'=\frac{ap-bq}{2b\sqrt{2}},$$

womit sich verbindet

95)
$$s^2=\frac{a^2+b^2}{2}+R'^2.$$

Die 1. Formel von 92) vereinfacht sich sehr bei Einführung leicht construirbarer Winkel $\operatorname{tg}\beta=\frac{b}{a}\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta'=\frac{b}{a}\operatorname{tg}\alpha'$ und es resultirt

96)
$$\beta'=45^0-\beta.$$

Verlängert man nämlich den einen Schenkel des Winkels α bis zum Kreise und fällt vom Durchschnittspunkte bis zur Ellipse eine Senkrechte zur Achse, so ergibt sich bekanntlich der entsprechende Polarwinkel β und ähnlich β'.

Vermittelst dieser Construction erhalten wir bei gegebenem α den entsprechenden Winkel α'.

Ferner ist $\frac{1}{2}(a\cos\alpha \pm b\sin\alpha)$ leicht construirbar.

Aus der Identität der Wurzeln resultiren nun die Beziehungen

$$97)\quad \begin{aligned} \varphi_1+\varphi_2-\varphi_3-\varphi_4 &= \psi_1+\psi_2-\psi_3-\psi_4,\\ \varphi_1-\varphi_2+\varphi_3-\varphi_4 &= \psi_1-\psi_2+\psi_3-\psi_4,\\ \varphi_1-\varphi_2-\varphi_3+\varphi_4 &= \psi_1-\psi_2-\psi_3+\psi_4,\\ \varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4 &= \psi_1+\psi_2+\psi_3+\psi_4+180^0. \end{aligned}$$

Durch Combination dieser Formeln finden wir

$$98)\quad \begin{aligned} \varphi_1 &= \psi_1+45^0,\\ \varphi_2 &= \psi_2+45^0,\\ \varphi_3 &= \psi_3+45^0,\\ \varphi_4 &= \psi_4+45^0. \end{aligned}$$

Diese Relationen geben die Lösung des Problems.

Um den Sinn, in welchem die Winkel φ und ψ zu nehmen sind, festzustellen, wählen wir den Punkt $R(\alpha)$ im 1. Quadranten, und nehmen die Winkel unterhalb der X-Achse φ_1, φ_2, φ_3, von der Rechten zur Linken fortgehend, positiv, dagegen φ_4 negativ. Dasselbe gelte bezüglich der Winkel ψ.

Die Entwickelung liefert demnach folgendes Resultat.

Um von einem Punkte $R(\alpha)$ die Normalen an die Ellipse zu ziehen construire man nach den Proportionen

$$99)\quad \begin{aligned} a\sqrt{2} : \tfrac{1}{2}(a\cos\alpha+b\sin\alpha) &= R : p',\\ b\sqrt{2} : \tfrac{1}{2}(a\cos\alpha-b\sin\alpha) &= R : q', \end{aligned}$$

die Coordinaten p', q' des Mittelpunktes eines Kreises vom Radius

$$100)\quad s = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}+R'^2}.$$

Dieser um $R'(\alpha')$ beschriebene Kreis trifft im Allgemeinen die Ellipse in 4 Punkten, durch welche wir Senkrechte zur X-Achse bis zum Kreise um die Ellipse ziehen, tragen den Gleichungen 98) zufolge von den Schnittpunkten an Bogen von 45^0 in entsprechender

Weise ab, dann treffen die von hier zur X-Achse gefällten Senkrechten die Ellipse in den Fusspunkten der Normalen.

Wir bemerken noch, dass die Discriminante der Gleichung auf die Evolute der Ellipse führt.

Eine andere Methode, Normalen an die Ellipse zu ziehen, wollen wir ohne Resolvente entwickeln.

Die typische Form transformiren wir in eine andere, in welcher 2φ statt φ vorkommt. Die Constanten sind für die Normalen und den Kreis in Uebereinstimmung, wenn wir setzen

$$\begin{array}{lll}
a = & \dfrac{a^2\cos\alpha^2 + b^2\sin\alpha^2}{\frac{c^4}{4R^2}} - 1 = & \dfrac{a^2 + b^2 - 2(s^2 - R'^2)}{c^2}, \\[2ex]
b = - & \dfrac{a^2\cos\alpha^2 + b^2\sin\alpha^2}{\frac{c^4}{4R^2}} = & -\dfrac{4aR'\cos\alpha'}{c^2}, \\[2ex]
c = & \dfrac{2ab\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{c^4}{4R^2}} = & -\dfrac{4bR'\sin\alpha'}{c^2} \\[2ex]
d = & 1 = & 1, \\
e = & 0 = & 0.
\end{array} \tag{101}$$

Hieraus entwickelt sich

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\beta &= \frac{b}{a}\operatorname{tg}\alpha, \\
\frac{b}{a}\operatorname{tg}\alpha' &= \operatorname{tg}2\beta, \\
R'\sin\varphi' &= q' = \frac{R^2}{c^2}\,a\sin 2\alpha, \\
s^2 - R'^2 &= a^2 - \frac{2aR'\cos\alpha'}{\cos 2\beta}
\end{aligned} \tag{102}$$

Die beiden ersten Formeln geben mit Leichtigkeit den Winkel α', aus der dritten ergibt sich die Ordinate des Kreiscentrums und aus der vierten der Radius. Der Kreis bestimmt dann in den Winkeln ψ_1, ψ_2, etc. die folgenden, den Normalen entsprechenden Winkel

$$\varphi_1 = \frac{\psi_1}{2}, \qquad \varphi_2 = \frac{\psi_2}{2}, \text{ etc.} \tag{103}$$

und damit die zugehörigen Fusspunkte.

§ 22.

Schliesslich wollen wir unsere Methode noch auf die Normalen der Hyperbel anwenden. Die Resultate sind indes weniger einfach, als bei der Ellipse.

Analog dem Vorhergehenden finden wir, wenn wir den Punkt, von welchem aus Normalen gezogen werden sollen, mit $R(\alpha)$ bezeichnen, als Gleichung für die Normalen die Form $a + b\sin\varphi \ldots$, in welcher φ der Winkel ist, der bei der Construction der Hyperbel vorkommt und mit den Coordinaten derselben verknüpft ist durch

$$x = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad y = b\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Die Constanten sind

$$104) \qquad \begin{aligned} a &= 0, \\ b &= -\frac{c^2}{R}, \\ c &= b\sin\alpha, \\ d &= \frac{a}{2}\cos\alpha, \\ e &= 0. \end{aligned}$$

Die Resolvente ist demnach

$$105) \qquad \cos\gamma^3 + \left(\frac{c^4 + R^2b^2\sin\alpha^2}{R^2a^2\cos\alpha^2} - 1\right)\cos\gamma + \frac{2bc^2R\sin\alpha}{R^2a^2\cos\alpha^2} = 0.$$

Wir haben also auch hier

$$106) \qquad \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) + \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4) + \cos\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4) = 0.$$

Der Kreis vom Halbmesser s und dem Centrum $R'(\alpha')$ hat infolge der Constanten, worunter wir $a = 0$ setzen,

$$107) \qquad \begin{aligned} a &= s^2 - R'^2 - (a^2 + c^2) = 0, \\ b &= 0, \\ c &= 4R'a\cos\alpha', \\ d &= 2R'b\sin\alpha', \\ e &= s^2 - R^2 + a^2 + c^2, \end{aligned}$$

die Resolvente

$$108) \qquad \cos\gamma^3 + \left(\frac{R'^2a^2\cos\alpha'^2}{c^4 + R'^2b^2\sin\alpha'^2} - 1\right)\cos\gamma + \frac{R'^2a^2c^2\cos\alpha'^2}{(c^4 + R'^2b^2\sin\alpha'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Die Identität verlangt die Bedingungen

$$109)\qquad \frac{2R'\sin\alpha'}{R\sin\alpha} = \left(\frac{B}{b\sin\alpha}\right)^2, \quad \frac{2R'\cos\alpha'}{R\cos\alpha} = \left(\frac{A}{a\cos\alpha}\right)^2 \frac{A}{b\sin\alpha},$$

wo

$$110)\qquad \begin{aligned} A^2 &= b^2\sin\alpha^2 + \frac{c^4}{R^2}, \\ B^2 &= b^2\sin\alpha^2 - \frac{c^4}{R^2}. \end{aligned}$$

ferner ist

$$111)\qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\psi_1+\psi_2+\psi_3+\psi_4) = \frac{bR'\sin\alpha'}{c^2} = \operatorname{tg}\delta.$$

Alsdann erhalten wir aus

$$112)\qquad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4) &= \tfrac{1}{2}(\psi_1+\psi_2+\psi_3+\psi_4) - \delta - 90^0, \\ \tfrac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2-\varphi_3-\varphi_4) &= \tfrac{1}{2}(\psi_1+\psi_2-\psi_3-\psi_4), \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

die den Normalen entsprechenden Winkel

$$113)\qquad \begin{aligned} \varphi_1 &= \psi_1 - 45^0 - \frac{\delta}{2}, \\ \varphi_2 &= \psi_2 - 45^0 - \frac{\delta}{2}, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Eine einfache Construction ergibt hieraus die Normalenfusspunkte der Hyperbel.

Die Construction der Normalen der Parabel bietet keine Schwierigkeiten dar, weswegen wir darauf nicht weiter eingehen.

XI.

Oscillationen eines Bifilarpendels.

Von

R. Hoppe.

Ein Körper sei an 2 Fäden (undehnbaren, gewichtlosen geraden Linien) aufgehängt, die obern Enden der Fäden (0)(1) im Raume, die untern (2)(3) am Körper fest; dann kann der Körper noch 4 unabhängige Bewegungen machen. Die Schwere des Körpers sei die allein wirkende Kraft, (4) sei sein Schwerpunkt. (0) sei Anfang der xyz, die x vertical nach unten, die xy Ebene gehe durch (1). Die Coordinaten der Punkte (1)(2)(3)(4) seien durch die gleichen Indices bezeichnet. Ferner seien die Verbindungslinien, welche constante Länge haben:

$$l = (02); \quad l_1 = (13); \quad k = (23); \quad h = (24); \quad h_1 = (34)$$

Es soll zuerst die Gleichgewichtslage bestimmt werden. Dann will ich solche Fälle der Bewegung in Betracht ziehen, wo nach Verbrauch der lebendigen Kraft jeder Punkt des Körpers auf dem durchlaufenen Wege zurückkehrt. In diesen Fällen ist die Bewegung geometrisch bestimmt und die Geschwindigkeit durch die Gleichung der lebendigen Kraft bekannt.

§. 1. Gleichgewichtslage.

Als erste Bedingung des Gleichgewichts liegt zu Tage, dass die Figur (01234) in eine verticale Ebene fällt. Denn die Lage des Körpers ist bestimmt durch die des Dreiecks (234); er lässt sich durch dessen 3 Seiten ersetzen. Dann wirken in jeder Ecke, incl. der Spannungen, 3 Kräfte, deren Richtungen in je eine Ebene fallen

müssen; folglich liegen alle 5 Punkte mit deren Verbindungen in einer Ebene, und diese ist vertical, weil die Schwerkraftsrichtung auch dazu gehört.

Demnach sind die z aller 5 Punkte null. Sei nun

$$x_1 = e\cos\varepsilon;\quad x_2 = l\cos\varphi;\quad x_3 = x_2 + k\cos\psi;\quad x_4 = x_2 + h\cos(\psi+\alpha) \tag{1}$$
$$y_1 = e\sin\varepsilon;\quad y_2 = l\sin\varphi;\quad y_3 = y_2 + k\sin\psi;\quad y_4 = y_2 + h\sin(\psi+\alpha)$$

Dann ist

$$l_1^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 =$$
$$e^2 + l^2 + k^2 - 2el\cos(\varphi-\varepsilon) - 2ek\cos(\psi-\varepsilon) + 2kl\cos(\psi-\varphi) \tag{2}$$
$$h_1^2 = (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 = k^2 + h^2 - 2kh\cos\alpha$$

Die letztere Gleichung ist nur eine Relation zwischen Stücken des unveränderlichen Dreiecks (234). Zur erstern kommt daher nur noch die Bedingung des Maximums x_4, nämlich:

$$-\partial x_4 = l\sin\varphi\,\partial\varphi + h\sin(\psi+\alpha)\,\partial\psi = 0$$

Eliminirt man zwischen ihr und der Ableitung von Gl. (2), nämlich

$$l[e\sin(\varphi-\varepsilon) + k\sin(\psi-\varphi)]\partial\varphi + k[e\sin(\psi-\varepsilon) - l\sin(\psi-\varphi)]\partial\psi = 0 \tag{3}$$

die Differentiale, so kommt:

$$k\sin\varphi[l\sin(\psi-\varphi) - e\sin(\psi-\varepsilon)] + h\sin(\psi+\alpha)[k\sin(\psi-\varphi) + e\sin(\varphi-\varepsilon)] = 0 \tag{4}$$

oder in Coordinaten ausgedrückt:

$$y_4(x_2y_3 - x_3y_2) + x_1y_2(y_4 - y_3) + y_1(x_3y_2 - x_2y_4) = 0 \tag{5}$$

Diese Gleichung verbunden mit den 5 Gleichungen

$$x_2^2 + y_2^2 = l^2;\quad (x_3-x_2)^2 + (y_3-y_2)^2 = k^2;\quad (x_4-x_2)^2 + (y_4-y_2)^2 = h^2$$
$$(x_3-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2 = l_1^2;\quad (x_4-x_3)^2 + (y_4-y_3)^2 = h_1^2$$

bestimmt die 6 gesuchten Grössen x_2, x_3, x_4, y_2, y_3, y_4. Die Elimination von 5 derselben gibt eine sehr hohe Gleichung zur Berechnung der sechsten. Die numerische Berechnung im einzelnen Falle ist wol noch am kürzesten, wenn man φ zwischen Gl. (2) und (4) eliminirt, und die resultirende Gleichung nach ψ auflöst.

Dagegen kann man leicht für beliebige Lage des Körpers, für welche nur das Dreieck (234) vertical ist, den einen Aufhängepunkt (1) so bestimmen, dass Gleichgewicht stattfindet. Hier sind die genannten 6 Grössen gegeben, und Gl. (5) drückt die Gerade aus, auf welcher der Punkt (x_1y_1) liegen muss. Diese Gerade kann offenbar nur mit (13) zusammenfallen, da man im Gleichgewicht jeden Punkt des Fa-

dens (13) fest machen kann. Dies bestätigt sichtlich Gl. (5), wenn man sie so schreibt:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 - x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 - y_1 \\ y_4 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

Die Länge l_1 verändert sich mit dem Aufhängepunkte, darf also nicht gegeben sein.

§. 2. Oscillation in verticaler Ebene.

Die Bedingung, unter der ein Bifilarpendel in verticaler Ebene oscilliren kann, ergibt sich am schnellsten aus den Laplace'schen Gleichungen, welche die Bewegung eines Körpers relativ zu seinem Schwerpunkt bestimmen.

Sind x, y, z die Coordinaten des Körperelements ∂m bezüglich auf solche im Raume der Richtung nach feste Axen, und ξ, η, ζ bezüglich auf solche am Körper feste Axen, deren Anfang im Schwerpunkt liegt, verbunden durch die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\,\xi + b\,\eta + c\,\zeta \\ y &= a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta \\ z &= a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

ist ferner

$$\left.\begin{aligned} p &= cb' + c_1b_1' + c_2b_2' \\ q &= ac' + a_1c_1' + a_2c_2' \\ r &= ba' + b_1a_1' + b_2a_2' \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

wo der Accent die Differentiation nach der Zeit bezeichnet, und wirken auf ∂m die Componenten XYZ, so sind die Gleichungen der relativen Bewegung:

$$\left.\begin{aligned} (Ap+Fq+Er)' + \begin{vmatrix} q & Fp+Bq+Dr \\ r & Ep+Dq+Cr \end{vmatrix} &= \int \begin{vmatrix} a & x & X \\ a_1 & y & Y \\ a_2 & z & Z \end{vmatrix} \partial m \\ (Fp+Bq+Dr)' + \begin{vmatrix} r & Ep+Dq+Cr \\ p & Ap+Fq+Er \end{vmatrix} &= \int \begin{vmatrix} b & x & X \\ b_1 & y & Y \\ b_2 & z & Z \end{vmatrix} \partial m \\ (Ep+Dq+Cr)' + \begin{vmatrix} p & Ap+Fq+Er \\ q & Fp+Bq+Dr \end{vmatrix} &= \int \begin{vmatrix} c & x & X \\ c_1 & y & Y \\ c_2 & z & Z \end{vmatrix} \partial m \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

wo

$$A = \int(\eta^2 + \zeta^2)\partial m;\quad B = \int(\zeta^2 + \xi^2)\partial m;\quad C = \int(\xi^2 + \eta^2)\partial m$$
$$D = -\int\eta\zeta\partial m;\quad E = -\int\zeta\xi\partial m;\quad F = -\int\xi\eta\partial m$$

Diese Gleichungen lassen sich auf das Bifilarpendel anwenden, wenn wir die Spannungen der Fäden als 2 Kräfte ansehen, die auf die Punkte (2)(3) des als frei gedachten Körpers mit den Componenten $X_2 Y_2$ und $X_3 Y_3$ wirken.

Führt man die momentane Lage, deren Bedingung gesucht wird, ein, so ist zu setzen:

$z = 0$ für die vorkommenden Punkte,

$Z = 0$ durchweg,

$c = c_1 = a_2 = b_2 = 0;\quad c_2 = 1$

$a = b_1 = \cos\omega;\quad a_1 = -b = \sin\omega$

woraus nach (8):

$$p = q = 0;\quad r = \omega'$$

und die Gl. (9) werden:

$$E\omega'' - D\omega'^2 = 0$$
$$D\omega'' + E\omega'^2 = 0$$
$$C\omega'' = \begin{vmatrix} x_2 - x_4 & X_2 \\ y_2 - y_4 & Y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 - x_4 & X_3 \\ y_3 - y_4 & Y_3 \end{vmatrix}$$

Aus den 2 ersten folgt:

$$(D^2 + E^2)(\omega''^2 + \omega'^4) = 0$$

Da der zweite Factor nicht null sein kann, wenn das Pendel nicht still stehen soll, so muss

$$D = E = 0$$

sein. Beide Grössen bleiben dann null bei jeder Drehung des Axensystems um die ζ Axe, mithin auch bei derjenigen, für welche F verschwindet, also alle Körperaxen Hauptträgheitsaxen werden.

Bedingung der Bewegung in der Verticalebene ist demnach, dass der Körper in zwei solchen Punkten aufgehängt sei, die in der Ebene zweier Hauptträgheitsaxen liegen.

Seien demgemäss die Axen der $x_1 y_1 z_1$ Hauptträgheitsaxen, mithin $D = E = F = 0$, und

$$x = \xi\cos\omega - \eta\sin\omega$$
$$y = \xi\sin\omega + \eta\cos\omega$$

dann lautet die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$m(x_4'^2 + y_4'^2) + C\omega'^2 = 2gm(x_4 + d) \tag{10}$$

woraus, wenn $C = mn$:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \sqrt{\frac{\partial x_4^2 + \partial y_4^2 + n\,\partial\omega^2}{x_4 + d}} \tag{11}$$

Hier sind noch x_4 und y_4 in ω auszudrücken. Wendet man die Substitutionen (1) an, wo

$$\psi = \omega + \text{const.}$$

so hat man zunächst:

$$x_4'^2 + y_4'^2 = \left[l^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)^2 + h^2 + 2hl\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\cos(\psi - \varphi + \alpha)\right]\omega'^2 \tag{12}$$

und nach Gl. (3):

$$l\frac{\partial\varphi}{\partial\psi} = k\frac{l\sin(\psi - \varphi) - e\sin(\psi - \varepsilon)}{k\sin(\psi - \varphi) + e\sin(\varphi - \varepsilon)}$$

Gl. (2) lässt sich folgendermassen zerlegen:

$$E\cos\mu = e\cos(\psi - \varepsilon) - k\,; \quad E\sin\mu = e\sin(\psi - \varepsilon) \tag{13}$$

$$\cos\lambda = \frac{E^2 + l^2 - l_1^2}{2lE} \tag{14}$$

$$\psi - \varphi = \lambda + \mu \tag{15}$$

Hiernach wird

$$\begin{aligned} k\sin(\psi - \varphi) + e\sin(\varphi - \varepsilon) &= k\sin(\psi - \varphi) \\ &\quad + e\sin(\psi - \varepsilon)\cos(\psi - \varphi) - e\cos(\psi - \varepsilon)\sin(\psi - \varphi) \\ &= E\sin\mu\cos(\psi - \varphi) - E\cos\mu\sin(\psi - \varphi) \\ &= E\sin(\mu - \psi + \varphi) = -E\sin\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l\frac{\partial\varphi}{\partial\psi} &= k\frac{e\sin(\psi - \varepsilon) - l\sin(\lambda + \mu)}{E\sin\lambda} \\ &= \frac{k}{E}\left[\frac{E - l\cos\lambda}{\sin\lambda}e\sin(\psi - \varepsilon) - l(e\cos(\psi - \varepsilon) - k)\right] \end{aligned}$$

Dies in (12), von da nebst dem Werte

$$x_4 = \frac{1}{E}\left[el\cos(\lambda - \varepsilon) - kl\cos(\lambda - \psi) + Eh\cos(\psi + \alpha)\right]$$

in (11) eingeführt gibt:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{\partial \omega}{\sqrt{E \sqrt{el \cos(\lambda - \varepsilon) - kl \cos(\lambda - \psi) + E[h \cos(\psi + \alpha) - d]}}} \times$$

$$\sqrt{\Big\{ k \left[\frac{E - l \cos \lambda}{\sin \lambda} e \sin(\psi - \varepsilon) - l(e \cos(\psi - \varepsilon) - k) \right] \times}$$

$$\left[k \frac{E - l \cos \lambda}{\sin \lambda} e \sin(\psi - \varepsilon) - kl(e \cos(\psi - \varepsilon) - k) \right.$$

$$\left. + 2he \cos(\lambda + \psi + \alpha - \varepsilon) - 2hk \cos(\lambda + \alpha) \right] + (h^2 + n) E^2 \Big\} \quad (16)$$

wo $\cos \lambda$ und $\sin \lambda$ noch nach Gl. (14) verbunden mit

$$E^2 = e^2 + k^2 - 2ek \cos(\psi - \varepsilon) \qquad (17)$$

in ψ auszudrücken sind.

In Betreff der geometrischen Bedeutung vollende man das Parallelogramm (0235); dann ist

$$E = (15); \quad \lambda = \text{Wkl. } (153); \quad \alpha = \text{Wkl. } (324)$$

ε, ψ, ω die Richtungswinkel von (01), (23) und von der ξ Axe gegen die Verticale; ω kann man $= \psi$ machen, wenn man die ξ Axe parallel (23) annimmt.

Daraus ist ersichtlich, dass E nur constant null sein kann, wenn das Viereck (0123) ein Parallelogramm ist. Auf diesen Fall ist die Rechnung nicht anwendbar, da ψ constant wird, und Gl. (2) in $0 = 0$ übergeht. Hier ist die Bewegung des Körpers eine reine Translation ohne Drehung. Da diese Translation die des Punktes (2) ist, so kann man die Masse und Schwere des Körpers nach (2) verlegt denken. Das Bifilarpendel schwingt dann nach dem Gesetze eines einfachen Pendels, abhängig allein von der Länge $l = l_1$ und dem Gewichte der Masseneinheit, unabhängig aber von der Masse und Beschaffenheit des Körpers.

§. 3. Oscillation bei verticaler Bewegung des Schwerpunkts.

Nimmt man an, dass der Schwerpunkt des Körpers sich stets vertical bewegt, und dass seine horizontalen Ebenen beständig horizontal bleiben, so hat man, bei Anwendung der Relationen (7),

$$a_1 = a_2 = b = c = 0; \quad a = 1$$
$$b_1 = c_2 = \cos \omega; \quad b_2 = -c_1 = \sin \omega$$
$$q = r = 0; \quad p = \omega'$$

und findet analog wie in §. 2., dass $E = F = 0$, daher die x_1 Axe eine Hauptträgheitsaxe sein muss.

Alle weitern Bedingungen sind offenbar erfüllt, wenn $l = l_1$, $h = h_1$ und $x_1 = 0$ ist. Man kann dann stets die Gerade (23) horizontal, die Ebene (234) vertical erhalten, so dass die Mitten von (01) und (23) mit (4) in einer Verticale liegen und bleiben. Diese Verticale ist es, welche nach dem Vorigen Hauptträgheitsaxe des Körpers sein muss.

Wir nehmen die Mitte von (01) zum Anfang der xyz, die Mitte von (23) zum Anfang der $\xi\eta\zeta$. Die Relationen werden:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_2 + \xi \\ y &= \eta\cos\omega - \zeta\sin\omega \\ z &= \eta\sin\omega + \zeta\cos\omega \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Die Gleichung der lebendigen Kraft lautet:

$$m x_2'^2 + A\omega'^2 = 2gm(x_2 - d) \qquad (19)$$

da $x_4 = x_2 + \text{const.}$ ist. Die Coordinaten (xyz) für (0) und (1) sind

$$\left(0,\ -\frac{e}{2},\ 0\right) \quad \text{und} \quad \left(0,\ \frac{e}{2},\ 0\right)$$

die $(\xi\eta\zeta)$ für (2) und (3)

$$\left(0,\ -\frac{k}{2},\ 0\right) \quad \text{und} \quad \left(0,\ \frac{k}{2},\ 0\right)$$

daher die (xyz) nach (18)

$$\left(x_2,\ -\frac{k\cos\omega}{2},\ -\frac{k\sin\omega}{2}\right) \quad \text{und} \quad \left(x_2,\ \frac{k\cos\omega}{2},\ \frac{k\sin\omega}{2}\right)$$

demnach

$$l^2 = l_1^2 = x_2^2 + \tfrac{1}{4}(k\cos\omega \text{ [illegible]}$$
$$= x_2^2 + \text{ [illegible] } e^2)$$

woraus:

$$0 = \text{ [illegible] } ke \text{ [illegible]}$$

Eliminirt man hiernach ω [illegible] u[illegible] man:

$$x_2'^2 \left\{ k^2e^2 - \left[2x_2^2 - \text{ [illegible]} \right]^2 \text{ [illegible]}$$

$$2g \left\{ k^2e^2 - \left[2x_2^2 - \text{ [illegible]} \right]^2 \right\} \text{ [illegible]}$$

Sei f der Abstand der Parallelen (01) und (23), und zur Abkürzung

$$ke = a^2$$

dann hat man:

$$l^2 = f^2 + \left(\frac{k-e}{2}\right)^2$$

und die Gleichung wird:

$$\begin{aligned} x_2'^2\{f^2(a^2-f^2)+(2f^2-a^2+4n^2)x_2^2-x_2^4\} &= \\ 2g\{f^2(a^2-f^2)+(2f^2-a^2)x_2^2-x_2^4\}(x_2+d) & \end{aligned} \tag{20}$$

insbesondere für $f = a$:

$$x_2'^2(a^2+4n^2-x_2^2) = 2g(a^2-x_2^2)(x_2+d)$$

so dass für 2 Werte von d die Zeit elliptisches Integral wird, nämlich für

$$d = a; \quad t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int\frac{\partial x_2}{a+x_2}\sqrt{\frac{a^2+4n^2-x_2^2}{a-x_2}}$$

$$d = \sqrt{a^2+4n^2}; \quad t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int\partial x_2\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+4n^2}-x_2}{a^2-x_2^2}}$$

Die allgemeine Gleichung (20) hat die Form:

$$x_2'^2(P^2-x_2^2)(x_2^2\pm Q^2) = 2g(P_0^2-x_2^2)(x_2^2\pm Q_0^2)(x_2+d) \tag{21}$$

wo

$$\pm P^2Q^2 = \pm P_0^2Q_0^2 = f^2(a^2-f^2) \tag{22}$$

mithin die Doppelzeichen entsprechend sind, und zwar ist

$$P_0 = f; \quad Q_0^2 = \pm(a^2-f^2)$$

$$P^2 = \sqrt{(\tfrac{1}{2}a^2-2n^2)^2+4n^2f^2}+f^2-\tfrac{1}{2}a^2+2n^2$$

$$\pm Q^2 = \sqrt{(\tfrac{1}{2}a^2-2n^2)^2+4n^2f^2}-f^2+\tfrac{1}{2}a^2-2n^2$$

$$\frac{-f^2\mp Q^2}{\pm 4Q^2}(f^2\pm Q^2)$$

$$\frac{{}^2-f^2}{}(P^2-f^2)$$

9 linearen Factoren in Gl. (21) irgend wäre dies für obere Zeichen nur mög-

oder $d = P_0$ oder $d = P$

nach (22) immer gleichzeitig und

und findet analog wie in §. 2., dass $E = F = 0$, daher die x_1 Axe eine Hauptträgheitsaxe sein muss.

Alle weitern Bedingungen sind offenbar erfüllt, wenn $l = l_1$, $h = h_1$ und $x_1 = 0$ ist. Man kann dann stets die Gerade (23) horizontal, die Ebene (234) vertical erhalten, so dass die Mitten von (01) und (23) mit (4) in einer Verticale liegen und bleiben. Diese Verticale ist es, welche nach dem Vorigen Hauptträgheitsaxe des Körpers sein muss.

Wir nehmen die Mitte von (01) zum Anfang der xyz, die Mitte von (23) zum Anfang der $\xi\eta\zeta$. Die Relationen werden:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_2 + \xi \\ y &= \eta \cos\omega - \zeta \sin\omega \\ z &= \eta \sin\omega + \zeta \cos\omega \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Die Gleichung der lebendigen Kraft lautet:

$$m x_2'^2 + A\omega'^2 = 2gm(x_2 - d) \tag{19}$$

da $x_4 = x_2 + \text{const.}$ ist. Die Coordinaten (xyz) für (0) und (1) sind

$$\left(0,\ -\frac{e}{2},\ 0\right) \quad \text{und} \quad \left(0,\ \frac{e}{2},\ 0\right)$$

die $(\xi\eta\zeta)$ für (2) und (3)

$$\left(0,\ -\frac{k}{2},\ 0\right) \quad \text{und} \quad \left(0,\ \frac{k}{2},\ 0\right)$$

daher die (xyz) nach (18)

$$\left(x_2,\ -\frac{k\cos\omega}{2},\ -\frac{k\sin\omega}{2}\right) \quad \text{und} \quad \left(x_2,\ \frac{k\cos\omega}{2},\ \frac{k\sin\omega}{2}\right)$$

demnach

$$\begin{aligned} l^2 = l_1^2 &= x_2^2 + \tfrac{1}{4}(k\cos\omega - e)^2 + \tfrac{1}{4}(k\sin\omega)^2 \\ &= x_2^2 + \tfrac{1}{4}(k^2 + e^2) - \tfrac{1}{2}ke\cos\omega \end{aligned}$$

woraus:

$$0 = 2x_2 x_2' + \tfrac{1}{2}ke\omega'\sin\omega$$

Eliminirt man hiernach ω aus Gl. (19) und setzt $A = mn^2$, so erhält man:

$$x_2'^2 \left\{k^2e^2 - \left[2x_2^2 - 2l^2 + \frac{k^2+e^2}{2}\right]^2 + 16n^2x_2^2\right\} =$$

$$2g\left\{k^2e^2 - \left[2x_2^2 - 2l^2 + \frac{k^2+e^2}{2}\right]^2\right\}(x_2 + d)$$

Sei f der Abstand der Parallelen (01) und (23), und zur Abkürzung

$$ke = a^2$$

dann hat man:

$$l^2 = f^2 + \left(\frac{k-e}{2}\right)^2$$

und die Gleichung wird:

$$x_2'^2\{f^2(a^2-f^2)+(2f^2-a^2+4n^2)x_2^2-x_2^4\} = 2g\{f^2(a^2-f^2)+(2f^2-a^2)x_2^2-x_2^4\}(x_2+d) \tag{20}$$

insbesondere für $f = a$:

$$x_2'^2(a^2+4n^2-x_2^2) = 2g(a^2-x_2^2)(x_2+d)$$

so dass für 2 Werte von d die Zeit elliptisches Integral wird, nämlich für

$$d = a; \quad t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int\frac{\partial x_2}{a+x_2}\sqrt{\frac{a^2+4n^2-x_2^2}{a-x_2}}$$

$$d = \sqrt{a^2+4n^2}; \quad t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int\partial x_2\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+4n^2}-x_2}{a^2-x_2^2}}$$

Die allgemeine Gleichung (20) hat die Form:

$$x_2'^2(P^2-x_2^2)(x_2^2\pm Q^2) = 2g(P_0^2-x_2^2)(x_2^2\pm Q_0^2)(x_2+d) \tag{21}$$

wo

$$\pm P^2Q^2 = \pm P_0^2Q_0^2 = f^2(a^2-f^2) \tag{22}$$

mithin die Doppelzeichen entsprechend sind, und zwar ist

$$P_0 = f; \quad Q_0^2 = \pm(a^2-f^2)$$

$$P^2 = \sqrt{(\tfrac{1}{2}a^2-2n^2)^2+4n^2f^2}+f^2-\tfrac{1}{2}a^2+2n^2$$

$$\pm Q^2 = \sqrt{(\tfrac{1}{2}a^2-2n^2)^2+4n^2f^2}-f^2+\tfrac{1}{2}a^2-2n^2$$

$$n^2 = \frac{a^2-f^2\mp Q^2}{\pm 4Q^2}(f^2\pm Q^2)$$

$$= \frac{P^2+a^2-f^2}{4P^2}(P^2-f^2)$$

Sollten nun unter den 9 linearen Factoren in Gl. (21) irgend zwei einander gleich sein, so wäre dies für obere Zeichen nur möglich, wenn

$$P = P_0 \text{ oder } Q = Q_0 \text{ oder } d = P_0 \text{ oder } d = P$$

wäre. Die ersten 2 Fälle sind nach (22) immer gleichzeitig und

geben $n = 0$, die 2 letzten sind speciell für $Q = Q_0 = 0$ schon in Anwendung gekommen.

Für untere Zeichen kommen noch folgende Fälle hinzu:

$$P = Q_0; \quad Q = P_0; \quad d = \pm Q; \quad d = \pm Q_0$$

Die ersten beiden sind wieder gemeinschaftlich und fordern $f = a$, wo P, Q, P_0 und Q_0 verschwinden, sind also unmöglich.

Fälle, wo sich die Anzahl der linearen Factoren vermindert, sind also nur die folgenden. Bei beliebigem Anfangswert der lebendigen Kraft reducirt sie sich für $f = a$ von 9 auf 5, für bestimmte Anfangswerte wird sie um 2 vermindert und reducirt sich, wenn $f = a$, für 2 verschiedene Werte auf 3, wenn f nicht $= a$, für 6 verschiedene Werte auf 7.

XII.

Allgemeiner Satz der in T. XLVII. S. 333. mitgeteilten Uebungsaufgabe.

Von

Schnell.

Die Aufgabe ging dahin: in einem gegebenen Quadrate durch Zeichnung von 4 Geraden unmittelbar ein Quadrat herzustellen, dessen Inhalt gleich einem Fünfteil, und dessen Mittelpunkt der des gegebenen Quadrats ist. Lösung: man halbirt die Seiten und verbindet die Schnittpunkte mit gegenüber liegenden Ecken der Reihe nach durch 4 Gerade; diese begrenzen im Innern das gesuchte Quadrat.

Die Lösung beruht auf einem allgemeinen Satze, welcher sowol Rechtecke wie Quadrate begreift und dahin lautet:

> „Wenn man auf den Seiten resp. deren Richtungen eines „rechtwinkligen Parallelogramms dieselbe Seitenquote der „Reihe nach von den Eckpunkten aus abträgt, und die „Schnittpunkte mit den gegenüber liegenden Ecken der „Reihe nach durch vier Gerade verbindet, so entsteht ein „inneres homocentrisches Parallelogramm, dessen Inhalt „sich zu dem des äussern verhält, wie das Quadrat der „Differenz zu der Summe der Quadrate einer Seite und „ihres Quotenabschnitts“.

In beiden Figuren (S. Fig. 1. und 2.) ist $ABCD$ das gegebene rechtwinklige Parallelogramm. AF, BG, CH und DE sind die Quotenabschnitte der Seiten AB, BC, CD und DA. In Fig. 1. ist die Quote kleiner, in Fig. 2. grösser als die betreffende Seite.

$$AF = CH \quad \text{und} \quad BG = DE$$

$$\frac{AF}{AB} = \frac{BG}{BC}$$

In beiden Fällen ist BF resp. CG die Differenz der zugehörigen Seite AB resp. BC und ihrer Quote AF resp. BG.

Thesis:

1) $JKLM$ ist ein Parallelogramm;

2) es hat mit $ABCD$ denselben Mittelpunkt N;

3) $\frac{JKLM}{ABCD} = \frac{BF^2}{AB^2 + AF^2} = \frac{CG^2}{BC^2 + BG^2}$

Ad Nr. 1. Die Dreiecke ABG und CDE einerseits sowie BCH und DAF andrerseits sind congruent. Als gleiche Transversalen zwischen Parallelen sind AG und CE sowie BH und DF zwei Parallelenpaare, welche sich schneidend ein Parallelogramm bilden.

Ad Nr. 2. Aus der Congruenz der Dreiecke ABL und CDJ folgt, dass $AL = CJ$, und wenn man daher A mit C und J mit L durch Gerade verbindet, so entstehen die congruenten Dreiecke ANL und CNJ; da hienach $AN = NC$ und $JN = NL$, so ist N der Halbirungspunkt der Diagonalen AC und JL, also der Mittelpunkt der beiden Parallelogramme.

Ad Nr. 3. Der Inhalt von $ABCD$ ist $= AB.BC$,
derjenige von $JKLM = KL.GO = LM.HP$.

Wir wählen $KL.OG$ und bestimmen ihre Grösse im Verhältniss zur Seite AB und ihrer Quote AF unter Zuhülfenahme von AG.

a) Zunächst KL.

Da $AK = CM$, so verhält sich:

$$\frac{GL}{AK}\left(= \frac{BG}{BC}\right) = \frac{AF}{AB}$$

Ferner verhält sich:

$$\frac{KL}{AK} = \frac{BF}{AF}$$

also verhält sich:

$$\frac{GL}{AK} : \frac{KL}{AK} = \frac{AF}{AB} : \frac{BF}{AF}$$

folglich ist

$$\frac{GL}{KL} = \frac{AF^2}{AB.BF}$$

Wenn wir dies Verhältniss als massgebend annehmen, so verhält sich:

$$\frac{AK}{GL}\left(=\frac{AB}{AF}\right)=\frac{AB.AF}{AF^2}$$

Die drei Teile von AG:

$$GL,\ AK \text{ und } KL$$

verhalten sich also zu einander wie

$$AF^2,\ (AB.AF) \text{ und } (AB.BF).$$

Um nun diesen angenommenen Verhältnisswerten der drei Teile gegenüber den Verhältnisswert der ganzen Linie AG zu bilden, ist zwar zu berücksichtigen, dass in Fig. 1.

$$AG = GL + AK + KL,$$

in Fig. 2.

$$AG = GL + AK - KL$$

ist, der Verhältnisswert also im ersten Falle sein würde:

$$AF^2 + (AB.AF) + (AB.BF)$$

im zweiten:

$$AF^2 + (AB.AF) - (AB.BF),$$

allein, da im ersten Fall:

$$BF = AB - AF$$

im zweiten:

$$BF = AF - AB,$$

so ist in beiden Fällen

$$AG = AB^2 + AF^2$$

zu setzen, so dass sich verhält:

$$\frac{KL}{AG}=\frac{AB.BF}{AB^2+AF^2}$$

folglich ist

$$KL=\frac{AB.BF}{AB^2+AF^2}AG$$

b) Sodann GO.

Da die Dreiecke COG und ABG ähnlich sind ($\angle GCO = \angle AGB$), so verhält sich:

$$\frac{GO}{GC}=\frac{AB}{AG}$$

folglich ist

$$GO=\frac{AB.GC}{AG}$$

Da aber

$$\frac{GC}{BC}=\frac{BF}{AB},$$

so ist:

$$GC=\frac{BF, BC}{AB},$$

also:

$$GO=\frac{AB.BF.BC}{AG.AB}=\frac{BF.BC}{AG}$$

Schluss: Multipliciren wir KL und GO, so ist:

$$JKLM=\frac{AB.BF.AG.BF.BC}{(AB^2+AF^2).AG}=\frac{BF^2}{AB^2+AF^2}AB.BC,$$

und da BF sich zu AB und AF verhält, wie GC zu BC und BG, so ist:

$$\frac{JKLM}{ABCD}=\frac{BF^2}{AB^2+AF^2}=\frac{CG^2}{BC^2+BG^2}$$

was zu beweisen war.

Uebrigens ist das letzte Beweisresultat natürlich auch selbständig zu erreichen, wenn man

$$JKLM=LM.HP$$

sein lässt und analog, wie vorstehend, verfährt.

Zusatz 1. Erleichtert ist der Beweis, wenn $ABCD$ ein Quadrat ist, weil dann auch $JKLM$ ein Quadrat sein muss.

Beweis:

a) $JKLM$ ist rechtwinklig (S. Fig. 3. und 4.).

Aus der Congruenz der Dreiecke ABG und BCH folgt:

$$\angle BAG=\angle GBL$$

Da dann

$$\triangle BLG \sim \triangle ABG$$

so ist:

$$\angle BLG=\angle ABG=90^0$$

Gleiche Deduction findet für die Winkel um J, K und M statt.

b) $KL=LM$ (S. Fig. 1— 4).

Die homologen Teile der nach unserm Satze sowohl im Rechteck wie Quadrat construirten Transversalen stehen in gleichem Verhältnisse zu einander und ihren Linien:

$$\frac{AK:KL:GL}{AG}=\frac{BL:LM:HM}{BH}$$

Dies ergiebt sich aus Folgendem:

Da wegen Congruenz der Dreiecke AFK und CHM

$$AK = CM$$

und

$$\frac{GL}{CM} = \frac{BG}{BC} = \frac{AF}{AB}$$

so verhält sich:

$$\frac{GL}{AK} = \frac{AF}{AB}$$

In gleicher Weise, da $HM = FK$, verhält sich:

$$\frac{HM}{BL} = \frac{AF}{AB}$$

folglich:

$$\frac{GL}{AK} = \frac{HM}{BL}$$

Ferner verhält sich:

$$\frac{AK}{KL} = \frac{AF}{BF}$$

$$\frac{BL}{LM} = \frac{BG}{CG} = \frac{AF}{BF}$$

folglich:

$$\frac{AK}{KL} = \frac{BL}{LM}$$

Daraus folgt:

$$GL:AK:KL = BL:HM:LM$$

Jeder Teil einer Transversale muss sich daher auch zu seinem Ganzen verhalten, wie der homologe Teil einer anderen zu seinem Ganzen:

$$\frac{KL}{AG} = \frac{LM}{BH}$$

Da nun, wenn $ABCD$ ein Quadrat (Fig. 3. und 4.)

$$AG = BH$$

so ist:

$$KL = LM$$

$JKLM$ ist also rechtwinklig und gleichseitig $= KL^2$.

Nach dieser Feststellung verläuft der Hauptbeweis für das Quadrat so:

$$\frac{KL}{BF} = \frac{AL}{AB} = \frac{AB}{AG}$$

daher

$$\frac{KL}{AB} = \frac{BF}{AG}$$

$$\frac{KL^2}{AB^2} = \frac{BF^2}{AG^2} = \frac{BF^2}{AB^2 + AF^2} = \frac{CG^2}{BC^2 + BG^2}$$

Zusatz 2. *JKLM* ist entweder Quadrat oder Rhomboid, je nachdem *ABCD* Quadrat oder Rechteck ist; Rechteck oder Rhombus kann es nicht sein.

Beweis:

Wenn *ABCD* Quadrat ist, so ergiebt Zusatz 1., dass *JKLM* gleichfalls Quadrat ist.

Wenn aber *ABCD* ein Rechteck, so kann *JKLM* weder rechtwinklig noch gleichseitig sein.

a) Nicht rechtwinklig (S. Fig. 1. und 2.).

Wenn *JKLM* rechtwinklig wäre, so müsste $\angle BLG$ ein rechter Winkel, also auch wegen Aehnlichkeit der Dreiecke *BLG* und *ABG* $\angle GBL = \angle BAG$ sein. Wäre das, so müssten auch die Dreiecke *ABG* und *BCH* ähnlich sein, und dies ist unmöglich, weil sich dann verhalten müsste:

$$\frac{CH}{BC} = \frac{BG}{AB}$$

CH aber ist $> BG$, während $BC < AB$.

JKLM ist also schiefwinklig.

b) Nicht gleichseitig.

Nach Zusatz 1. müsste, wenn $KL = LM$ sein sollte, auch $AG = BH$ sein.

Allein im Rechteck sind die nach unserm Satze construirten Transversalen paarweise ungleich. In Fig. 1. sind diejenigen grösser, deren Endpunkt in der kleineren Rechtecksseite, in Fig. 2. diejenigen, deren Endpunkt in der Richtung der grösseren liegt.

α) Fig. 1.

$$AG > BH.$$

Denn:

$$AG^2 = AB^2 + BG^2$$
$$BH^2 = AF^2 + BC^2 \quad \text{subtrahirt:}$$

$$AG^2 - BH^2 = (AB^2 - AF^2) - (BC^2 - BG^2)$$

Da aber

$$AB^2 = (AF + BF)^2$$
$$BC^2 = (BG + CG)^2$$

so ist:

$$AG^2 - BH^2 = (BF^2 + 2AF.BF) - (CG^2 + 2BG.CG)$$

und da constructionsmässig $BF > CG$ und $AF > BG$, so ergiebt die Subtraction einen positiven Ueberschuss, woraus folgt:

$$AG^2 > BH^2$$

also:

$$AG > BH$$

β) Fig. 2.

$$BH > AG.$$

Denn:

$$BH^2 = AF^2 + BC^2$$
$$AG^2 = AB^2 + BG^2 \quad \text{subtrahirt:}$$

$$BH^2 - AG^2 = (AF^2 - AB^2) - (BG^2 - BC^2)$$

Da

$$AF^2 = (AB + BF)^2$$
$$BG^2 = (BC + CG)^2$$

so ist:

$$BH^2 - AG^2 = (BF^2 + 2AB.BF) - (CG^2 + 2BC.CG).$$

Schluss, wie unter lit. α):

$$BH^2 > AG^2$$

also:

$$BH > AG$$

AG und BH können also beim Rechteck nicht gleich sein, daher auch nicht KL und LM.

$JKLM$ ist folglich im Rechteck Rhomboid.

Anm. AG und BH können nur dann gleich werden, wenn sie sich zu AC und BD als Diagonalen von $ABCD$ vergrössern resp. verkleinern, in welchem Falle $JKLM$ im Mittelpunkt M verschwindet.

Zusatz 3. Wenn das Verhältniss der Quote zur Seite in einem arithmetischen echten oder unechten Bruche gegeben ist, und wir die Zahlen desselben n und m, die Differenz beider diff nennen, so ist:

$$\frac{JKLM}{ABCD} = \frac{\text{diff}^2}{n^2 + m^2}$$

Ist also $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$, so verhalten sich die Parallelogramme zu einander wie

$$\frac{(2-1)^2}{1^2 + 2^2} = \frac{1}{5}$$

d. h. $JKLM$ ist ein Fünfteil von $ABCD$, und dieser Fall war grade der der Uebungsaufgabe.

Ist $\frac{n}{m} = \frac{1}{3}$, so ist:

$$JKLM = \frac{(3-1)^2}{1^2 + 3^2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} ABCD.$$

Es ist arithmetisch offenbar, dass das Resultat dasselbe bleibt, ob nun $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$ oder $\frac{2}{1}$, ob $\frac{n}{m} = \frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{2}$ ist; zur geometrischen Klarstellung genügt ein kurzer Blick auf Fig. 2. In derselben verhält sich constructionsmässig:

$$\frac{AF}{AB} = \frac{BG}{BC}$$

ferner aber:

$$\frac{BG}{AB} = \frac{BC}{BG}$$

$\frac{BG}{AB}$ ist also die Umkehrung von $\frac{AF}{AB}$. Verhält sich nun, wie es in der Fig. 2. wirklich der Fall ist, $\frac{AF}{AB} = \frac{3}{2}$, so verhält sich $\frac{BG}{AB} = \frac{2}{3}$; ebenso muss $CR = \frac{2}{3}BC$ u. s. w. sein. In beiden Fällen aber ergiebt sich dasselbe Resultat: *JKLM*.

$$\frac{JKLM}{ABCD} = \frac{AG^2}{AB^2 + BG^2} = \frac{BF^2}{AB^2 + AF^2}.$$

Man kann daher, gleichviel ob in $\frac{n}{m}$ das eine oder andere im Fall der Ungleichheit grösser ist, die Satzformel auch dahin stellen:

$$\frac{JKLM}{ABCD} = \frac{(n-m)^2}{n^2 + m^2} \quad \text{oder} \quad \frac{(m-n)^2}{m^2 + n^2}$$

Denn, wenn auch $m - n$ negativ wird, so ist das Quadrat doch positiv und dasselbe.

Zusatz 4. Wenn das Verhältniss der Quote zur Seite ist wie $\frac{0}{1}$, so fällt *AG* mit *AB*, *BH* mit *BC* u. s. w. zusammen; die beiden Parallelogramme sind gleich und decken sich. Je grösser von da an das Verhältniss wird, desto kleiner wird das innere Parallelogramm; bei $\frac{1}{1}$ wird es gleich Null. Bei weiterem Wachsen des ersteren nimmt dasselbe zu, jedoch kann es nie wieder die Grösse des äusseren erreichen. Mit Ausnahme jener beiden besonderen Fälle also bildet das Verhältniss des inneren zum äusseren Parallelogramm stets einen echten Bruch, der mit $\frac{p}{q}$ bezeichnet werden mag.

Wird nun die Aufgabe gestellt, aus dem bekannten Bruch $\frac{p}{q}$ den Quotenbruch $\frac{n}{m}$ oder dessen Aequivalent $\frac{m}{n}$ zu berechnen und zu construiren, so wissen wir, dass

$$p = \text{diff}^2$$

$$\text{diff} = \sqrt{p}$$

und dass

$$q = n^2 + m^2.$$

Nehmen wir nun beliebig an, dass m im Fall der Ungleichheit die grössere Zahl bedeute, so ist:

$$n = m - \text{diff},$$

also

$$m^2 + (m - \text{diff})^2 = q$$

$$2m^2 - 2\,\text{diff}\,m + \text{diff}^2 = q$$

$$m^2 - \text{diff}\,m = \frac{q-p}{2}$$

$$m - \tfrac{1}{2}\text{diff} = \sqrt{\frac{q-p}{2} + \tfrac{1}{4}p}$$

$$m = \sqrt{\frac{2q-p}{4}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{p}$$

$$m = \frac{\sqrt{2q-p} + \sqrt{p}}{2}$$

$$n = \frac{\sqrt{2q-p} + \sqrt{p}}{2} - \text{diff}$$

$$n = \frac{\sqrt{2q-p} - \sqrt{p}}{2}$$

Wenn p in dem gegebenen Bruch $\frac{p}{q}$ nicht an sich schon das Quadrat einer ganzen Zahl ist, so tut man, um wenigstens $\sqrt{p}$ nicht irrational sein zu lassen, gut, den Bruch mit p zu multipliciren. Wäre z. B. der Bruch $\frac{2}{17}$ gegeben, so vergrössert man ihn zu $\frac{4}{34}$; dann ist:

$$m = \frac{\sqrt{68-4} + 2}{2} = 5$$

$$n = \frac{\sqrt{68-4} - 2}{2} = 3$$

Der Quotenbruch ist also entweder $\frac{3}{5}$ oder $\frac{5}{3}$.

Nun wird aber, wenn $2q-p$ nicht selbst das Quadrat einer ganzen Zahl ist, $\sqrt{2q-p}$ irrational sein, und dies findet offenbar in den bei weitem meisten Fällen statt.

Die Construction ist darum doch immer möglich, wenn nur q und p absolute ganze Zahlen sind. Denn dann ist $2q-p$ eine ganze

Zahl, und die Wurzel daraus ziehen, heisst geometrisch: Die Mittelproportionale zwischen der die Zahl darstellenden Linien und 1 finden. Die 1 aber ist die gegebene und quotisirende Seite, deren im Rechteck zwei verschiedene sind. Ist also z. B. das Rechteck $ABCD$ gegeben und soll $\frac{p}{q} = \frac{1}{4}$ des Rechtecks sein, so ist:

$$m = \frac{\sqrt{7}+1}{2} = 1{,}822875655\ldots$$

$$n = \frac{\sqrt{7}-1}{2} = 0{,}822875655\ldots$$

$$\frac{n}{m} = \frac{0{,}822875655\ldots}{1{,}822875655\ldots}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{1{,}822875655\ldots}{0{,}822875655\ldots}$$

Die Construction ist an AB und BC in gleicher Weise zu machen. Man sucht die Mittelproportionale zwischen der Seite und ihrer 7-fachen Länge, setzt bei m die Seite zu, bei n ab und halbirt das Resultat. Dann hat man zwei Linien, welche n und m entsprechen, und findet die Quotenabschnitte, in dem man setzt:

$$\frac{n}{m} = \frac{x}{AB \text{ oder } BC}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{AB \text{ oder } BC}{x}$$

Natürlich braucht man nur eine der Quotenabschnitte zu construiren, weil die Ecktransversalen nach Zusatz 3. und Figur 2. in gleicher Richtung liegen.

In manchen Fällen ist die Construction noch einfacher, z. B. wenn $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ ist. Im ersteren Falle liefert die Chordometrie, im zweiten der goldene Schnitt die nötige Hülfe.

Ist $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$, so ist:

$$m = \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1{,}3660254\ldots$$

$$n = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = 0{,}3660254\ldots$$

Die Quotenabschnitte verhalten sich also zu der quotisirenden Seite, wie:

$$\frac{0{,}3660254\ \ldots}{1{,}3660254\ \ldots}$$

oder:

$$\frac{1{,}3660254\ \ldots}{0{,}3660254\ \ldots}$$

Setzt man in beiden Fällen den Nenner = 1, so erhält man:

$$\frac{0{,}26794919\ \ldots}{1}$$

oder:

$$\frac{3{,}7320508\ \ldots}{1}$$

Nun ist aber, 1,7320508 ... die leicht zu construirende ch 120°, wenn $r = 1$ ist, und 0,26794919 die Differenz dieser Chorde und des Durchmessers = 2. Beschreibt man demnach mit der zu quotisirenden Seite als r einen Kreis, so ist die Differenz der ch 120 und des Durchmessers der kleinere, die Summen beider der grössere Quotenabschnitt.

Im zweiten Falle, wenn $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$, ist:

$$m = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618033988\ \ldots$$

$$n = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618033988\ \ldots$$

Die Quotenabschnitte verhalten sich also zu der quotisirenden Seite, wie:

$$\frac{0{,}618033988\ \ldots}{1{,}618033988\ \ldots}$$

oder:

$$\frac{1{,}618033988\ \ldots}{0{,}618033988\ \ldots}$$

Setzt man in beiden Fällen den Nenner = 1, so erhält man:

$$\frac{0{,}381966011\ \ldots}{1}$$

oder:

$$\frac{2{,}618033988\ \ldots}{1}$$

Wir haben es hier also mit dem goldenen Schnitt zu tun. Denn 0,381966011 ... ist der kleinere, 0,618033988 ... der grössere Teil des goldenen Schnitts von 1. Die Anwendung ergiebt sich von selbst.

Diese Betrachtung führt zu der nicht uninteressanten

Mittelst vier aus den Ecken eines Rechtecks zu ziehen-Geraden unmittelbar ein inneres homocentrisches Parallelogramm herzustellen, dessen Inhalt ein Drittteil des Rechtecks ist.

Für das Rechteck ist nämlich die Lösung nur durch den goldenen Schnitt möglich, während es für das Quadrat in allen Fällen noch eine andere, obwol etwas weitläufigere, Art der Lösung giebt, weil (Fig. 3. und 4.) die Winkel um J, K, L und M rechte sind. Soll z. B. $JKLM = \frac{1}{3}ABCD$ sein, so sind die congruenten Dreiecke ABL, BCM u. s. w. je $= \frac{1}{6}$, und können, weil $\angle L$, $\angle M$ u. s. w. rechte sind, construirt werden. Führt man dann z. B. AL nach G fort, so hat man den gesuchten Quotenabschnitt. Die Berechnung der inhaltsgleichen Nebendreiecke ABL u. s. w. ist auch für das Rechteck möglich, aber nicht in derselben Weise die Construction, weil der rechte Winkel fehlt.

Zusatz 5. Was den praktischen Nutzen des Satzes anbetrifft, so wird dadurch die Construction bestimmter Flächenteile in vielen Fällen ausserordentlich erleichtert, weil es nicht nötig ist, die Seite in so viel Teile zu verlegen, als der geforderte Flächenteil anzeigt. Wir wollen einige solcher Flächenteile angeben. Die obere Reihe drückt $\frac{n}{m}$, die untere $\frac{p}{q}$ aus.

a) Die Die Differenz zwischen n und m sei 1:

$$\frac{n}{m}: \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{6}{7} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{8}{9} \quad \frac{9}{10} \text{ etc.}$$

$$\frac{p}{q}: \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{13} \quad \frac{1}{25} \quad \frac{1}{41} \quad \frac{1}{61} \quad \frac{1}{85} \quad \frac{1}{113} \quad \frac{1}{145} \quad \frac{1}{181}$$

b) Die Diff. sei 2:

$$\frac{n}{m}: \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{7}{9} \quad \frac{8}{10} \quad \frac{9}{11} \quad \text{etc.}$$

$$\frac{d}{b}: \quad \frac{4}{10}\left(\frac{2}{5}\right) \quad \frac{4}{20}\left(\frac{1}{5}\right) \quad \frac{4}{34}\left(\frac{2}{17}\right) \quad \frac{4}{52}\left(\frac{1}{13}\right) \quad \frac{4}{74}\left(\frac{2}{37}\right) \quad \frac{4}{100}\left(\frac{1}{25}\right)$$

$$\frac{4}{130}\left(\frac{2}{65}\right) \quad \frac{4}{164}\left(\frac{1}{41}\right) \quad \frac{4}{202}\left(\frac{2}{101}\right)$$

c) Die Diff. sei 3:

$\frac{n}{m}$:	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{9}{12}$	etc.
$\frac{p}{q}$:	$\frac{9}{17}$	$\frac{9}{29}$	$\frac{9}{45}\left(\frac{1}{5}\right)$	$\frac{9}{65}$	$\frac{9}{89}$	$\frac{9}{117}\left(\frac{1}{13}\right)$	$\frac{9}{149}$	$\frac{9}{185}$	$\frac{9}{225}\left(\frac{1}{25}\right)$	

Durch Teilung, Vervielfältigung und Combination der Resultate könnte der praktische Geometer noch mancherlei Vorteile gewinnen.

Dabei dürfte es sich in vielen Fällen empfehlen, statt der kleineren Abschnittsquote ihr Umgekehrtes zu wählen, also z. B. $\frac{2}{1}$ statt $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{1}$ statt $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{2}$ statt $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$ statt $\frac{4}{5}$ u. s. w., weil dadurch die Teilung der Seite entweder umgangen oder vereinfacht wird.

Hannover, Juni 1882.

Schnell, Dr.

XIII.

Ausdehnung einiger elementarer Sätze über das ebene Dreieck auf Räume von beliebig viel Dimensionen.

Von

R. Mehmke.

Nachstehende Mitteilung enthält eine Ausdehnung mehrerer Sätze der elementaren Geometrie, nemlich des sog. Euler'schen Satzes über das ebene Dreieck, des Höhenschnittpunktsatzes sowie der Feuerbach-schen Sätze über den Kreis der neun Punkte auf Räume von beliebig viel Dimensionen.

Die geeignetsten Methoden für Untersuchungen, wie diese, scheint mir die Rechnung mit geometrischen Grössen zu liefern. Ausser der schon von Möbius gelehrten Addition*) von Strecken wird im Folgenden keine andere geometrische Verknüpfung zur Anwendung gelangen, als die von Grassmann erfundene „innere"**) Multiplication von Strecken. Für Solche, welche mit den eben erwähnten geometrischen Rechnungsarten nicht vertraut sind, mögen einige kurze, zum Verständniss des Folgenden jedoch hinreichende Bemerkungen über das Rechnen mit Strecken vorausgeschickt werden.

---

*) S. Möbius, Mechanik des Himmels, 1843.

**) S. die Vorrede zu Grassmann's „linealer Ausdehnungslehre" von 1844, Seite XI; ferner die „Geometrische Analyse", gekrönte Preisschrift, 1847; endlich die „Ausdehnungslehre" von 1862, Kap. 4 und Kap. 5, § 7. Unabhängig von Grassmann ist das innere Product zweier Strecken (unter dem Namen „geometrisches" Product) von Resal in seiner „Cinématique pure", 1862, aufgestellt worden.

Unter Strecke ist hier immer ein durch zwei Punkte begrenzter Teil einer Geraden von bestimmter Länge und Richtung verstanden. Die Addition mehrerer Strecken geschieht, indem man jene Strecken (in beliebiger Reihenfolge) ohne Aenderung ihrer Länge und Richtung so an einander fügt, dass der Anfangspunkt jeder folgenden Strecke in den Endpunkt der vorhergehenden fällt; die neue Strecke, welche vom Anfangspunkt der ersten nach dem Endpunkt der letzten Strecke gezogen werden kann, stellt alsdann (nach Länge und Richtung) die Summe der gegebenen Strecken vor. Eine Strecke wird mit einer beliebigen reellen Zahl multiplicirt, indem man ihre Länge mit jener Zahl multiplicirt, ihre Richtung aber entweder unverändert lässt, oder in die entgegengesetzte verwandelt, je nachdem die gegebene Zahl positiv oder negativ ist. Unter dem „inneren" Product zweier Strecken versteht man nach Grassmann das Product aus der Länge der einen Strecke und der Länge der Projection der zweiten Strecke auf die erste und zwar mit positivem oder negativem Zeichen genommen, je nachdem die Richtung der Projection mit der Richtung der Strecke, auf welche projicirt wurde, übereinstimmt, oder nicht. Wir bezeichnen im Folgenden das innere Product zweier beliebiger Strecken a und b einfach durch ab.

Die innere Multiplication hat mit der gewöhnlichen arithmetischen die Vertauschbarkeit der Factoren gemein. Zwei von Null verschiedene Strecken geben dann und blos dann ein verschwindendes inneres Product, wenn sie normal zu einander sind.

Um die Rechnung mit Punkten entbehrlich zu machen, kann man in folgender Weise die Punkte auf Strecken zurückführen. Man nimmt einen festen Punkt O, den „Ursprung", beliebig im Raume an (wir denken uns den Raum je nach Bedürfniss mit beliebig viel Dimensionen begabt) und ersetzt jeden gegebenen Punkt P durch die vom Ursprung nach ihm gezogene Strecke OP. Wir bezeichnen dieselbe stets mit dem zugehörigen kleinen Buchstaben (als p) und nennen sie den „Träger" des gegebenen Punktes P. Ist der Träger gegeben, so ist auch der zugehörige Punkt unzweideutig bestimmt. Für die Anwendung des Vorhergehenden ist die Kenntniss folgender Hilfssätze erforderlich.

„Die Strecke, welche zwei gegebene Punkte P und Q verbindet, „ist nach Länge und Richtung der Differenz $(q-p)$ der zu jenen „Punkten gehörigen Träger gleich."

Denn es ist

$$OP = p, \quad OQ = q,$$

aber

$$OP + PQ = OQ,$$

folglich

$$PQ = OQ - OP = q - p.$$

Ferner:

„Der Träger des Punktes C, welcher die Verbindungsstrecke „zweier gegebenen Punkte A und B in gegebenem Verhältniss $\beta:\alpha$ „teilt, ist gegeben durch die Gleichung

$$(\alpha+\beta)c = \alpha a + \beta b.$$

Denn man hat

$$(c-a):(b-c) = \beta:\alpha,$$

woraus die eben geschriebene Gleichung folgt.

Umgekehrt hat das Bestehen jener Gleichung zur Folge, dass der Punkt C gegen A und B die angegebene Lage einnimmt. Ohne Mühe ergiebt sich aus dem vorhergehenden Satze:

„Der Träger des Schwerpunkts einer Anzahl gegebener Punkte „(jeder mit dem Gewicht 1 versehen gedacht) ist gleich dem arith- „metischen Mittel aus den Trägern der gegebenen Punkte."

I.

Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes.

Der Euler'sche Satz vom ebenen Dreieck, welcher aussagt, dass Schwerpunkt, Höhenschnittpunkt und Mittelpunkt des Umkreises in einer Geraden liegen, kann in folgender Weise verallgemeinert werden.

Hat ein n-Eck $A_1A_2\ldots A_n$ in einem Raum von $(n-1)$ Dimensionen die besondere Beschaffenheit, dass die n „Höhen" desselben sich in einem Punkt H schneiden, (unter „Höhe" eine Gerade verstanden, welche durch eine Ecke senkrecht zum Verbindungsraum der $(n-1)$ übrigen Ecken gezogen werden kann), so liegt der „Höhenschnittpunkt" H in gerader Linie mit dem Schwerpunkt S der Ecken $A_1, A_2, \ldots A_n$ sowie dem Mittelpunkt M des kugelähnlichen, dem n-Eck umschriebenen Raumes von $(n-2)$ Dimensioen; und zwar teilt S die Strecke HM im Verhältniss $2:(n-2)$.

Beweis. Seien A_i und A_k zwei beliebige der Ecken $A_1, A_2, \ldots A_n$. M hat gleichen Abstand von allen Punkten A, z. B. auch von A_i und A_k. Folglich steht die gerade Linie von M nach dem Halbirungspunkt der Strecke A_iA_k senkrecht auf letzterer, d. h. es findet die Gleichung statt:

$$(a_i-a_k)\left(\frac{a_i+a_k}{2}-m\right)=0$$

oder

1) $$(a_i-a_k)(a_i+a_k-2m)=0.$$

Die Verbindungslinie des Höhenschnittpunktes H mit irgend einer Ecke A_l steht senkrecht auf dem Verbindungsraum der $(n-1)$ übrigen Ecken, daher gleichfalls auf jeder in letzterem Raum befindlichen Geraden, z. B. auf A_iA_k, wenn i und k beide von l verschieden sind. Folglich ist

2) $$(a_i - a_k)(a_l - h) = 0.$$

In dieser Gleichung hat l sämmtliche Werte von 1 bis n (i und k ausgenommen) anzunehmen, was im Ganzen $(n-2)$ Gleichungen liefert. Denkt man sich letztere alle geschrieben und zu 1) addirt, so kommt:

$$(a_i - a_k)(a_1 + a_2 + \dots + a_n - 2m - (n-2)h) = 0,$$

oder mit Einführung des Schwerpunktes S, für dessen Träger s die Gleichung

$$ns = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

besteht:

3) $$(a_i - a_k)(ns - 2m - (n-2)h) = 0.$$

Giebt man in dieser Gleichung i und k alle möglichen Werte, so ändert sich die Grösse in der zweiten Klammer nicht. Folglich muss dieselbe verschwinden, denn andernfalls wäre durch sie eine Strecke dargestellt, welche die unsinnige Bedingung erfüllte, gleichzeitig auf allen $\frac{n(n-1)}{2}$ „Kanten“ A_iA_k senkrecht zu stehen. Daher wird

4) $$ns = 2m + (n-2)h,$$

womit der oben aufgestellte Satz erwiesen ist.

Für $n = 4$ ist der Satz bekannt. Er lautet in diesem Fall:

„Schneiden sich die Höhen eines Tetraeders in einem Punkt, so „liegt der Schwerpunkt des Tetraeders in der Mitte zwischen dem „Höhenschnittpunkt und dem Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugel.“

II.

Verallgemeinerung des Satzes vom Höhenschnittpunkt.

Schneiden sich die „Höhen“ eines allgemeinen n-Ecks im Raum von $(n-1)$ Dimensionen nicht in einem und demselben Punkt, so giebt es für das n-Eck einen merkwürdigen Punkt, welcher in gewisser Beziehung die Stelle des verloren gegangenen Höhenschnittpunktes vertritt. Es gilt nämlich folgender Satz, welcher als ein Analogon des Satzes vom Höhenschnittpunkt im ebenen Dreieck betrachtet werden kann:

Hat man in einem Raum $(n-1)$ter Dimension ein n-Eck $A_1 A_2 \ldots A_n$, (dessen Ecken in keinem Raum niederer Dimension enthalten sind), **und legt man durch den Schwerpunkt von jedesmal $(n-2)$ der Ecken einen Raum $(n-2)$ter Dimension senkrecht zur Verbindungslinie der beiden übrig bleibenden Ecken, so haben die $\frac{n(n-1)}{2}$ auf diese Weise entstandenen Räume einen einzigen Punkt gemeinschaftlich.** Dieser **Punkt,** er heisse X, **liegt mit dem Schwerpunkt S der Ecken A_1, A_2, ... A_n sowie dem Mittelpunkt M des um die Ecken beschriebenen kugelähnlichen Raumes $(n-2)$ter Dimension in gerader Linie, und zwar teilt S die Strecke XM im Verhältniss $2:(n-2)$.**

Beweis. Stellt im Raum $(n-1)$ter Dimension X einen veränderlichen Punkt eines Raumes von $(n-2)$ Dimensionen dar, welch letzterer einen gegebenen Punkt A enthält und ausserdem zu einer gegebenen Strecke b normal ist, so stehen offenbar die Strecken $XA = a - x$ und b senkrecht aufeinander. Folglich stellt

$$(a-x)b = 0$$

die Gleichung jenes Raumes $(n-2)$ter Dimension vor. Auf unseren Fall angewendet, ist z. B.

$$(a_1+a_2+\ldots+a_{i-1}+a_{i+1}+\ldots+a_{k-1}+a_{k+1}+\ldots+a_n-(n-2)x)(a_i-a_k)=0$$

die Gleichung des Raumes — er heisse R_{ik} —, welcher zur Verbindungsstrecke von A_i und A_k normal ist und den Schwerpunkt der $(n-2)$ übrigen Ecken enthält. Führt man den Schwerpunkt S sämmtlicher Punkte A_1, A_2, ... A_n ein, für dessen Träger die Gleichung stattfindet:

$$ns = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

so geht die obige Gleichung über in:

$$1) \qquad (ns - a_i - a_k - (n-2)x)(a_i - a_k) = 0$$

oder

$$2) \qquad (ns - (n-2)x)(a_i - a_k) - (a_i^2 - a_k^2) = 0.$$

Man greife nun von den $\frac{n(n-1)}{2}$ Kanten $A_i A_k$ irgendwie n heraus, derart, dass jede mit der vorhergehenden, die letzte wieder mit der ersten zusammenstösst (indem man z. B. dem Zahlenpaar i, k die Werte 1, 2; 2, 3; ... n, 1 erteilt); dann lehrt ein Blick auf Gleichung 2), dass die linken Seiten der Gleichungen der zu jenen Kanten

gehörigen Räume R_{ik} Null zur Summe geben. Wenn folglich x $(n-1)$ jener Gleichungen befriedigt, so genügt es auch der letzten, d. h. der Schnittpunkt X von irgend $(n-1)$ der betrachteten Räume R_{ik} gehört auch dem $n$ten an. Der erste Teil der Behauptung ist damit bewiesen. Zufolge Gl. 1) der vorhergehenden Nummer erfüllt der Träger von M die Gleichung

$$(a_i + a_k - 2m)(a_i - a_k) = 0.$$

Addirt man letztere zu Gl. 1) dieser Nummer, so ergiebt sich

$$(ns - 2m - (n-2)x)(a_i - a_k) = 0.$$

Durch Wiederholung eines in der vorigen Nummer angewendeten Schlusses folgt hieraus:

3) $$ns = 2m + (n-2)x,$$

somit auch der letzte Teil des Satzes bewiesen ist.

Besitzt das n-Eck einen Höhenschnittpunkt, so fällt derselbe offenbar mit dem Punkte X zusammen.

Für $n = 4$ ergiebt sich der bekannte Satz:

„Halbirt man die 6 Kanten eines Tetraeders und legt durch jeden „der Halbirungspunkte eine Ebene senkrecht zur gegenüberliegenden „Kante, so schneiden sich diese 6 Ebenen in einem Punkt; zwischen „diesem und dem Mittelpunkt der dem Tetraeder umschriebenen „Kugel liegt der Schwerpunkt des Tetraeders in der Mitte.“ (S. Flemming „Ueber einen Satz vom Tetraeder“, Grunert's Archiv Bd. X).

III.

Verallgemeinerung einiger Sätze über den Feuerbach-schen Kreis der neun Punkte.

Sei wie in den vorhergehenden Nummern $A_1 A_2 \ldots A_n$ ein allgemeines n-Eck im Raum von $(n-1)$ Dimensionen. Der Schwerpunkt sämmtlicher Ecken heisse wie früher S, während mit S_i der Schwerpunkt derjenigen $(n-1)$ Ecken bezeichnet werden möge, unter welchen A_i fehlt. Der kugelähnliche Raum von $(n-2)$ Dimensionen, welcher durch die n Schwerpunkte $S_1, S_2, \ldots S_n$ hindurch gelegt werden kann, soll der zum gegebenen n-Eck $A_1, A_2, \ldots A_n$ gehörige Feuerbach-sche Raum genannt werden. Dann bestehen die nachfolgenden Sätze:

a) Der Mittelpunkt Y des Feuerbach'schen Raumes, der Schwerpunkt S sowie der Mittelpunkt M [illegible] um das

gegebene n-Eck beschriebenen kugelähnlichen Raumes $(n-2)$ter Dimension liegen in gerader Linie und zwar teilt S die Strecke YM im Verhältniss $1:(n-1)$.

b) Die Strecken S_iY und MA_i $(i=1, 2, \ldots n)$ sind gleich gerichtet und die letztere ist das $(n-1)$fache der ersten. Hierin liegt zugleich der Satz: Der Halbmesser des um das n-Eck beschriebenen kugelähnlichen Raumes ist $(n-1)$ mal so gross als derjenige des Feuerbach'schen Raumes.

c) Schneiden sich die Höhen des n-Ecks $A_1, A_2, \ldots A_n$ in einem Punkt, so geht der Feuerbach'sche Raum durch die Fusspunkte der n Höhen und teilt die oberen Höhenabschnitte sämmtlich im Verhältniss $1:(n-2)$.

Beweis zu a).

Man hat

$$ns = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

1) $$(n-1)s_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_n = ns - a_i.$$

Y als Mittelpunkt des Feuerbach'schen Raumes hat gleichen Abstand von S_i und S_k $(i, k = 1, 2, \ldots n)$ oder die Strecke S_iS_k steht senkrecht auf der Verbindungslinie von Y mit dem Halbirungspunkt jener Strecke. Daher ist für jedes Wertepaar i, k

$$(s_k - s_i)\left(\frac{s_i + s_k}{2} - y\right) = 0.$$

Hieraus folgt durch Einsetzen der Werte für s_i und s_k aus Gl. 1)

$$(a_i - a_k)(2ns - a_i - a_k - (2n-2)y) = 0.$$

Nach Gl. 1) der ersten Nummer hat man

$$(a_i - a_k)(a_i + a_k - 2m) = 0.$$

Durch Addition beider Gleichungen folgt

$$(a_i - a_k)(ns - m - (n-1)y) = 0.$$

Da letztere Gleichung für jedes Wertepaar i, k besteht, so muss nach einem wiederholt angewendeten Schluss die von i und k unabhängige Grösse in der zweiten Klammer verschwinden, d. h. man erhält

2) $$ns = m + (n-1)y, \text{ w. z. b. w.}$$

Beweis zu b).

Da nach 1)

$$ns = (n-1)s_i + a_i,$$

so folgt aus Gl. 2)

$$3)\qquad (n-1)(y-s_i) = (a_i - m),$$

was den unter b) ausgesprochenen Satz beweist.

Beweis zu c).

Es sei B_i derjenige Punkt, welcher den oberen Höhenabschnitt HA_i im Verhältniss $1:(n-2)$ teilt, also

$$4)\qquad (n-1)b_i = a_i + (n-2)h.$$

Durch Elimination von m aus Gl. 2) dieser und Gl. 4) der ersten Nummer, nämlich aus den Gleichungen

$$ns = m + (n-1)y \quad \text{und}$$
$$ns = 2m + (n-2)h$$

ergiebt sich

$$(2n-2)y = ns + (n-2)h,$$

oder da

$$ns = (n-1)s_i + a_i \quad \text{(Gl. 1))},$$

$$(2n-2)y = (n-1)s_i + a_i + (n-2)h,$$

oder mit Hilfe von Gl. 4)

$$5)\qquad 2y = s_i + b_i.$$

Somit ist Y der Halbirungspunkt der Strecke S_iB_i, oder B_i ist der andere Endpunkt von dem durch S_i gezogenen Durchmesser des Feuerbach'schen Raumes.

Bezeichnet H_i den Fusspunkt der von der Ecke A_i auf den Verbindungsraum der übrigen Ecken gefällten Höhe, so ist H_i die Spitze eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse S_iB_i einen Durchmesser des Feuerbach'schen kugelähnlichen Raumes bildet. Folglich ist auch H_i ein Punkt jenes Raumes.

Man bemerke, dass, im Fall ein Höhenschnittpunkt nicht vorhanden ist, an Stelle der Punkte B_i diejenigen Punkte treten, welche die Abschnitte XA_i im Verhältniss $1:(n-2)$ teilen, unter X den in der letzten Nummer eingeführten merkwürdigen Punkt des n-Ecks verstanden.

Für $n = 3$ ergeben sich allbekannte Sätze über den Feuerbachschen Kreis der 9 Punkte.

Für $n = 4$ erhält man folgende, ebenfalls bekannten Sätze:

„Ist ein beliebiges Tetraeder gegeben, und bezeichnet man als „Feuerbach'sche Kugel diejenige, welche durch die Schwerpunkte „der Seitenflächen des Tetraeders geht, so liegen der Mittelpunkt Y „der Feuerbach'schen Kugel, der Schwerpunkt S des Tetraeders und „der Mittelpunkt M der dem Tetraeder umschriebenen Kugel in „einer Geraden und zwar teilt S die Strecke YM im Verhältniss 1:3; „der Halbmesser der umbeschriebenen Kugel ist 3 mal so gross als „derjenige der Feuerbach'schen Kugel. Ist insbesondere das Tetraeder „von der Beschaffenheit, dass seine Höhen sich in einem und dem- „selben Punkt H schneiden, so enthält die Feuerbach'sche Kugel die „Fusspunkte der Höhen sowie diejenigen Punkte, welche die oberen „Höhenabschnitte im Verhältniss 1:2 teilen (so dass die kleineren „Abschnitte an H liegen)."

Stuttgart, April 1883.

XIV.

Miscellen.

1.

Integration einiger partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Bei der Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen kommt die Methode häufig zur Anwendung, dass die gegebene Gleichung nach der unabhängigen Variabelen differentiirt wird, und die so erhaltene Gleichung kann leichter integrirt werden, als die ursprüngliche. Zwischen den überzähligen Integrationsconstanten giebt es eine Relation, die erhalten wird, indem man das gefundene Integral in die gegebene Gleichung einsetzt.

Dass dieselbe Methode auch bei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in manchen Fällen zum Ziele führt, will ich an einigen Beispielen zeigen.

1. Die partielle Differentialgleichung*):

$$s = \frac{a_1 x + a_2}{b_1 x + b_2} p + \frac{b_1}{b_1 x + b_2} q - \frac{a_1}{b_1 x + b_2} z + f(x, y)$$

wo a_1, a_2, b_1, b_2 gegebene Functionen von y sind, giebt nach x partiell differentiirt:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{a_1 x + a_2}{b_1 x + b_2} r + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{b_1}{b_1 x + b_2} f$$

---

*) p, q; r, s, t bezeichnen, wie gewöhnlich, die ersten und zweiten partiellen Differentialquotienten von z nach x und y.

eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung, die integrirt werden kann, sobald a_1, a_2, b_1, b_2, f gegeben sind.

Z. B. wenn $f = \frac{c}{b_1 x + b_2}$ und a_1, a_2, b_1, b_2, c Constanten sind, wird das Integral:

$$z = \iint X e^{\frac{a_1 x + a_2}{b_1 x + b_2} y} dx^2 + x Y_1 + Y_2$$

wo X eine beliebige Function von x, Y_1 und Y_2 beliebige Functionen von y sind.

Da aber z ein Integral von 1. sein soll, erhält man die Relation zwischen Y_1 und Y_2:

$$b_1 \frac{\partial Y_2}{\partial y} - b_2 \frac{\partial Y_1}{\partial y} + a_2 Y_1 - a_1 Y_2 + c = 0$$

2. Die partielle Differentialgleichung:

$$(sz - pq)^2 + \frac{aq^2}{z^2} = Y$$

wo a eine Constante, Y eine Function von y ist, giebt nach x partiell differentiirt:

$$z \frac{\partial r}{\partial y} - qr + \frac{aq}{z^3} = 0$$

oder

$$z \frac{\partial r}{\partial z} - r + \frac{a}{z^3} = 0$$

wo ∂r und ∂z partielle Differentialen mit der Bedingung $x = \text{const.}$ sind.

Einmal integrirt

$$r = zX + \frac{a}{4z^3}$$

wo X eine beliebige Function von x ist.

Die Integration kann vollführt werden, wenn $a = 0$ ist, wo es sich also um die Integration von

$$sz - pq = Y$$

handelt. Das Integral wird:

$$z = X_1 Y_1 + X_2 Y_2$$

wo X_1 und X_2 Functionen von x, — Y_1 und Y_2 Functionen von y sind, zwischen welchen die Relationen bestehen:

$$X_1 \frac{\partial X_2}{\partial x} - X_2 \frac{\partial X_1}{\partial x} = 1$$

$$Y_1 \frac{\partial Y_2}{\partial y} - Y_2 \frac{\partial Y_1}{\partial y} = Y$$

3. Die partielle Differentialgleichung:

$$s = Yf(x, p)\, e^{az}$$

wo a eine Constante, Y eine Function von y ist, giebt nach x partiell differentiirt:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = Ye^{az}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\, r + apf\right)$$

oder mit s dividirt:

$$\frac{\partial r}{\partial p} = \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial p}\, r + ap$$

wo ∂r und ∂p partielle Differentialen mit der Bedingung $x = \text{const.}$ sind.

Diese partielle Differentialgleichung erster Ordnung für r kann integrirt werden, sobald f gegeben ist.

Z. B. wenn $f = X$ eine Function von x ist, führe man statt x, y, z resp. $\sqrt{a}\int X dx$, $\sqrt{a}\int Y dy$, az als neue Variabelen ein. Die zu integrirende Gleichung wird:

$$s = e^z$$

und die zugehörige Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$\frac{\partial r}{\partial p} = p$$

Einmal integrirt:

$$r - \tfrac{1}{2}p^2 = X \quad \text{oder} \quad \frac{\partial p}{\partial x} - \tfrac{1}{2}p^2 = X$$

wo X eine beliebige Function von x ist.

Durch die bekannte Substitution

$$p = -2\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x}$$

wird die Gleichung für w:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tfrac{1}{2}wX = 0$$

wovon das Integral ist:

$$w = Y_1 X_1 + Y_2 X_2$$

wo Y_1 und Y_2 beliebige Functionen von y sind, zwischen X_1 und X_2 besteht die Relation

$$X_1 \frac{\partial X_2}{\partial x} - X_2 \frac{\partial X_1}{\partial x} = 1$$

also

$$X_2 = X_1 \int \frac{dx}{X_1^2}$$

so dass

$$w = X_1 \left(Y_1 + Y_2 \int \frac{dx}{X_1^2} \right)$$

und hieraus

$$p = -2 \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial x} = -2 \frac{X_1'}{X_1} - \frac{2 Y_2}{X_1^2 \left(Y_1 + Y_2 \int \frac{dx}{X_1^2} \right)}$$

oder wenn man

$$\int \frac{dx}{X_1^2} = \varphi(x) \quad \text{und} \quad \frac{Y_1}{Y_2} = \psi(y)$$

einführt:

$$p = \frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} - \frac{2\varphi'(x)}{\varphi(x) + \psi(y)}$$

Partiell nach y differentiirt und $s = e^z$ eingeführt wird das gesuchte Integral:

$$e^z = \frac{2\varphi'(x) \,.\, \psi'(y)}{(\varphi(x) + \psi(y))^2}$$

Herr Liouville hat die Gleichung $s = e^z$ zuerst integrirt*). Er giebt aber die Integrationsmethode nicht an, nur das fertige Integral durch nachträgliche Rechnung verificirt.

Klausenburg (Ungarn), September 1882.

J. Ványi.

---

*) Monge, Application de l'analyse à la géométrie. 5e Edition par M. Liouville. Pag. 597.

2.

Dreieckssatz.

Es soll folgender Satz bewiesen werden.

Sind in einem gradlinigen Dreieck zwei Winkelhalbirende gleich, so liegen die halbirten Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks. (S. d. Fig.)

Vrs. Wkl. $BAD = CAD$

Wkl. $ABE = CBE$

$AD = BE$

Beh. Wkl. $A = B$

Beweis. Es ist

$$\delta = \frac{\alpha}{2} + \gamma > \frac{\alpha}{2}$$

also

$$AB > DB$$

Da β halbirt ist, so hat man

$$AF : FD = AB : DB$$

mithin

$$AF > FD$$

Ebenso

$$\varepsilon = \frac{\beta}{2} + \gamma > \frac{\beta}{2}$$

also

$$AB > AE$$

und daher

$$BF > EF$$

Wäre nun

$$\frac{\alpha}{2} > \frac{\beta}{2}$$

so hätte man

$$BF > AF \text{ und } EF \text{ um ebensoviel } < DF$$

weil die ganzen Linien gleich sind; z. B.

$$BF = AF + m \text{ und } DF = EF + m$$

Macht man nun

$$Fd = FD \text{ und } dx \text{ parallel } AE$$

so ist

$$FE : FA = FD : Fx$$

aber

$$FE : FA = \frac{DF - m}{BF - m} < \frac{DF}{BF}$$

letzteres weil

$$DF < AF < BF$$

ist, mithin

$$FD : Fx < FD : BF \text{ und } Fx > BF$$

Macht man also

$$Fb = FB$$

so muss b zwischen A und x fallen. Es ist aber

$$\text{Dreieck } Fdb \cong FDB \text{ und Wkl. } dbF = \frac{\beta}{2}$$

Als Aussenwinkel ist jedoch Wkl. $dbF > x$ oder $\frac{\alpha}{2}$ im Gegensatze zur Annahme. Ebenso kann $\frac{\beta}{2}$ nicht $> \frac{\alpha}{2}$ sein, also muss

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} \text{ und } \alpha = \beta$$

sein. Seelhoff.

3.

Eine combinatorische Definition der Zahl e.

Unter den verschiedenen besondern Gruppen, welche man aus dem System aller Permutationen von n Elementen herausgreifen kann, scheint die folgende, welche meines Wissens noch nicht untersucht worden ist, von einigem Interesse zu sein.

Sei $123\ldots n$ die Anfangsstellung der n Elemente. Unter den Permutationen derselben wird es eine gewisse Anzahl geben, welche mit der Anfangsstellung keinen Platz gemeinsam haben. Derartige Permutationen mögen „absolute Permutationen der Anfangsstellung" genannt werden. Seien beispielsweise vier Elemente vorhanden und 1234 die Anfangsstellung, so sind die absoluten Permutationen derselben diese: 2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312, 4321, also neun.

Alsdann gilt folgender Satz:

Der Wert des Verhältnisses der Anzahl aller Permutationen von n Elementen zur Anzahl der absoluten Permutationen der Anfangsstellung nähert sich mit wachsendem n der Zahl e, der Basis der natürlichen Logarithmen.

Sei $N = 123\ldots n$ die Anzahl aller Permutationen, N die Anzahl der absoluten Permutationen, so ist

$$\lim \frac{N}{\mathrm{N}} = e \text{ für } n = \infty .$$

Königsberg. Th. Sanio.

XV.

Gleichgewicht eines über eine Fläche gespannten Fadens mit Berücksichtigung der Reibung.

Von

F. August.

Es ist bekannt, dass auf einer Fläche die Gleichgewichtslage eines gewichtlosen biegsamen und unausdehnbaren Fadens — einer Schnur —, wenn keine Reibung vorhanden ist, und nur in den Endpunkten Kräfte angreifen, um die Spannung hervorzubringen, die Gestalt einer geodätischen Linie hat. Damit die Gleichgewichtslage stabil sei, muss diese geodätische Linie zwischen den gewählten Endpunkten wirklich relativ Kürzeste sein, sich also nicht durch eine unendlich kleine Variation bei festgehaltenen Endpunkten in eine kürzere überführen lassen, was auf positiv gekrümmten Flächen bekanntlich nicht immer der Fall ist, bei Flächen mit der Krümmung Null und bei negativ gekrümmten Flächen dagegen stets. Der Einfluss der Reibung ist, soweit mir bekannt ist, nur in den einfachsten Fällen berücksichtigt worden, und es finden sich darüber in bekannten Werken Angaben, welche zwar nicht falsch sind, aber doch das Wesen der Sache nicht treffen und jedenfalls einer genaueren Präcisirung bedürfen. So ist z. B. in Thomson und Taits Handbuch der theoretischen Physik § 585 (deutsche Ausgabe Teil II Seite 115) gesagt, dass in diesem Falle eine Schnur auch in Ruhe bleibe, wenn sie längs einer so langen geodätischen Linie auf einem convexen starren Körper ausgespannt ist, dass die Länge zwischen ihren Endpunkten kein Minimum ist. Dies ist richtig, und doch findet ein wesentlicher Unterschied zwischen diesem Falle und demjenigen statt, wo die geodätische Linie wirklich Kürzeste ist. Vermehrt oder vermindert man nämlich,

ohne die Anfangsspannung zu ändern, die Endspannung soweit, wie es irgend möglich ist, ohne das Gleichgewicht zu stören, so wird. Wenn die Verbindung ein Minimum ist, jede seitliche Deformation ein Zurückkehren in die Gleichgewichtslage zur Folge haben, wenn die Länge dagegen kein Minimum ist, wird eine unendlich kleine seitliche Deformation eine weitere Entfernung aus der Gleichgewichtslage zur Folge haben. Ausserdem aber wird durch den obigen Ausspruch und durch die beiden folgenden Paragraphen leicht der Irrtum hervorgerufen, als seien auch mit Rücksicht auf die Reibung die geodätischen Linien die einzigen Gleichgewichtslagen; während es in diesem Falle zwischen zwei Punkten unendlich viele Gleichgewichtslagen giebt, von der Art, dass das Gleichgewicht durch eine unendlich kleine Variation der Gestalt und der Spannung nicht gestört wird. Da ich auch anderweitig keine genauere Behandlung des Gegenstandes gefunden habe, so möchte ich hier auf denselben etwas näher eingehen. Der leichteren Orientirung wegen schicke ich eine kurze Betrachtung des Falles voraus, in welchem keine Reibung wirkt.

I. Vorbetrachtung. Gleichgewicht ohne Reibung.

Nach unserer Voraussetzung wirken auf das Bogenelement ds der Zwang Nds, welchen die Fläche in Richtung ihrer Normale ausübt, und die Spannung T in Richtung der Tangente der Curve, welche wir positiv nehmen, wenn sie eine gegenseitige Anziehung benachbarter Bogenelemente darstellt, also eine Ausdehnung verhindert. Wir können uns auf die Betrachtung des Falles beschränken, dass T eine im Allgemeinen positive und von Null verschiedene Grösse sei. Wäre nämlich T constant gleich Null, so könnte der Faden jede beliebige Gleichgewichtslage annehmen. Wäre aber T negativ, würde also der Faden einer Verkürzung widerstreben, so erhielte man einen Fall, der praktisch kein Interesse hat, und der zudem leicht auf den ersten zurückgeführt werden könnte, indem man alle Kräfte, also auch den Zwang (und später die Reibung) in entgegengesetzter Richtung nähme. Sollte T sein Vorzeichen wechseln, so müsste es, da wir Discontinuitäten ausschliessen, durch Null gehen, und an der Stelle, wo T Null ist, kann man den Faden ohne Störung des Gleichgewichts zerschnitten denken.

Sind nun p, q, r die Richtungscosinus derjenigen Richtung der Normale der Fläche, in welcher der Druck des Fadens auf die Fläche wirkt, also $-p$, $-q$, $-r$ diejenigen der ihr entgegengesetzten Richtung, in welcher der Zwang wirkt, so werden die Bedingungen des Gleichgewichts

$$-Npds + d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0 \text{ und die Analogen,}$$

oder

$$Np - T\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dT}{ds}\frac{dx}{ds} = 0 \text{ und die Analogen.} \qquad \text{I}'$$

Wir multipliciren diese Gleichungen zuerst bezüglich mit $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, nachher bezüglich mit p, q, r und addiren, dann kommt zuerst

$$\frac{dT}{ds} = 0, \text{ also } T = \text{constans,} \qquad \text{II}'$$

und dann mit Rücksicht auf II'

$$N - T\left(p\frac{d^2x}{ds^2} + q\frac{d^2y}{ds^2} + r\frac{d^2z}{ds^2}\right) = 0,$$

oder

$$N = \frac{T}{\varrho}, \qquad \text{III}'$$

wo ϱ den Krümmungsradius des Normalschnittes der Fläche bedeutet, welcher die Curve berührt. Hierdurch werden die Gleichungen I'

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{p}{\varrho}; \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{q}{\varrho}; \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{r}{\varrho},$$

woraus folgt, dass die Gleichgewichtslage eine geodätische Linie ist, und dass der Druck (bei positivem T) nach der Seite des Krümmungscentrums des betreffenden Normalschnittes oder der geodätischen Linie selbst wirkt, also der Zwang nach der entgegengesetzten Richtung.

Bezeichnet man den vom Anfangspunkte an gemessenen Krümmungswinkel der Curve mit τ, so ist

$$d\tau = \frac{ds}{\varrho},$$

also folgt aus III'

$$Nds = Td\tau,$$

mithin

$$\int_0^s Nds = T\tau. \qquad \text{IV}'$$

d. h. der Gesammtdruck eines endlichen Teils der Schnur ist gleich Product aus der Spannung und dem Krümmungswinkel des betreffenden Curventeils.

II. Gleichgewicht mit Rücksicht auf die Reibung.

Ist Reibung vorhanden, so ist sowohl die Gestalt der Curve in der Gleichgewichtslage als auch die Spannung bei gegebener Anfangslage und Richtung, oder auch bei gegebenen Endpunkten innerhalb gewisser Grenzen unbestimmt. Legt man z. B. den Faden an einer bestimmten Stelle in bestimmter Richtung mit bestimmter Spannung an, und wickelt ihn dann weiter auf, so kann man innerhalb gewisser Grenzen sowohl die unendlich nahe Richtung des Nachbarelementes als auch die Nachbarspannung beliebig wählen, ohne dass das Gleichgewicht gestört wird. Es wird sich also wesentlich um zwei Fragen handeln.

1. Wenn die Gestalt des Fadens und die Spannung in jedem Punkte gegeben ist, zu untersuchen, ob der Faden im Gleichgewichte ist.

2. Die äussersten Grenzfälle für die Gleichgewichtszustände unter gewissen Voraussetzungen zu bestimmen.

Wir behalten die obigen Bezeichnungen bei, gehen bei der Reibung von den allgemein üblichen Annahmen aus und bezeichnen den Reibungscoefficienten während der Ruhe mit m, den Reibungswinkel mit μ, so dass $m = \operatorname{tg}\mu$. Sind dann α, β, γ die Richtungscosinus der Tangente der Fläche, nach welcher das Element des Fadens gezogen würde, wenn die Reibung nicht vorhanden wäre, und welche wir die virtuelle Bewegungsrichtung nennen wollen, so sind die Componenten der Reibung $-Rds.\alpha$, $-Rds.\beta$, $-Rds.\gamma$. Die Grösse und Richtung der Reibung während der Ruhe bestimmt sich dadurch, dass die Reibung alle anderen Kräfte aufhebt; die Grösse ist aber an die Bedingung gebunden, dass sie kleiner bleibt, als $mNds$. Wir können also setzen

$$R = m_1 N \qquad m_1^2 \leqq m^2,$$

so dass die Gleichgewichtsbedingungen werden

$$\left.\begin{aligned}
-N(p+m_1\alpha) + T\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dT}{ds}\cdot\frac{dx}{ds} &= 0,\\
-N(q+m_1\beta) + T\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dT}{ds}\cdot\frac{dy}{ds} &= 0,\\
-N(r+m_1\gamma) + T\frac{d^2z}{ds^2} + \frac{dT}{ds}\cdot\frac{dz}{ds} &= 0,\\
\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 &= 1,\\
\alpha p+\beta q+\gamma r &= 0,\\
m_1^2 &\leqq m^2.
\end{aligned}\right\} \quad \text{I}$$

Wir haben nun aus den ersten fünf Gleichungen unter Elimination von N, α, β, γ die Grösse m_1 zu berechnen und diesen Wert in die letzte Ungleichung einzusetzen, um die Gleichgewichtsbedingung in einfachster Form zu erhalten.

Wir multipliciren die drei ersten Gleichungen mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ und addiren; dann kommt

$$-Nm_1\left(\alpha\frac{dx}{ds}+\beta\frac{dy}{ds}+\gamma\frac{dz}{ds}\right)+\frac{dF}{ds}=0,$$

oder, wenn man setzt

$$\alpha\frac{dx}{ds}+\beta\frac{dy}{ds}+\gamma\frac{dz}{ds}=\cos u,$$

$$Nm_1\cos u=\frac{dT}{ds}. \qquad \text{II}$$

u bedeutet den Winkel, welchen die virtuelle Bewegungsrichtung mit der Tangente der Curve in Richtung der wachsenden Bogen bildet, und welchen wir positiv zählen wollen, wenn die virtuelle Bewegungsrichtung nach der geodätisch concaven Seite hinliegt, d. h. nach derjenigen Seite, nach welcher die Projection der Curve auf die Tangentialebene concav ist. Aus dieser Gleichung (II) erkennt man, dass die Tangentialcomponente der Reibung entgegengesetzt ist dem Differenzial der Spannung.

Wir multipliciren ferner die drei ersten Gleichungen I mit p, q, r und addiren, dann erhalten wir

$$-N+T\left(p\frac{d^2x}{ds^2}+q\frac{d^2y}{ds^2}+r\frac{d^2z}{ds^2}\right)=0.$$

Sind nun $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ die Richtungscosinus der Hauptnormale der Curve, und ist ϱ_1 ihr Krümmungsradius, so ist

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{\alpha_1}{\varrho_1}\ \text{etc.},$$

und wenn man unter ψ den Winkel versteht, welchen die Hauptnormale der Curve mit der Normale der Fläche bildet, letztere in der Richtung gewählt, in welcher der Faden auf die Fläche drückt, so ist

$$N=\frac{T\cos\psi}{\varrho_1}, \qquad \text{III}$$

woraus folgt, da N, T und ϱ_1 positiv sind, dass ψ ein spitzer Winkel ist. Da $\varrho_1=\frac{ds}{d\tau}$ ist, so können wir diese Gleichung auch schreiben

$$Nds = T\cos\psi\, d\tau. \qquad \text{IIIa}$$

Wir multipliciren endlich die drei ersten Gleichungen I mit den Richtungscoefficienten $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ derjenigen Tangente der Fläche, welche normal zur Curve nach der geodätisch concaven Seite gerichtet ist. Dann ergiebt sich durch Addition:

$$-Nm_1(\alpha\alpha_2+\beta\beta_2+\gamma\gamma_2)+\frac{T}{\varrho_1}(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2)=0.$$

Hier ist

$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)=\sin\psi$$

immer positiv, und da die übrigen Grössen ebenfalls positiv sind, so ist $\alpha\alpha_2+\beta\beta_2+\gamma\gamma_2$ auch positiv, und ist gleich $\sin u$, woraus folgt, dass u stets zwischen 0 und π liegt, dass also die virtuelle Bewegungsrichtung nach der geodätisch concaven Seite der Curve gerichtet ist. Die oben erhaltene Gleichung aber wird einfacher

$$Nm_1\sin u=\frac{T}{\varrho_1}\sin\psi. \qquad \text{IV}$$

Durch Elimination von u aus II und IV erhält man

$$N^2m_1^2=\frac{T^2}{\varrho_1^2}\sin\psi^2+\left(\frac{dT}{ds}\right)^2,$$

und wenn man hierin für N seinen Wert aus IIIa setzt und nach m_1^2 auflöst:

$$m_1^2=\operatorname{tg}\psi^2+\frac{1}{\cos\psi^2}\left(\frac{d\ln T}{d\tau}\right)^2.$$

Wir setzen noch

$$\frac{d\ln T}{d\tau}=f(\tau),\quad \text{also}\quad T=T_0e^{\int_0^\tau f(\tau)\,d\tau}, \qquad \text{V}$$

wo T_0 die Spannung im Anfangspunkte bezeichnet; dann wird die Bedingung für das Gleichgewicht

$$\operatorname{tg}\psi^2+\frac{f(\tau)^2}{\cos\psi^2}\leqq m^2, \qquad \text{VI}$$

oder

$$(1+m^2)\sin\psi^2+f(\tau)^2\leqq m^2.$$

Und zwar findet bei wirklicher Ungleichheit im oben besprochenen Sinne indifferentes Gleichgewicht statt, bei Gleichheit dagegen ist das Gleichgewicht insofern als labil zu bezeichnen, weil gewisse Variationen der Curve und der Spannung dasselbe stören, andere freilich nicht.

Aus V und VI erkennt man sofort, dass das Gleichgewicht nicht gestört wird, wenn die Spannung T mit irgend einer constanten Zahl multiplicirt wird, also beispielsweise durchweg verdoppelt wird, selbstverständlich wird dann N mit derselben Zahl multiplicirt.

Ferner zeigt sich, dass man ψ und $f(\tau)$ innerhalb gewisser Grenzen beliebig geben darf, um einen Gleichgewichtszustand zu erhalten. Vor allem muss $\operatorname{tg}\psi^2 \leqq m^2$ sein, also der Winkel ψ absolut kleiner als der Reibungswinkel μ, und ebenso muss stets $f(\tau)^2 \leqq m^2$, also

$$+m \geqq f(\tau) = -m,$$

woraus nach bekannten Sätzen der Integralrechnung folgt:

$$m\tau \geqq \int_0^\tau f(\tau)\,d\tau \geqq -m\tau,$$

also mit Rücksicht auf V

$$T_0 e^{+m\tau} \geqq T \geqq T_0 e^{-m\tau},$$

wodurch T zwischen zwei einfach bestimmbare Grenzen eingeschlossen wird, und zwar dürfen die äussersten Grenzwerte von T überhaupt nur vorkommen, wenn $\psi = 0$ ist, und die äussersten Grenzwerte von ψ nur, wenn $f(\tau) = 0$, also T constant ist.

Wir können nun leicht gewisse äusserste Grenzfälle für das Gleichgewicht angeben.

Ist zunächst ψ constant $= 0$, so ist die Gestalt des Fadens eine geodätische Linie. Dann wird $N = \frac{T}{\varrho_1}$ (III), also im Allgemeinen nicht Null, folglich wird nach IV $\sin u = 0$; d. h. die Reibung wirkt nur in Richtung der Tangente, und T kann, wie bereits gesagt, alle möglichen zwischen den oben angegebenen Grenzen liegenden Werte annehmen. Soll das Verhältniss zwischen der Anfangs- und Endspannung T_0 und T_1 möglichst von 1 verschieden sein, so muss entweder

$$T = T_0 e^{+\mu\tau_1} \quad \text{oder} \quad T = T_0 e^{-\mu\tau}$$

sein. Diese beiden extremen Fälle sind von besonderer praktischer Bedeutung. Für die gerade Cylinderfläche lassen sich diese Fälle elementar betrachten, wie dies allgemein bekannt ist.

Ist dagegen ψ constant gleich dem Reibungswinkel μ, so ist $f(\tau) = 0$, und die Spannung T constant.

Ferner folgt aus II, III und IV:

$$N \cos u = 0, \quad N = \frac{T}{\varrho_1} \cos \mu, \quad N \sin u = \frac{T}{\varrho_1} \cos \mu,$$

oder, wenn man unter ϱ wie oben den Krümmungsradius des die Curve berührenden Normalschnitts der Fläche versteht,

$$N = \frac{T}{\varrho}, \quad N \sin u = \frac{T}{\varrho}.$$

Wäre nun $\frac{1}{\varrho} = 0$, so wäre die Curve eine asymptotische Linie und als solche entweder gerade, also geodätisch, so dass $\psi = 0$ und nicht gleich μ wäre, oder ihre Hauptnormale stände rechtwinklig zur Flächennormale (Hoppe, Flächentheorie § 28), also wäre $\psi = \mu = \frac{\pi}{2}$, was unmöglich ist, weil der Reibungscoefficient $m = \operatorname{tg} \mu$ nicht unendlich sein kann. Mithin folgt aus den obigen Bedingungen übereinstimmend, dass $\sin u = +1$, also $\cos u = 0$ ist, mithin ist die virtuelle Bewegungsrichtung rechtwinklig zur Curve nach der geodätisch concaven Seite gerichtet, die Richtung der Reibung entgegengesetzt. Man kann sagen, dass die Gestalt der Curve in diesem Falle am meisten von der geodätischen Linie abweicht.

Von den mannigfachen Zwischenfällen, welche möglich sind, sind besonders einfach diejenigen, bei welchen ψ constant, aber kleiner als μ ist. In diesem Falle nennen wir m_1^2 den Wert, welchen $f(\tau)^2$ nicht überschreiten darf, so dass

$$m_1^2 = m^2 - (1 + m^2) \sin \psi^2,$$

also kleiner als m^2 ist. Dann ist

$$T_0 e^{+m_1 \tau} \overline{\gtrless} T \overline{\gtrless} T_0 e^{-m_1 \tau}.$$

Macht man dann die Spannung gleich $T_0 e^{+m_1 \tau}$ oder gleich $T_0 e^{-m_1 \tau}$, so ist die Curve eben noch Gleichgewichtslage.

III. Beurteilung der Art des Gleichgewichtes.

Bei Problemen des Gleichgewichtes mit Rücksicht auf die Reibung ist der Unterschied zwischen stabilem, labilem und indifferentem Gleichgewicht zwar auch vorhanden, doch empfiehlt es sich, hier noch einen anderweitigen Begriff einzuführen. Wir wollen das Gleichgewicht ein „zähes" nennen, wenn das in der Gleichgewichtslage ruhende System durch ein System unendlich kleiner Kräfte nicht in

Bewegung gesetzt werden kann, wenn es aber andrerseits auch nicht das Bestreben hat, in jene Lage zurück zu kehren, falls es (durch endliche Kräfte) aus jener Lage in eine Nachbarlage gebracht ist. Im zähen Gleichgewicht befindet sich beispielsweise eine schwere Masse, welche auf einer schiefen Ebene gleiten kann, wenn der Neigungswinkel kleiner als der Reibungswinkel ist. Ehe ein solches zähes Gleichgewicht aufhört, tritt ein Zustand ein, den wir „Grenzzustand“ nennen können. Derselbe ist dadurch characterisirt, dass sich das System gewissen Bewegungsantrieben gegenüber wie ein zähes verhält, während andere Bewegungsantriebe, selbst wenn sie beliebig klein sind, eine endliche Bewegung einleiten. Ein solcher Grenzzustand findet auf der schiefen Ebene statt, wenn der Neigungswinkel gleich dem Reibungswinkel ist. Einem nach oben gerichteten Bewegungsantriebe gegenüber verhält sich die Masse wie beim zähen Gleichgewicht, der geringste nach unten gerichtete Antrieb leitet ein Abwärtsgleiten ein.

Um nun für das Kettenproblem die Frage nach der Art des Gleichgewichtes zu entscheiden, kann folgende Erwägung dienen. Die virtuelle Bewegungsrichtung ist stets nach der geodätisch concaven Seite gerichtet, bei geodätischen Linien fällt sie in die Tangente, und zwar nach der Seite der wachsenden Spannung, bei den Curven $\psi = \mu$ senkrecht dagegen, in allen übrigen Gleichgewichtslagen zwischen jene beiden Richtungen. Solange nun ψ und τ so gewählt sind, dass in VI durchweg das Zeichen der Ungleichheit gilt, wird eine unendlich kleine Variation der Curve und der Spannungen stets wieder auf eine Gleichgewichtslage führen, das Gleichgewicht wird zähe sein, und dabei macht es keinen Unterschied, ob die Fadencurve eine geodätische Linie bildet, oder nicht. Erst wenn für irgend einen Punkt der Curve in VI das Gleichheitszeichen gilt, kann eine unendlich kleine Variation eine endliche Bewegung einleiten, sofern sie nämlich auf einen Zustand führt, bei welchem die Bedingung VI nicht mehr erfüllt ist. Besonders einfach ist der Fall, dass ohne Aenderung der Gestalt des Fadens die Spannung so weit variirt wird, dass die Bedingung VI eben aufhört, erfüllt zu sein. Dann bewegt sich jedes Fadenelement, für welches dieser Fall eintritt, nach der geodätisch concaven Seite, und es kommt darauf an, ob hierdurch die Bedingung VI wieder hergestellt wird, oder nicht.

Sind etwa auf einer Fläche zwei Punkte A und B gegeben, zwischen denen ein Faden ausgespannt werden soll, so denke man sich dieselben durch einen geodätischen Bogen verbunden. Versteht man nun unter ε eine beliebig kleine Constante, so werden zwei Curven $\psi = \pm \varepsilon$, welche A und B verbinden, zu beiden Seiten des geodätischen Bogens in beliebiger Nähe desselben verlaufen, vermehrt

man ε unendlich wenig, so werden sich beide Curven verändern, und wenn man ε bis zu einem gewissen Werte wachsen lässt, der höchstens gleich μ sein darf, wird man einen gewissen einfach zusammenhängenden Flächenstreifen zwischen A und B erhalten, welcher von jener Schaar von Curven erfüllt ist. — Es kann aber kommen, dass man ε nicht bis zum Werte μ wachsen lassen darf, weil die Curven nicht mehr reell bleiben, oder auch, weil der Flächenstreifen nicht mehr einfach zusammenhängend ist. — Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, dass wir in der oben angedeuteten Weise bis zu den Curven $\psi = \pm\mu$ kommen können, was bei hinlänglich kleinen Reibungscoefficienten stets der Fall sein wird. Dann ist der abgegrenzte Streifen ein solcher, in welchem unzählig viele Gleichgewichtscurven verlaufen. Doch muss, wenn der Faden längs des Randes liegt, die Spannung constant sein; verändert man dann, ohne die Spannung T_0 in A zu ändern, die Endspannung T_1 in B, so dass das Verhältniss der Endspannung zur Anfangsspannung $T_1 : T_0$ sich immer mehr von der Einheit entfernt; so wird der Streifen, auf welchen die möglichen Gleichgewichtslagen beschränkt sind, immer schmaler, bis endlich für $T_1 = T_0 e^{\pm\mu\tau_1}$, wenn τ_1 den Krümmungswinkel des ganzen Bogens bedeutet, nur die geodätische Linie übrig bleibt. Ist nun die geodätische Linie relatives Minimum, so werden sich die Curven aus jeder Gleichgewichtslage auf diese zusammenziehen, aber auch die geodätische Linie hört auf, Gleichgewichtslage zu sein, sobald $T_1 > T_0 e^{+\mu\tau_1}$ oder $T_1 < T_0 e^{-\mu\tau_1}$ ist, und es leitet sich eine Bewegung in Richtung der wachsenden Spannung ein. Ist dagegen der geodätische Bogen keine relativ Kürzeste, so zieht sich der Faden bei der angegebenen Variation der Spannungen überhaupt nicht auf ihn zusammen, sondern verlässt den Streifen, und macht eine endliche Bewegung. Nur wenn der Faden ursprünglich schon die Gestalt des geodätischen Bogens AB hätte, könnte er bis zur Aufhebung des Gleichgewichts darin verharren.

Auf negativ gekrümmten Flächen oder Flächen mit der Krümmung Null ist nun jede geodätische Linie, welche zwei Punkte verbindet, relativ Kürzeste; dort findet also stets der erste Fall statt. Die verschiedenen geodätischen Bogen, welche zwei Punkte A und B verbinden, unterscheiden sich nur dadurch, dass sie die Fläche in verschiedener Richtung und verschieden oft umwinden. Auf positiv gekrümmten Flächen, oder auch auf Flächen mit teilweise positiver Krümmung dagegen kann auch der zweite Fall eintreten.

IV. Ueber die Curven ψ = constans, namentlich auf Kugeln und cylindrischen Flächen.

Durch die vorigen Betrachtungen gewinnen diejenigen Curven einer Fläche besonderes Interesse, für welche ψ constant ist, deren Hauptnormale also mit der Flächennormale einen constanten Winkel ψ bildet.

Auf der Ebene hat diese Bestimmung keine besondere Bedeutung. Für jede krumme Linie der Ebene nämlich ist ψ constant gleich $\frac{\pi}{2}$. Für jede gerade Linie auf der Ebene sowohl, wie auf jeder anderen Fläche, ist ψ unbestimmt. Auf der Kugel sind die Curven $\psi = \text{const.}$ Kreise, deren Ebenen von dem Mittelpunkte der Kugel den Abstand $a \sin\psi$ haben, wenn a den Kugelradius bedeutet. Für beliebige Flächen werden die Curven durch eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung bestimmt, welche wir aufstellen wollen. Es ist

$$p\frac{d^2x}{ds^2}+q\frac{d^2y}{ds^2}+r\frac{d^2z}{ds^2} = \cos\psi\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}$$

und

$$\alpha_2\frac{d^2x}{ds^2}+\beta_2\frac{d^2y}{ds^2}+\gamma_2\frac{d^2z}{ds^2} = \sin\psi\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2},$$

also ist

$$\left(p\frac{d^2x}{ds^2}+q\frac{d^2y}{ds^2}+r\frac{d^2z}{ds^2}\right)\sin\psi = \left(\alpha_2\frac{d^2x}{ds^2}+\beta_2\frac{d^2y}{ds^2}+\gamma_2\frac{d^2z}{ds^2}\right)\cos\psi. \qquad \text{VII}$$

Nun ist aber

$$\alpha_2 = \left(q\frac{dz}{ds}-r\frac{dy}{ds}\right), \quad \beta_2 = \left(r\frac{dx}{ds}-p\frac{dz}{ds}\right), \quad \gamma_2 = \left(p\frac{dy}{ds}-q\frac{dx}{ds}\right),$$

so dass die Differentialgleichung VII übergeht in

$$\left(p\frac{d^2x}{ds^2}+q\frac{d^2y}{ds^2}+r\frac{d^2z}{ds^2}\right)\sin\psi = \qquad \text{VIIa}$$

$$\left[p\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}-\frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right)+q\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right)+r\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right)\right]\cos\psi$$

Da die Integration der Gleichung der geodätischen Linie nur in wenigen Fällen ausführbar ist, so wird sie für die hier betrachteten Linien noch seltener gelingen. Doch verdient bemerkt zu werden,

dass ausser für die Kugel auch für die cylindrischen Flächen jene Curven durch Quadraturen bestimmt sind.

Für eine cylindrische Fläche mit beliebigem Querschnitt kann man setzen

$$dx = +\sin U du; \quad dy = -\cos U du; \quad dz = dv,$$

wo U eine Function von u bedeutet. Setzt man dann $\frac{dv}{du} = k$, so wird

$$\frac{dx}{ds} = +\frac{\sin U}{\sqrt{1+k^2}}, \qquad \frac{dy}{ds} = -\frac{\cos U}{\sqrt{1+k^2}}, \qquad \frac{dz}{ds} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

$$\alpha_2 = -\frac{\sin U.k}{\sqrt{1+k^2}}, \qquad \beta_2 = \frac{\cos U.k}{\sqrt{1+k^2}}, \qquad \gamma_2 = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

und

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \left[\cos U.U' - \frac{\sin U.k.k'}{1+k^2}\right]\frac{1}{1+k^2}.$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \left[\sin U.U' + \frac{\cos U.k.k'}{1+k^2}\right]\frac{1}{1+k^2}$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = \left[\quad k' \quad - \quad \frac{k^2 k'}{1+k^2}\right]\frac{1}{1+k^2}$$

Setzt man dies in VII ein, so kommt

$$\frac{dk}{\sqrt{1+k^2}} = \operatorname{tg}\psi.dU, \tag{VIII}$$

woraus folgt, wenn U_0 die Integrationsconstante bedeutet,

$$\frac{dv}{du} = k = \frac{e^{(U-U_0)\operatorname{tg}\psi} - e^{-(U-U_0)\operatorname{tg}\psi}}{2},$$

also schliesslich

$$v = \tfrac{1}{2}\int \left(e^{(U-U_0)\operatorname{tg}\psi} - e^{-(U-U_0)\operatorname{tg}\psi}\right) du + c. \tag{IX}$$

Ist der Cylinder ein gerader Kreiscylinder mit dem Radius a, so ist

$$U = \frac{u}{a}, \quad U_0 = \frac{u_0}{a},$$

und man erhält

$$v = \frac{a \operatorname{cotg}\psi}{2}\left(e^{\frac{u-u_0}{a\operatorname{ctg}\psi}} + e^{-\frac{u-u_0}{a\operatorname{ctg}\psi}}\right) + c, \tag{X}$$

d. h. die gesuchten Linien gehen, wenn man den Cylinder in die Ebene abwickelt, in Kettenlinien über, deren Symmetrie-Axe irgend eine Erzeugende des Cylinders ist. Alle diese Kettenlinien sind bei gleichem ψ congruent und haben die Höhe $a \operatorname{ctg} \psi$.

Sind auf dem Cylinder zwei beliebige Punkte gegeben, so kann man den dazwischen liegenden Teil des Mantels in die Ebene abwickeln und dann durch die Bogen zweier Kettenlinien verbinden, welche den Werten $\psi = -\mu$, $\psi = +\mu$ entsprechen. Diese Bogen sind congruent und können durch Drehung um die Mitte der gemeinschaftlichen Sehne zur Deckung gebracht werden. Sie schliessen nach der Aufwickelung auf den Cylinder das Flächenstück ein, auf welches, wie oben bereits besprochen ist, die Gleichgewichtslagen beschränkt sind. Nur wenn beide Punkte auf derselben Erzeugenden des Cylinders liegen, und der Faden den Cylinder nicht umgeben soll, ist die Gerade bei jeder Spannung die einzige Gleichgewichtslage.

Auch in dem Falle, dass die Basis des Cylinders eine Kreisevolvente, oder die Evolvente einer solchen, u. s. f. ist, lässt sich die Integration leicht ausführen.

An dem geraden Kreiscylinder hat man das einfachste Beispiel für den ersten Hauptfall, in welchem die Krümmung negativ oder Null ist.

Für positiv gekrümmte Flächen liefert die Kugel das einfachste Beispiel. Lassen sich durch die beiden Punkte A und B der Kugel, welche der Faden verbinden soll, zwei reelle Kreise $\psi = \pm \mu$ legen, so wird die Oberfläche in vier Teile geteilt, und die möglichen Gleichgewichtslagen sind auf diejenigen beiden Flächenstücke beschränkt, durch welche der grösste Kreis AB hindurchgeht. Doch nur das kleinere der beiden Stücke verhält sich ebenso, wie der von den aufgewickelten Kettenlinien begrenzte Teil des Cylindermantels, indem z. B. wenn man, ohne die Anfangsspannung zu ändern, die Endspannung immer grösser werden lässt, die Curve sich immer mehr auf die letzte Gleichgewichtslage, den kleineren Bogen des grössten Kreises AB, zusammenzieht. Dagegen haben die im Scheitelraum verlaufenden Gleichgewichtslagen die Eigenschaft, dass sie zwar auch zunächst ein „zähes" Gleichgewicht bilden, und zwar bei vermehrter Endspannung um so länger, je weniger sie von dem grösseren geodätischen Bogen AB abweichen. Ist aber einmal der Grenzfall erreicht, so ziehen sie sich nicht auf den grösseren, sondern auf den kleineren geodätischen Bogen AB zusammen.

Sind die Punkte A und B so weit von einander entfernt, dass die beiden Kreise $\psi = \pm \mu$ zusammenfallen oder gar ima[illegible] werden

den, so gehen durch jeden Punkt der Kugel Gleichgewichtslinien, während im Uebrigen dasselbe wie oben gilt. Liegen endlich die Punkte diametral gegenüber, so kann jeder sie verbindende Halbkreisbogen eines grössten Kreises letzte Gleichgewichtslage bei vermehrter Endspannung sein.

Berlin, im Juli 1883.

XVI.

Rückblick auf eine Schattenfläche von Laplace.

Von

Armin Wittstein.

Zögernd übergebe ich hiermit eine kleine, anspruchslose Mitteilung der Oeffentlichkeit, die, als ganze Arbeit meinerseits, ein Paar begleitende Worte zur Reproduction einer Untersuchung aufwirft, die vor fast 80 Jahren aus der Meisterhand eines Laplace hervorging, und nur der Gedanke ermutigte mich zu ihrer Publication, dass möglicherweise denjenigen Lesern dieser Zeitschrift, welche zu einem eingehenden Studium der „Mécanique Céleste“ keine Veranlassung gefunden haben, der, in der Ueberschrift angedeutete Gegenstand, ähnlich wie einst mir selbst, einiges Interesse einzuflössen vermöchte.

Es betrifft die Ableitung der ungemein concinnen Ausdrücke, welche Laplace im IVten Bande seines „Traité de mécanique céleste, livre VIII, chapitre VII (Paris 1805. 4°.)“ für die Oberflächen von Kern- und Halbschatten des Planeten Jupiter, unter Voraussetzung des Zusammenfallens seiner Bahn- und Aequatorebene und sonstigen vereinfachenden Annahmen erhalten hat — wovon ich im Nachstehenden in angemessener Ausführlichkeit der Darstellung handeln werde. Das eigentümliche Substitut, welches Laplace an die Stelle der streng geometrischen Schattenform setzt, ist zwar des mathematischen Charakters letzterer verlustig gegangen (gestattet u. A. auch keine Abwickelung auf eine Ebene mehr), genügt jedoch, dem Grade seiner Annäherung an die wahre Gestalt nach, den Anforderungen der theoretischen, wie praktischen Astronomie vollkommen und gewährt überdies ein lehrreiches Beispiel dafür, wie eine,

immerhin nicht zu den allereinfachsten zu rechnende Aufgabe so überwunden werden kann, dass ihre Lösung, indem sie alles, die Anwendung auf astronomische Zwecke Erschwerende ausschliesst, die grösstmögliche Einfachheit besitzt, ohne jedoch durch bedenkliche und willkürliche Beschränkungen die Anschmiegung des abstracten Problems an den, in concreto gegebenen Fall gleichzeitig zu gefährden.

Unter den, in der Natur sich darbietenden und zu theoretischen Betrachtungen auffordernden Schattenflächen ist, so viel ich weiss, wenn man vom Rotationskegel absieht, ausser der des Planeten Jupiter, keine zweite, welche auch Rücksicht auf die Gestalt des leuchtenden Körpers zu nehmen hat, ernstlich in den Bereich wissenschaftlicher Untersuchung gezogen worden; eines besonderen Hinweises aber auf die hervorragende Rolle, welche sie in der Geschichte spielt, bedarf es wol nicht. Möge die in Rede stehende Fläche bald wieder dazu berufen sein, der Wissenschaft einen bleibenden Dienst zu leisten, d. h. möchten sich in nicht zu ferner Zeit die Astronomen veranlasst fühlen, eine Neu-Bestimmung der Aberrations-Constante aus Verfinsterungen der Jupiter-Satelliten durch den Schatten des Hauptplaneten vorzunehmen! Sechsundsechzig Jahre sind seit dem Erscheinen der zweiten Ausgabe der Delambre'schen „Tables ecliptiques des satellites de Jupiter etc.“ verflossen, ohne dass dieser directeste Weg zur Bestimmung des Verhältnisses zwischen der Geschwindigkeit der Erdbewegung und der des Lichtes inzwischen wieder betreten worden wäre.

Ueber den Nutzen einer solchen Neu-Bestimmung, sowie über die Entwickelung unserer ganzen Aberrationstheorie bis auf Gauss, Fresnel und Cauchy würde ich gerne noch Einiges gesagt haben, wenn ich nicht befürchten müsste, durch derartige Digressionen zu viel des Fremdartigen, oder wenigstens scheinbar des directen sachlichen Zusammenhanges mit dem, diesen Zeilen als Titel vorangesetzten Thema Entbehrendes herbeizuziehen.

1.

Definirt man den Kern- oder Halbschatten, den ein undurchsichtiger, von einem anderen beleuchteter Körper wirft, als die Enveloppe der, beiden Körpern gemeinschaftlichen (gleichartig oder ungleichartig berührenden) Tangentenebene, welche nur einen einzigen veränderlichen Parameter a enthält, oder als die Grenzfläche einer

einfach unendlichen Schaar von Ebenen, so ist das Resultat der Elimination von a aus der Gleichung der Ebene, $u = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial a} = 0$, oder die Discriminante der ursprünglichen Gleichung in Bezug auf a, eine Gleichung in x, y, z, nämlich die einer abwickelbaren Fläche, welche den geometrischen Ort aller Durchschnittslinien zweier auf einander folgenden Tangentenebenen repräsentirt, wenn a in $u = 0$ alle möglichen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annimmt. Von der Eigenschaft der Abwickelbarkeit überzeugt man sich sehr leicht; denn aus der Gleichung

$$z = f(a)x + \varphi(a)y + a$$

einer solchen allgemeinsten Schaar von Ebenen leitet man höchst einfach die folgenden Gleichungen ab

$$o = f'(a)x + \varphi'(a)y + 1, \quad p = f(a) + (f'(a)x + \varphi'(a)y + 1)\frac{\partial a}{\partial x},$$

$$q = \varphi(a) + (f'(a)x + \varphi'(a)y + 1)\frac{\partial a}{\partial y}$$

und, wenn $q = \psi(p)$ gesetzt wird,

$$s = \psi'(p)r, \quad t = \psi'(p)s, \quad s^2 - rt = 0.$$

Die letzte sagt aus, dass die Fläche zum Krümmungsmaasse Null hat und sich ohne Ausdehnung durch Biegung einer Ebene darstellen lässt [1]).

Die, den Oberflächen beider Körper gemeinschaftlich umbeschriebene Abwickelungsfläche bestimmt somit auf der beleuchteten Fläche die Curven, welche die Gebiete der vollen Beleuchtung, des Kern- und Halbschattens von einander trennen.

Läge statt einer Ebene allgemein eine Gleichung von der Form $F(x, y, z, a) = 0$ vor, so würde $\left\{\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad F = 0\right\}$ die Curve ausdrücken, deren geometrischer Ort die Grenzfläche ist. Diejenige Curve, in welcher sich zwei unendlich nahe solcher Curven schneiden, ist die Wendungs-Curve (oder Cuspidal-Kante) der Schaar von Flächen und findet ihren Ausdruck durch die Gleichungen $\left\{F = 0, \frac{\partial F}{\partial a} = 0, \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = 0\right\}$.

---

1) Ein Beispiel für die Grenzfläche einer Schaar von Ebenen mit zwei variabelen Parametern liefert die Wellenfläche von Fresnel.

Längs der Wendungscurve berühren sich die beiden Mäntel der abwickelbaren Fläche. Die, aus den zuletzt angeschriebenen Gleichungen hervorgehenden Werte von x, y, z gehören der Reihe von Punkten an, in denen jede (nach Monge so genannte) charakteristische Linie $\left(F=0,\ \frac{\partial F}{\partial a}=0\right)$ von der benachbarten charakteristischen Linie $\left(\frac{\partial F}{\partial a}=0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial a^2}=0\right)$ geschnitten nnd im Allgemeinen zugleich berührt wird.

Für den Fall einer Ebene sind

$$z=f(a)x+\varphi(a)y+a,\ 0=f'(a)x+\varphi'(a)y+1,\ 0=f''(a)x+\varphi''(a)y$$

die Gleichungen der charakteristischen Linie, und ist die erstere die Schmiegungsebene der Wendungscurve, die jetzt dadurch entsteht, dass die auf einander folgenden Durchschnitte der Ebenen eine Reihe von geraden Linien, und die Durchschnitte dieser auf einander folgenden Geraden eine Reihe von Punkten bilden, welche im Allgemeinen eine doppelt gekrümmte Curve bestimmen, deren Tangenten jene Geraden sind.

Repräsentiren

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha z+f(\alpha) \\ y &= \varphi(\alpha)z+\psi(\alpha) \end{aligned}\right\}$$

die Gleichungen einer erzeugenden Geraden der Fläche, so werden die Gleichungen der Wendungscurve:

$$x=-\alpha f'(\alpha)+f(\alpha),\quad y=-\varphi(\alpha)f'(\alpha)+\int f'(\alpha)\varphi'(\alpha)d\alpha,\quad z=-f'(\alpha).$$

Die Lösung der uns hier beschäftigenden Aufgabe wird, der Hauptsache nach, darauf hinauskommen, dass man, wenn $x=ay+bz+c$ die bewegliche Ebene ausdrückt, b und c als Functionen von a bestimmt und dann aus

$$\left.\begin{aligned} x &= ay+bz+c \\ 0 &= y+z\frac{db}{da}+\frac{dc}{da} \end{aligned}\right\}$$

a eliminirt, wodurch die verlangte Endgleichung in x, y, z erhalten wird.

Betrachten wir zunächst den leuchtenden Körper, dessen Oberfläche durch die Gleichung $f(x, y, z)=0$ dargestellt sein möge. Für die Tangenten in irgend einem Punkte (X, Y, Z) der Fläche besteht dann die bekannte Gleichung:

$$(x-X)\frac{\partial\mu}{\partial X}+(y-Y)\frac{\partial\mu}{\partial Y}+(z-Z)\frac{\partial\mu}{\partial Z}$$
$$=(z-Z)\left\{\frac{\partial\mu}{\partial X}\cdot\frac{\partial X}{\partial Z}+\frac{\partial\mu}{\partial Y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial Z}+\frac{\partial\mu}{dZ}\right\},$$

unter $\mu=0$ Dasjenige verstanden, was aus $f=0$ wird, wenn man darin die laufenden Coordinaten durch die des Berührungspunktes ersetzt. Die rechte Seite dieser Gleichung verschwindet; soll somit unsere bewegliche Ebene eine Tangentenebene des leuchtenden Körpers werden, so muss sie, neben der Bedingung, die Coordinaten des Berührungspunktes zu enthalten, auch der anderen,

$$\frac{\partial\mu}{\partial X}\cdot dX+\frac{\partial\mu}{\partial Y}\,dY+\frac{\partial\mu}{\partial Z}\cdot dZ=0$$

genügen. Setzt man den Wert von dX aus $dX=a\,dY+b\,dZ$ in die zweite Bedingung ein, so folgt:

$$dY\left(\frac{\partial\mu}{\partial Y}+a\frac{\partial\mu}{\partial X}\right)+dZ\left(\frac{\partial\mu}{\partial Z}+b\frac{\partial\mu}{\partial X}\right)=0,$$

welche Gleichung in die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial\mu}{\partial Y}+a\frac{\partial\mu}{\partial X}=0,\qquad \frac{\partial\mu}{\partial Z}+b\frac{\partial\mu}{\partial X}=0$$

zerfällt. Die Vereinigung derselben mit $\mu=0$, $X=aY+bZ+c$ führt nach der Elimination von X, Y, Z auf eine Endgleichung in a, b, c.

Genau dieselbe Betrachtungsweise auf den beleuchtenden Körper angewandt, giebt die Glechungen

$$\frac{\partial\mu'}{\partial Y'}+a\frac{\partial\mu'}{\partial X'}=0,\quad \frac{\partial\mu'}{\partial Z'}+b\frac{\partial\mu'}{\partial X'}=0,\quad \mu'=0,\quad X'=aY'+bZ'+c$$

woraus eine zweite Endgleichung in a, b, c folgt.

b und c können nun als Functionen von a ausgedrückt und in die oben angesetzten Gleichungen substituirt werden.

2.

In seiner „Analytischen Geometrie des Raumes (I. S. 276.)“, und zwar in dem Capitel über die Invarianten und Covarianten der Systeme zweiten Grades, hat bereits Salmon das Problem: die zwei Oberflächen zweiten Grades gemeinschaftlich umbeschriebene abwickelbare Fläche zu bestimmen, kurz behandelt und gefunden, dass die gesuchte Fläche vom 8ten Grade in den Variabelen und vom 10ten

in den Coefficienten der Gleichung jeder Fläche zweiten Grades ist; die gegebenen Flächen waren dabei auf ihr sogen. gemeinschaftliches Quadrupel harmonischer Pole bezogen gedacht. Als weitere Ergebnisse wären noch hervorzuheben: Die Berührungscurven der abwickelbaren Fläche mit den beiden Flächen zweiten Grades sind die Durchschnittscurven von je zwei Flächen zweiten Grades; nennt man $U = 0$, $U' = 0$ die beiden gegebenen Flächen, so ist der Berührungspunkt von U mit einer gemeinschaftlichen Tangentenebene von U und U' der in Bezug auf $U = 0$ genommene Pol einer Tangentenebene von $U' = 0$. Der Schnitt mit einer der Hauptebenen, d. h. mit einer Ebene des Fundamental-Tetraeders, endlich liefert einen zweifach zählenden Kegelschnitt und 4 gerade Linien.

Auch Professor Heger [2]) beschäftigt sich mit der in Rede stehenden Fläche und nennt sie, auf Grund der von ihm angegebenen Eigenschaft, dass durch einen gegebenen Punkt 4 Tangentenebenen an die Fläche hindurchgehen, eine Fläche 4ter Classe, 1ter Species, zur Unterscheidung von anderen Flächen 4ter Classe.

3.

Als Anwendung der am Schlusse von (1) angegebenen Gleichungen erhält man, unter Zugrundelegung eines orthogonalen Coordinaten-Systems, das seinen Ursprung im Sonnencentrum hat, für die Sonne (vom Halbmesser R) die Gleichungen:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0, \quad Y + aX = 0, \quad Z + bX = 0,$$
$$X = aY + bZ + c.$$

Die drei ersten und dann die drei letzten geben

$$X^2(1 + a^2 + b^2) = R^2, \quad X(1 + a^2 + b^2) = c$$

also

$$c^2 = R^2(1 + a^2 + b^2).$$

Den Planeten Jupiter betrachten wir als ein abgeplattetes Rotationsellipsoid, dessen Mittelpunkt auf der Axe der X, in der Entfernung D vom Sonnencentrum, liegen möge, und setzen voraus, dass sein Aequater (vom Halbmesser A) mit seiner Bahnebene zusammenfalle. Der Irrtum, den wir durch diese Annahme begehen, würde für den Fall, dass Jupiter eine kugelförmige Gestalt besässe, völlig

2) Handbuch der Mathematik, unter Mitwirkung von Prof. Dr. Reidt und Prof. Dr. Heger, herausgegeben von Schlömilch (in der E. Trewendt'schen Encyclopädie der Naturwissenschaften, 1te Abteilung, 2ter Teil). Breslau 1881.

verschwinden; er ist von der Ordnung des Productes aus der Elliptіcität Jupiter's in die Neigung seiner Aequatorebene gegen die seiner Bahn, welche letztere etwa $3^0\,26'$ beträgt, und verändert daher, vom astronomischen Standpunkte aus betrachtet, die Gestalt der Oberflächen von Kern- und Halbschatten, und somit die Dauer der Verfinsterungen der Jupiter-Satelliten [3]), nur in so geringem Maasse, dass sein Einfluss völlig vernachlässigt werden darf.

Bezeichnet R' die halbe kleine Axe eines solchen Ellipsoides (A seine halbe grosse), so ist seine Gleichung

$$\frac{(X'-D)^2+Y'^2}{A^2}+\frac{Z'^2}{R'^2}=1$$

oder

$$(X'-D)^2+Y'^2+\frac{A^2}{R'^2}(Z'^2-R'^2)=0.$$

---

3) Die neuesten, für die Epoche 1879.⁰ geltenden Bahnelemente der 4 Jupiter-Trabanten hat Dr. W. Schur in seiner ausgezeichneten, grossen Abhandlung über die „Bestimmung der Masse des Planeten Jupiter aus Heliometer-Beobachtungen der Abstände seiner Satelliten (Leopold. Bd. XLV, Nr. 3; Halle 1882. gr. 4⁰)“ gegeben. Der Verfasser leitet daselbst auch für die beiden ersten Satelliten Excentricitäten ihrer Bahnen ab und findet, dass die Excentricität der Bahn des zweiten nahe gleich der Bahn des dritten ist, während die Excentricität der Bahn des ersten sehr klein ausfällt. Bessel nimmt noch beide Bahnen kreisförmig an. Dieses bemerkenswerte Ergebniss der Schur'schen Messungen lässt ein eigentümliches Streiflicht auf einen Ausspruch von Laplace (in der Vorrede zum IVten Bande der M. C) fallen, resp. bestätigt auf's Neue, dass die Grenzen, innerhalb deren er sich aufrecht erhalten lässt, eben nur mit der Vervollkommung der Beobachtungskunst, von der ja die Fortschritte der Astronomie so wesentlich abhängen, nach und nach immer enger werden können; derselbe lautet folgendermaassen: „Es ist merkwürdig, wie man so aus der Analysis diese einzelnen Phänomene hervorgehen sieht, welche die Beobachtung nur undeutlich erkannte, da jene, eine Folge der Vereinigung mehrerer einfacher Ungleichheiten, schon viel zu complicirt sind, als dass die Astronomen ihre Gesetze hätten entdecken können.“ — Bezieht sich dieser Satz auch nicht direct auf Dasjenige, wovon hier die Rede ist, so wohnt ihm doch eine solche Allgemeinheit inne, dass es mir erlaubt schien, ihn dabei anzuführen, wenn ich in Erinnerung bringen wollte, wie die durch Schur erst jetzt aus Beobachtungen nachgewiesene Existenz der fraglichen Excentricitäten schon Laplace für theoretisch berechtigt galt, als er sich hierüber (ibidem) dahin äusserte, dass „auch für diesen Trabanten (den zweiten) die Beobachtungen keine Excentricität seiner Bahn gezeigt haben, wol aber wieder Dasselbe, wie beim ersten, Statt finde, dass sie nämlich auf die Excentricitäten der beiden letzten Satelliten-Bahnen etwas Einfluss ausübt“.

In letztere die Abplattung $\varrho = \frac{A - R'}{R'}$ eingeführt, giebt als Ausdruck für alle Punkte der Oberfläche Jupiter's

$$(X' - D)^2 + Y'^2 + (1 + \varrho)^2 (Z'^2 - R'^2) = 0.$$

Hierzu tritt, nach den Schlussformeln in (1), noch hinzu

$$Y' + a(X' - D) = 0, \quad Z'(1 + \varrho)^2 + b(X' - D) = 0,$$
$$X' - D = aY' + bZ' + c - D,$$

woraus folgt:

$$c - D = (1 + \varrho)R' \sqrt{1 + a^2 + \frac{b^2}{(1 + \varrho)^2}}$$

oder

$$R\sqrt{1 + a^2 + b^2} - D = (1 + \varrho)R' \sqrt{1 + a^2 + \frac{b^2}{(1 + \varrho)^2}}.$$

Ist $\lambda = \frac{(1 + \varrho)R'}{R}$, $f^2 = \frac{D^2}{R^2(1 - \lambda)^2} - 1$, und vernachlässigt man die zweiten Potenzen von ϱ, so findet sich [4]):

$$\sqrt{1 + a^2 + b^2} - (1 - \lambda)\sqrt{1 + f^2} = \lambda \sqrt{1 + a^2 + \frac{b^2}{(1 + \varrho)^2}},$$

$$1 + \frac{a^2 + b^2}{2} - (1 - \lambda)\sqrt{1 + f^2} = \lambda \left\{ 1 + \frac{a^2 + \frac{b^2}{(1 + \varrho)^2}}{2} \right\},$$

$$2 + a^2 + b^2 - 2(1 - \lambda)\sqrt{1 + f^2} = 2\lambda + a^2\lambda + b^2\lambda - 2b^2\varrho\lambda,$$
$$b^2(1 - \lambda + 2\varrho\lambda) + a^2(1 - \lambda) + 2(1 - \lambda) = 2(1 - \lambda)\sqrt{1 + f^2},$$

$$b^2\left(1 + \frac{2\varrho\lambda}{1 - \lambda}\right) + a^2 + 2 = 2\sqrt{1 + f^2} = 2\left(1 + \frac{f^2}{2}\right),$$

$$b^2 = \frac{f^2 - a^2}{1 + \frac{2\varrho\lambda}{1 - \lambda}}, \quad b = \sqrt{f^2 - a^2}\cdot\left(1 - \frac{\varrho\lambda}{1 - \lambda}\right);$$

$$c = R\sqrt{1 + a^2 + b^2},$$

$$c^2 = R^2\left\{1 + a^2 + (f^2 - a^2)\left(1 - \frac{2\varrho\lambda}{1 - \lambda}\right)\right\}$$
$$= R^2(1 + f^2) - \frac{2\varrho\lambda}{1 - \lambda}(f^2 - a^2)R^2,$$

---

4) Ich gebe diese Entwickelung absichtlich ausführlicher, als es von Laplace geschehen ist.

$$c^2 = \frac{D^2}{(1-\lambda)^2} - \frac{2\varrho\lambda}{1-\lambda}(f^2-a^2)\frac{D^2}{(1+f^2)(1-\lambda)^2},$$

$$c = \frac{D}{1-\lambda} - \varrho\lambda(f^2-a^2)\frac{D}{(1-\lambda)^2(1+f^2)}, \quad c = \frac{D}{1-\lambda} - \varrho\lambda(f^2-a^2)\frac{R^2}{D}.$$

Die Gleichung der Ebene wird daher:

$$x = ay + \left(1 - \frac{\varrho\lambda}{1-\lambda}\right)\sqrt{f^2-a^2}\,.\,z + \frac{D}{1-\lambda} - \varrho\lambda(f^2-a^2)\,.\,\frac{R^2}{D}$$

und geht, nach der Differentiation nach a, über in

$$0 = y - az\,.\,\frac{1-\frac{\varrho\lambda}{1-\lambda}}{\sqrt{f^2-a^2}} + 2\varrho\lambda a\,.\,\frac{R^2}{D}.$$

Die Elimination [5]) von a aus den beiden letzten Gleichungen würde nun den Ausdruck für die Schattenfläche liefern, allein die Rechnung wird einfacher, wenn man annimmt $a = \frac{yf}{\sqrt{y^2+z^2}} + q.\varrho$ — das erste Glied rechts giebt, den Planeten kugelförmig vorausgesetzt, den Wert von a. Damit erhält man zunächst

---

5) Sie verlangt eigentlich die Auflösung einer Gleichung vierten Grades, die Laplace umgeht. Hätte man bis dahin gar keine Vereinfachungen eintreten lassen und den Mittelpunkt des Ellipsoides irgendwo in der Ebene der XY angenommen, so würde man zur Bestimmung von a ebenfalls eine Gleichung vierten Grades aufzulösen haben, zu der noch eine zweite vom 8ten Grade in a hinzutritt, einerlei ob man es mit einem Umdrehungs- oder dreiaxigen Ellipsoide zu tun hat, nur mit dem Unterschiede, dass im ersten Falle die Coefficienten von a einfacher sind, als im zweiten. Sobald aber der Mittelpunkt des Ellipsoides ausserhalb der Ebene der XY liegt, gestaltet sich der ganze Process um ein Bedeutendes complicirter; ich will jedoch auf diese strengen Gleichungen hier nicht weiter eingehen. Handelt es sich um die Schattenfläche eines Rotationsellipsoides — dabei wieder die Voraussetzung, dass seine Aequatorebene durch den Mittelpunkt der leuchtenden Kugel geht — so hat offenbar die Wahl der Lage seines Mittelpunktes in der Ebene der XY gar keinen Einfluss auf deren Gestalt; es erscheint einem Beobachter zwischen Ellipsoid und Kugel, auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte beider Körper, stets vollständig beleuchtet, oder, insofern es ein Planet ist, als stets von denselben Projectionen der Beobachtungscurven (denn der Halbschatten participirt ja auch hieran) auf den Himmelsgrund begrenzt. Anders ist es beim dreiaxigen Ellipsoid, das extreme Beleuchtungs- und Schatten-Phasen zeigt, die damit zusammenfallen, dass man seinen Mittelpunkt in den Coordinaten-Anfang legt und den der Kugel das eine Mal auf der Axe der X, das andere Mal der Y annimmt; im Allgemeinen erscheint es einem, wie oben situirten Beobachter unvollständig beleuchtet.

$$\left(1-\frac{\varrho\lambda}{1-\lambda}\right)\sqrt{f^2-a^2}=\left(1-\frac{\varrho\lambda}{1-\lambda}\right)\sqrt{f^2-\frac{y^2f^2}{y^2+z^2}-\frac{2q\varrho yf}{\sqrt{y^2+z^2}}}$$

$$=\left(1-\frac{\varrho\lambda}{1-\lambda}\right)\sqrt{\frac{z^2f^2}{y^2+z^2}-\frac{2q\varrho yf}{\sqrt{y^2+z^2}}}$$

$$=\left(1-\frac{\varrho\lambda}{1-\lambda}\right)\sqrt{\left\{\frac{zf}{\sqrt{y^2+z^2}}-\frac{q\varrho y}{z}\right\}^2}$$

$$=\frac{zf}{\sqrt{y^2+z^2}}-\frac{q\varrho y}{z}-\frac{\varrho\lambda zf}{(1-\lambda)\sqrt{y^2+z^2}}$$

und für die Gleichung der Ebene

$$x=f.\sqrt{y^2+z^2}-\frac{\varrho\lambda z^2f}{(1-\lambda)\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{D}{1-\lambda}-\frac{\varrho\lambda R^2}{D}\cdot\frac{z^2f^2}{y^2+z^2},$$

sowie hieraus:

$$\left(x-\frac{D}{1-\lambda}\right)^2=(y^2+z^2)f^2-\frac{2\varrho\lambda z^2f^2}{1-\lambda}-2\varrho\lambda z^2f^3\cdot\frac{R^2}{D\sqrt{y^2+z^2}}.$$

Da D bedeutend grösser als R ist, so hat man sehr nahe $f=-\frac{D}{R(1-\lambda)}$, und zwar mit dem negativen Vorzeichen, weil $x<\frac{D}{1-\lambda}$; denn man findet für einen Schatten von Kreiskegel-Form (also Jupiter kugelförmig angenommen) $x=\frac{D}{1-\lambda}$, $y=0$, $z=0$ als Coordinaten seines Mittelpunktes, so dass also $x>\frac{D}{1-\lambda}$ hier nicht mehr in Betracht kommt.

Als Gleichung der Figur des Halbschattens erhalten wir somit

$$\left(x-\frac{D}{1+\lambda}\right)^2\cdot\frac{R^2(1+\lambda)^2}{D^2}=y^2+z^2+\frac{2\varrho\lambda}{1+\lambda}\cdot z^2\cdot\left(\frac{R}{\sqrt{y^2+z^2}}+1\right)$$

und in ganz ähnlicher Weise als Gleichung der Figur des Kernschattens

$$\left(\frac{D}{1-\lambda}-x\right)^{\lambda}\cdot\frac{R^2(1-\lambda)^2}{D^2}=y^2+z^2+\frac{2\varrho\lambda}{1-\lambda}\cdot z^2\left(\frac{R}{\sqrt{y^2+z^2}}-1\right),$$

da λ für den Halbschatten einen negativen, für den Kernschatten einen positiven Wert hat.

Betrachten wir jetzt den Schnitt der Kernschattenfläche, der durch eine, auf der Axe der X senkrechte Ebene, in der Entfernung r vom Mittelpunkte Jupiter's hervorgebracht wird, setzen also $x = D + r$, so folgt zunächst

$$\frac{R^2}{D^2}(\lambda D - r(1-\lambda))^2 = y^2 + z^2 + \frac{2\varrho\lambda}{1-\lambda} \cdot z^2 \left(\frac{R}{\sqrt{y^2+z^2}} - 1\right)$$

und dann durch Vernachlässigung von ϱ:

$$\sqrt{y^2+z^2} = R\lambda \left\{1 - \frac{r(1-\lambda)}{D\lambda}\right\} = (1+\varrho)R' \left\{1 - \frac{r(1-\lambda)}{D\lambda}\right\}.$$

Diesen Wert von $\sqrt{y^2+z^2}$ in das von ϱ abhängige Glied der vorhergehenden Gleichung eingesetzt, giebt

$$(1+\varrho)^2 R'^2 \left\{1 - \frac{r(1-\lambda)}{D\lambda}\right\}^2 = y^2 + z^2 + 2\varrho z^2 \cdot \frac{1+\frac{r}{D}}{1 - \frac{r(1-\lambda)}{D\lambda}},$$

also die Gleichung einer Ellipse, deren halbe grosse Axe

$$(1+\varrho)R' \left\{1 - \frac{r(1-\lambda)}{D\lambda}\right\} = \alpha$$

und deren Abplattung

$$\varrho \cdot \frac{1+\frac{r}{D}}{1 - \frac{r(1-\lambda)}{D\lambda}}$$

ist; denn man braucht die Gleichung einer Ellipse sich nur in der Form

$$\frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\alpha^2}(1+\varrho')^2 = 1,$$

ϱ' dabei die Abplattung $= \frac{\alpha - \beta}{\beta}$ bedeutend, geschrieben zu denken, dieselbe geht durch Vernachlässigung der zweiten Potenzen von ϱ' über in

$$\frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\alpha^2}(1+2\varrho') = 1.$$

$(1+\varrho)R'$ ist die halbe grosse Axe der erzeugenden Ellipse Jupiter's, oder der halbe Durchmesser seines Aequators, die Grösse $\frac{r}{D\lambda}$ ist selbst für den 4ten Satelliten dieses Planeten unbeträchtlich. Bedient man sich der eben angegebenen abgekürzten Bezeichnungen, so wird,

wieder mit Rücksicht auf die mehrfach betonte Vernachlässigung der zweiten Potenzen, die Gleichung der Schnitt-Ellipse

$$\alpha^2 - y^2 = z^2(1+\varrho')^2,$$

2α drückt dann die grösste Breite eines Kernschatten-Querschnittes aus.

Denkt man sich in α und ϱ' die Grösse λ mit negativem Vorzeichen eingeführt, so stellt die voraufgehende Gleichung ebenso den, auf der Axe des Halbschattens senkrechten, durch letzteren geführten Schnitt dar. Die grösste Breite des Halbschattens in der Entfernung r vom Mittelpunkte Jupiter's wird daher augenscheinlich durch die Differenz der beiden Werte von α für Kern- und Halbschatten bestimmt, sie ist $(1+\varrho)R'\frac{2r}{D\lambda}$ oder $\frac{2rR}{D}$, worin R den Sonnenhalbmesser bedeutet.

4.

Bei dem Entwurfe der perspectivischen Ansicht von der, im Voraufgehenden behandelten Kernschatten-Fläche, welche ich diesem Aufsatze beigefügt habe, ist der Augenpunkt so angenommen, dass der Beschauer von Oben herab schräge auf die, etwas um die Verticale und Horizontale gegen ihn zu gedachte Figur sieht; die Contouren und einzelnen Schnitte werden sich daher dem Auge nicht in ihrer wahren, sondern in einer, durch die Perspective etwas veränderten Gestalt darbieten.

Legt man die Ebene der YZ in den Punkt $\left(x = \frac{D}{1-\lambda},\ y = 0,\ z = 0\right)$, den ich ein für alle Male Mittelpunkt nennen werde, so sieht man zunächst, dass das Gebilde, welches durch eine Fläche 6ten Grades dargestellt wird, alle 3 Coordinaten-Ebenen zu Symmetrie-Ebenen hat.

Der Durchschnitt mit der Ebene der XY führt auf die Gleichung

$$\left(x'.\frac{R}{\mathfrak{a}} - y\right)\left(x'\frac{R}{\mathfrak{a}} + y\right) = 0,$$

stellt also, was am Ende auch von selbst klar gewesen wäre, zwei sich im Mittelpunkte schneidende Gerade (a, a') dar. Dabei ist $\mathfrak{a} = \frac{D}{1-\lambda}$, $x' = x - \mathfrak{a}$.

Die Contouren der Fläche in der Ebene der YZ sind zwei Hyperbeln (b, b')

$$\frac{z'^2}{b^2} - \frac{x'^2}{\left(\frac{ab}{R}\sqrt{1-\frac{2\lambda\varrho}{1-\lambda}}\right)^2} = 1,$$

von denen nur je ein Ast vorhanden ist. Hierbei wurde gesetzt

$$z' = z + b, \quad b = \frac{\frac{\lambda\varrho R}{1-\lambda}}{1-\frac{2\lambda\varrho}{1-\lambda}}.$$

Jeder Schnitt mit einer Ebene, parallel der Ebene der XY, z. B. der für $z = b$, liefert eine Gleichung von der Form

$$x'^2 = y^2 . \mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{y^2+b^2}} + \mathfrak{C},$$

welche einer Curve 6ten Grades (c, c', c_1, c_1') angehört, die aus zwei congruenten, nach beiden Seiten hin sich in's Unendliche erstreckenden Zweigen besteht. Sie liegt gegen beide Axen des betreffenden rechtwinkligen Coordinaten-Systems vollkommen symmetrisch und besitzt geradlinige, in der Figur nicht angedeutete Asymptoten

$$(x' - y\sqrt{\mathfrak{A}})(x' + y\sqrt{\mathfrak{A}}) = 0,$$

die wieder zu der Hyperbel

$$\frac{x'^2}{(\sqrt{\mathfrak{C}})^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}}\right)^2} = 1$$

gehören.

Schneidet man schliesslich die Fläche durch eine, durch den Mittelpunkt gehende und der Ebene der YZ parallele Ebene, so erhält man wieder eine Curve 6ten Grades (d, d') von der Form

$$z^6 A^2 + y^6 + z^4 y^2 (A^2 + 2A) + y^4 z^2 (2A + 1) - z^4 (A - 1)^2 . R^2 = 0,$$

$$A = 1 - \frac{2\lambda\varrho}{1-\lambda}:$$

Die Discussion dieser Curve, für welche der Mittelpunkt ein sogen. Inflexionspunkt wird, hängt, der Hauptsache nach, von der Auflösung zweier Gleichungen dritten Grades (die eine in y^2, die andere in z^2) ab. Sie setzt sich aus zwei congruenten Teilen zusammen, deren einer ganz oberhalb und deren anderer ganz unter-

halb der Ebene der XY liegt, hat einige Aehnlichkeit mit einer Lemniskate und lässt sich näherungsweise durch zwei, in einer Ebene angenommene Ellipsen ersetzen, deren kleine Axen in eine Gerade fallen und im Mittelpunkte zusammentreffen. Je weiter man sich von letzterem Punkte entfernt, desto mehr werden die, der Ebene der YZ parallelen Schnitte Ovalen ähneln, resp. Ellipsen, die wir oben, nach dem Laplace'schen Verfahren, als allgemeine Schnittfiguren in dem zuletzt besprochenen Sinne kennen gelernt haben.

Leipzig, im März 1883.

XVII.

Ueber einige Eigenschaften einer besonderen Kegelschnittschar.

Von

Dr. **Carl Hossfeld.**

Unter den ebenen Gebilden II. Ordnung von einfach unendlicher Mannigfaltigkeit hat das Kegelschnittbüschel und die Kegelschnittschar mit vier gleichartigen (reellen oder imaginären) Grundelementen die eingehendste Betrachtung erfahren *).

Nicht weniger interessante Eigenschaften wie jene Gebilde zeigt die sog. gemischte Kegelschnittschar, deren einzelne Curven durch drei feste (zum Teil imaginäre) Punkte hindurchgehn, und eine feste Gerade berühren.

Wir betrachten zunächst den Fall der Realität sämmtlicher Grundelemente.

Es seien gegeben drei feste Punkte A, B, C, die nicht in einer geraden Linie liegen, und eine feste Gerade d, welche keinen dieser Punkte enthält. Die durch diese vier Elemente bestimmte Kegelschnittschar könnte am einfachsten dadurch erzeugt werden, dass man den Berührungspunkt auf d fortschreiten liesse; wir wenden uns jedoch einer andern Erzeugungsweise zu, welche uns unmittelbar auf wichtige Eigenschaften der Schar führt.

---

*) Schroeter-Steiner, Vorlesungen über synthetische Geometrie. 3. Abschnitt.

Nimmt man in einem der drei gegebenen Punkte z. B. in C eine Tangente c beliebig an, so giebt es immer zwei (reelle oder imaginäre) Kegelschnitte, welche die fünf Curvenelemente A, B, C, c und d enthalten *).

Um ihre Berührungspunkte auf d zu erhalten, müssen wir auf der gemeinschaftlichen Sehne $AB = s$ dasjenige einzige (reelle oder imaginäre) Punktpaar $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ bestimmen, welches sowol die Punkte A und B, als auch die Schnittpunkte

$$A(sd) = \mathfrak{D} \quad \text{und} \quad (sc) = \mathfrak{C}$$

harmonisch trennt. Die reellen oder imaginären Verbindungslinien des Punktes C mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ bestimmen auf d die Berührungspunkte eines reellen oder imaginären Kegelschnittpaares. Drehen wir die Tangente c um den Punkt C, so schreitet $\mathfrak{C}$ auf s fort, und wir erhalten sämmtiche Kegelschnittpaare der Schar. So lange die Tangente c die Sehne s auf derselben Strecke AB trifft, welche auch d schneidet, sind die Curvenpaare reell; sie werden imaginär, sobald A und B durch $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ getrennt erscheinen. Da das Punktpaar $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ stets harmonisch durch die beiden festen Punkte A und B getrennt wird, so beschreibt es bei der Erzeugung der Kegelschnittschar — und in Folge dessen auch das Paar Berührungspunkte auf d — eine hyperbolische Involution.

Mit Hilfe des Gefundenen können wir den Ort des Poles einer allen Kegelschnitten der Schar gemeinschaftlichen Sehne in Bezug auf jene bestimmen.

Wir führen diese Bestimmung für die Sehne $AB = s$ aus. Für jede bestimmte Tangentenlage c erhalten wir im Allgemeinen zwei Punkte als Pole von s in Bezug auf die durch c bestimmten zwei conjugirten Kegelschnitte. Diese Pole sind die Schnittpunkte der Polaren γ des Punktes $\mathfrak{C}$ mit den beiden Polaren δ und δ' des Punktes $\mathfrak{D}$. Die Polare γ finde ich, indem ich C mit einem Punkte $\mathfrak{C}'$ auf s verbinde, welcher durch A und B harmonisch von $\mathfrak{C}$ getrennt wird; die Polaren δ und δ' sind bzhw. die Verbindungslinien der Berührungspunkte D und D' auf d mit einem festen Punkte $\mathfrak{D}'$ auf s, welcher durch A und B harmonisch von $\mathfrak{D}$ getrennt wird. Die Schnittpunkte

$$(\gamma\delta) = \Pi_1 \quad \text{und} \quad (\gamma\delta') = \Pi_2$$

sind also die Pole der Sehne s.

---

*) Vergl. meine Inaug.-Diss.: Construction des Kegelschn. aus fünf zum Teil imag. Curvenelementen. Jena, Deistung.

Nun müssen aber auch die Verbindungslinien des Schnittpunkts $(cd) = S$ mit $\mathfrak{A}$ und A' die Pole Π_1 und Π_2 enthalten; da aber die vier Strahlen d, $S\mathfrak{A}'$, c, $S\mathfrak{A}$ ein harmonisches Büschel bilden, so sind die vier Punkte

$$\Pi_1, \quad C, \quad \Pi_2 \quad (\Pi_1 \Pi_2 d) = S'$$

vier harmonische Punkte.

Drehen wir jetzt c stetig um C, erzeugen also die Kegelschnittschar, so beschreiben die Strahlen $\mathfrak{D}'D$ und $\mathfrak{D}'D'$ eine Involution. Auf jedem Paar conjugirter Strahlen $\delta\delta'$ derselben liegen die Pole der Sehne s in Bezug auf das durch sie bestimmte conjugirte Kegelschnittpaar, und man findet diese Pole Π_1 und Π_2, in dem man denjenigen Strahl von C aufsucht, dessen Schnittpunkte Π_1 und Π_2 mit δ und δ' durch C und seinen Schnittpunkt mit d harmonisch getrennt werden. Daraus folgt, dass die Polpaare Π_1 und Π_2 auf einer Curve *II.* Ordnung liegen, welche s im Punkte $\mathfrak{D}'$ berührt und in Bezug auf welche C und d Pol und Polare sind.

Fassen wir das Ergebniss unserer Betrachtung noch einmal in dem Satz zusammen:

„Lässt man eine Kegelschnittschar, deren einzelne Curven durch „drei reelle Punkte hindurchgehn und eine reelle Gerade berühren, „dadurch entstehen, dass man die Tangente in einem der drei Punkte „stetig um diesen dreht, so erhält man unendlich viel Paare ein„ander zugeordneter reeller oder imaginärer, in dem gewählten Punkte „sich berührender Kegelschnitte, deren Beziehungspunktpaare auf „der festen Geraden eine hyperbolische Involution bilden. Die Pole „einer gemeinschaftlichen Sehne aller Curven der Schar in Bezug „auf sämmtliche conjugirte Kegelschnittpaare bilden eine involutori„sche Punktreihe zweiter Ordnung, deren Träger die gemeinschaft„liche Sehne berührt und in Bezug auf welche der nicht auf der „gemeinschaftlichen Sehne gelegene dritte Punkt der Pol — der ge„gebenen festen Geraden ist.“

Wir dehnen jetzt unsere Untersuchungen auf eine Kegelschnittschar aus, für welche zwei der ursprünglichen Grundpunkte imaginär sind. Es sei C der reelle Punkt, d die reelle Gerade und s die reelle Verbindungslinie der zwei imaginären Punkte, welche durch eine elliptische Punktinvolution auf s definirt sind. Durch die Annahme einer beliebigen Tangente c im Punkte C sind zwei Kegelschnitte der Schar bestimmt, welche C, d und die imaginären Doppelpunkte auf s zu Grundelementen hat.

Die Berührungspunkte D und D' beider Kegelschnitte sind dadurch zu finden, dass man auf s dasjenige einzige, **allzeit** reelle Paar conjugirter Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$ der gegebenen Involution aufsucht, welches sowol die Punkte

$$(sd) = \mathfrak{D} \quad \text{und} \quad (sc) = \mathfrak{C}$$

als auch deren resp. conjugirte Punkte $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{C}'$ harmonisch trennt, dasselbe mit C verbindet und die Verbindungslinien mit d zum Durchschnitt bringt.

Es folgt hieraus ohne Weiteres, dass die Berührungspunktpaare D und D' auf d eine Involution — und zwar eine elliptische — beschreiben, wenn durch Drehung der Tangente c um den Punkt C die ganze Kegelschnittschar erzeugt wird.

Sind durch eine bestimmte Tangentenlage c zwei Kegelschnitte der Schar gegeben, so construirt man die Pole Π_1 und Π_2 der Sehne s in Bezug auf dieselben, indem man die Geraden $\mathfrak{D}'D$ und $\mathfrak{D}'D'$ — das sind die Polaren des Punktes $\mathfrak{D}$ — zum Durchschnitt bringt mit $C\mathfrak{C}'$, der Polaren des Punktes $\mathfrak{C}$. Durch diese Durchschnittspunkte Π_1 und Π_2 gehen aber offenbar auch die Verbindungslinien des Schnittpunkts $(cd) = S$ mit $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}$; da nun diese nebst c und d ein harmonisches Büschel bilden, so sind auch die vier Punkte

$$\Pi_1, \quad C, \quad \Pi_2 \quad (\Pi_1 \Pi_2) = S'$$

harmonische Punkte. In ganz gleicher Weise, wie oben, schliessen wir hieraus, dass Π_1 und Π_2 die Polpaare der Sehne s, auf einem Kegelschnitt hingleiten, wenn durch stetige Drehung der Tangente c die Kegelschnittschar erzeugt wird. Wir haben also das Resultat:

„Lässt man eine Kegelschnittschar, deren einzelne Curven direct „durch einen reellen und zwei imaginäre Punkte hindurchgehn, und eine „reelle Gerade berühren, dadurch entstehen, dass man die Tangente „in dem reellen Punkt um diesen dreht, so erhält man unendlich „viel Paare einander zugeordneter, allzeit reeller, in dem reellen „Punkte sich berührender Kegelschnitte, deren Berührungspunktpaare „auf der reellen Geraden eine elliptische Involution bilden. Die „Pole der Verbindungssehne der imaginären Punkte in Bezug auf „sämmtliche conjugirte Kegelschnittpaare bilden eine involutorische „Punktreihe II. Ordnung, deren Träger die Sehne berührt, und in „Bezug auf welche der reell gegebene Punkt der Pol der reellen „Geraden ist.“

Dieser Satz klärt uns über den allgemeinen Ursprung der folgenden beiden Sätze auf:

1) „Die Mittelpunkte aller ähnlichen und ähnlich liegenden Kegel„schnitte, welche durch einen festen Punkt hindurchgehn und eine „feste Gerade berühren, liegen auf einer Parabel, in Bezug auf welche „der feste Punkt der Pol der festen Geraden ist."

2) „Die Mittelpunkte aller Kreise, welche durch einen festen „Punkt hindurchgehn und eine feste Gerade berühren, liegen auf „einer Parabel, für welche der feste Punkt der Brennpunkt, die feste „Gerade die Directrix ist."

Wir sind nun im Stande, mit Hilfe der zuletzt betrachteten Kegelschnittschar die Aufgabe zu lösen: einen Kegelschnitt zu construiren, welcher zwei imaginäre und einen reellen Punkt enthält, ausserdem zwei reelle Gerade berührt.

Wir finden nämlich die Pole der Sehne s in Bezug auf die gesuchten Kegelschnitte und somit diese selbst als Schnittpunkte zweier geometrischer Oerter.

Ist ausser den bereits gegebenen vier Elementen eine Tangente e gegeben, so wissen wir, dass die Pole der Sehne s in Bezug auf alle Kegelschnitte, welche C, d und die imaginären Doppelpunkte auf s enthalten, auf einer Curve k II. Ordnung liegen; weiterhin ist der Ort des Poles der Sehne s in Bezug auf alle Kegelschnitte, welche d und e berühren und durch die imaginären Punkte hindurchgehn, durch zwei Gerade gebildet, welche durch den Schnittpunkt $(de) = \Sigma$ hindurchgehn, d und e harmonisch trennen, zugleich aber auf s ein Paar conjugirter Punkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ fixiren, — also durch ein eindeutig bestimmtes Strahlenpaar.

Die Schnittpunkte desselben mit k sind die Pole der Sehne s in Bezug auf die gesuchten Kegelschnitte; die Anzahl derselben ist also im allgemeinen v i e r.

Es lässt sich aber leicht zeigen, dass zwei derselben stets imaginär sein müssen*). Wir haben gesehen, dass die Strahlen, welche vom Schnittpunkte S der Tangente c mit d nach zwei conjugirten, durch c bestimmten Polen Π_1 und Π_2 hingingen, auf s ein Paar conjugirter Punkte der Involution fixirten, ferner sieht man leicht ein, dass alle conjugirten Punktpaare der Involution auf s von C aus als conjugirte Punktpaare derjenigen Involution auf d projicirt werden, welche dieser Tangente in Bezug auf k zugehört. Hieraus folgt, dass jedes Strahlenpaar $S\Pi_1$ und $S\Pi_2$ Tangentenpaar an die Curve k ist;

---

*) Zu demselben Resultat bin ich durch eine ganz andere Ueberlegung in meiner Inaug.-Diss. gekommen.

ferner, dass jedes Tangentenpaar aus irgend einem Punkte der Tangente d, z. B. aus Σ an k gelegt, auf s ein Paar conjugirter Punkte der Involution X, X' bestimmt. Das Punktpaar $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$ wird aber jedenfalls durch XX' getrennt, also auch das Strahlenpaar $\Sigma\mathfrak{B}$, $\Sigma\mathfrak{B}'$ durch ΣX, $\Sigma X'$; es kann mithin nur ein Strahl des ersteren die Curve k in reellen Punkten treffen, welche die Pole der Sehne s in Bezug auf die gesuchten beiden Kegelschnitte sind. **Fällt jedoch** $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ mit X resp. X' zusammen, so haben wir vier **Lösungen**, von denen je zwei zusammenfallen.

Jena, den 29. Juni 1882.

XVIII.

Die Cochleoïde.

Von

C. Falkenburg,

Maschinenbau-Ingenieur der Actiengesellschaft Atlas zu Amsterdam.

Verfasser dieses Aufsatzes hat neulich, indem er beschäftigt war, sich die Vorgänge einer von ihm erfundenen Steuerungsconstruction für Dampfmaschinen durch eine mathematische Vorstellung derselben klar zu machen, eine Linie entdeckt, welche besonders merkwürdige Eigenschaften zeigt, und sich durch eine schneckenartige Gestalt charakterisirt.

Er hat sie daher die Cochleoïde genannt, von cochlea = Schneckenhaus.

In seiner Steuerung kommen nämlich zwei Dampfschieber vor, welche von Excentern bewegt werden.

Diese Excenter haben aber nicht wie gewöhnlich dieselben Winkelgeschwindigkeiten, sondern es macht das eine die doppelte Anzahl Touren des andern in derselben Zeit.

Um sich nun die gegenseitige Bewegung dieser Excenter graphisch zu veranschaulichen in einem Schieberdiagramm, machte er Gebrauch von dem aus der niederen Geometrie bekannten Satz, dass ein Winkel an der Peripherie eines Kreises halb so gross ist als der entsprechende Centriwinkel, und es entstand dadurch das Diagramm Fig. 1. OK_h sei die Todlage der Kurbel, O das Schwungradwellenmittel, OE die Excentricität des langsam gehenden Excenters, welches sich mit der Schwungradwelle dreht, und O_1E die des zweimal

so schnell gehenden Excenters; derart dass $OO_1 = O_1E$; so ist für jede beliebige Kurbelstellung OK, welche den Winkel α mit der ursprünglichen Todlage OK_h macht, der Winkel $E_1O_1K_h = 2\alpha$. Es erschien ihm nun, durch Annahme verschiedener Grössen von O_1O, derart dass die Excenterkreise EE_1O immer die Linie OY berührten, eine Reihe von Punkten, welche ihn auf die Existenz einer Linie schliessen liess, welche durch folgende Definitionen bestimmt wird: Fig. 2. Die Spitze O eines gleichschenkligen Dreiecks OAB durchläuft die Y Axe, während der Punkt A seiner Basis fest liegen bleibt, und der andere Schenkel OB stets mit AY einen Winkel bildet, der mit der Länge AO umgekehrt proportional ist. Der Punkt B beschreibt die Cochleoïde, wovon die Gleichung auf Polarcoordinaten lautet:

$$\varrho\varphi = \pi r \sin\varphi$$

und auf rechtwinklige Coordinaten

$$(x^2 + y^2) \operatorname{arc tg} \frac{y}{x} = \pi r y,$$

wenn man mit r die halbe Entfernung von A aus bezeichnet, wo die Curve zum ersten Male durch die Y Axe geht.

Beweis.

Es sei gegeben (Fig. 2.) $OA = p \times$ mal den Radius des Kreises r, wofür der Centriwinkel $BOA = 180^0 = \pi$ wird, so ist, weil $OA = pr$, der Winkel $AOB = \frac{\pi}{p}$, da sich die Winkel mit den Schenkeln umgekehrt proportional verhalten. Nennt man nun $AD = \varrho$ und Wkl. $DAX = \varphi$, so ist $CD = 2pr = AC$ und hat man:

$$\text{Wkl. } ACD = 2\, DAX$$

oder:

$$\frac{\pi}{2p} = 2\varphi$$

also

$$\varphi = \frac{\pi}{4p},$$

daher

$$\sin\varphi = \sin\frac{\pi}{4p} = \frac{AE}{AC} = \frac{\frac{\varrho}{2}}{2pr} = \frac{\varrho}{4pr}$$

woraus folgt

$$\sin\varphi = \frac{\varrho}{r} \times \frac{\varphi}{\pi}$$

oder

$$\varrho\varphi = \pi r \sin\varphi \tag{1}$$

Hierin für Transformation auf rechtwinklige Coordinaten

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

und

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

gesetzt, wird

$$\sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

und wird also die Gleichung auf rechtwinklige Coordinaten durch Substitution obiger Werte in die Polargleichung:

$$(x^2 + y^2)\operatorname{arc\,tg}\frac{g}{x} = \pi r y.$$

Es folgen hieraus mehrere merkwürdige Eigenschaften:

Für $\varphi = 0$ wird, weil $\varrho = \pi r \frac{\sin\varphi}{\varphi}$ und $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ für $\varphi = 0$ den Grenzwert 1 erhält, $\varrho = \pi r$; das heisst:

Für $\varphi = 0$ rectificirt der Radiusvector die halbe Peripherie des Kreises, welcher mit r beschrieben ist.

Die mittlere Proportionale zwischen diesem Radiusvector πr und dem Radius r des angenommenen Kreises ist also die Seite des Quadrats, dessen Inhalt gleich dem Inhalte dieses Kreises. Wenn also (Fig. 2.) $OA = r$, so ist

$$PA = \pi r$$

und

$$AQ = r\sqrt{\pi}.$$

Jeder andere beliebige Punkt C, D, E u. s. w. ist nun leicht mittels der gefundenen Gleichung zu construiren.

Es folgt nun ebenfalls daraus:

für	$\varphi = 30^0$	ist	$\varrho = 3r = AC$
„	$\varphi = 90^0 = \frac{\pi}{2}$	„	$\varrho = 2r = AB$
„	$\varphi = 180^0 = \pi$	„	$\varrho = 0 \quad = A$
„	$\varphi = 270^0 = \frac{3\pi}{2}$	„	$\varrho = \frac{1}{3} \quad = AM$
„	$\varphi = 360^0 = 2\pi$	„	$\varrho = 0 \quad = A$
„	$\varphi = 450^0 = \frac{5\pi}{2}$	„	$\varrho = \frac{1}{5} \quad = AN$

$$\begin{array}{lllll} \text{für} & \varphi = 540^0 = 3\pi & \text{ist} & \varrho = 0 = A & \\ ,, & \varphi = 630^0 = \frac{7\pi}{2} & ,, & \varrho = \frac{1}{7} = AR & \\ ,, & \varphi = 720^0 = 4\pi & ,, & \varrho = 0 = A & \\ ,, & \varphi = 810^0 = \frac{9\pi}{2} & ,, & \varrho = \frac{1}{9} = AS & \text{u. s. w.} \end{array}$$

Die Entfernungen AB, AM, AN, AR, AS u. s. w., in denen die Cochleoïde durch die Y Axe geht, bilden also eine Reihe, welche ausgedrückt wird durch die Bruchzahlen

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9} \text{ u. s. w.} = \frac{1}{1}, \frac{1}{1+2}, \frac{1}{1+2\times 2}, \frac{1}{1+3\times 2}, \frac{1}{1+4\times 2} \text{ u. s. w.}$$

Aus der Gleichung der Curve findet man:

$$\varrho = \pi r \frac{\sin\varphi}{\varphi}$$

und substituirt man hierin für φ die Werte α, $\alpha+\pi$, $\alpha+2\pi$, $\alpha+3\pi$, $\alpha+4\pi$, so bilden die hinter einander folgenden Werte von φ eine Reihe, welche mit abwechselnden Zeichen $+$ und $-$ versehen ist, deren Glieder aber die Reciproken einer arithmetischen Reihe enthalten.

Bedenkt man nun, dass die negativen Werte derart ausfallen, dass dieselben mit den positiven in Wirklichkeit immer an nur einer Seite des Ursprungs zu liegen kommen, so ist es klar, dass jeder Radiusvector der Cochleoïde von der Curve selbst derart geschnitten wird, dass die Stücke desselben eine harmonische, divergente Reihe bilden.

Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $1\frac{1}{2}\pi$, $2\frac{1}{2}\pi$ u. s. w. fanden wir schon die Reihe 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$ u. s. w.

Die Curve hat zwei asymptotische Punkte, nämlich P für $\varphi = 0$, und A für $\varphi = \infty$.

Gleichzeitig aber ist A auch ein Berührungspunkt unendlichster Ordnung, denn es passirt die Curve denselben eine unendliche Anzahl Male, während sie die X Axe berührt.

Vermittels der Cochleoïde lässt sich auch der $n$te Teil eines beliebigen Winkels α construiren.

Es kommt bei dieser Frage erst darauf an, den Eckpunkt des Winkels α derart auf AH zu stellen, dass von beiden Schenkeln durch

die Cochleoïde gleiche Stücke abgeschnitten werden, während einer der beiden Schenkel auf AH liegen bleibt; sei FKA z. B. der Winkel α, so muss $KA = KF$ werden.

Ist also (Fig. 2.) $\frac{\pi}{p} = \alpha$, so wird $\varphi = \frac{\pi}{4p} = \frac{\alpha}{4}$; d. h.

Ist die Cochleoïde gegeben, so mache man Wkl. $DAP = \frac{\alpha}{4}$ (Fig. 3.) und beschreibe darauf ein gleichschenkliges Dreieck ADI; wodurch $AID = \frac{\alpha}{2}$ wird. Nimmt man nun $AK = \frac{1}{2}AI$ und zieht KF, wo ID die Cochleoïde schneidet, so ist gleichzeitig $AK = KF$ und Wkl. $AKF = \alpha$.

Verlangt man nun den $n$ten Teil des Winkels α, so nehme man $AH = n \times AK$, beschreibe mit $HA = HC$ einen Kreisbogen HC, und ziehe HC, so ist Wkl. $AHC = \frac{\alpha}{n}$.

Aus der Gleichung sowol als selbstverständlich aus der Figur folgt noch eine andere Definition:

Eine unendliche Anzahl Kreise berühren eine Gerade AX in demselben Punkt A. Man nimmt von A aus auf jedem dieser Kreise einen Bogen von constanter Länge πr. Der geometrische Ort der in dieser Weise erhaltenen Punkte ist $\varrho\varphi = \pi r \sin\varphi$.

Beschreiben wir nämlich aus I als Mittelpunkt einen Kreis mit IA als Radius; dieser Kreis geht durch D. Da nun IA dem Winkel AID umgekehrt proportional ist, ist auch die Länge des Bogens CD constant.

Fig. 4. M sei ein Punkt der Cochleoïde. Ziehen wir $OM' =$ und parallel mit NM, so beschreibt M' eine hyperbolische Spirale; denn die Winkelgeschwindigkeit des Radius OM' ist der Geschwindigkeit des Punktes M' auf dieser Geraden umgekehrt proportional. Aber $MM' = OM'$, woher eine neue Definition der Cochleoïde:

„Ein Punkt M' beschreibt eine hyperbolische Spirale; zieht man MM' = dem Radiusvector OM' und parallel mit OY, so ist der geometrische Ort des Punktes M die Cochleoïde."

Ferner: Verlängern wir ON um $NS = OM$ und ziehen SM, so ist, weil $NM = OS - ON$, der Winkel $OSM = \frac{1}{2}ONM$ und $OMS = \frac{\pi}{2}$. Daher ist SM eine der Lagen des Schenkels NM des veränderlichen

gleichschenkligen Dreiecks, und macht man also $SP = SO$, so ist P ein Punkt der Cochleoïde. Hieraus leitet man ab:

„Ist OSP das veränderliche gleichschenklige Dreieck, dessen Punkt P die Cochleoïde beschreibt, so gehört auch die Projection M des Punktes O auf dem Schenkel SP zu derselben Curve."

Die Umhüllungscurve.

Fig. 4. Der veränderliche Schenkel NM oder SP hat eine Umhüllungscurve (enveloppe), die wir vorläufig mit (K) bezeichnen wollen. Da nun M die Projection von O auf eine Tangente an (K) ist, kann man sagen:

„Die Cochleoïde ist die Pedale oder Fusslinie des Poles O mit Beziehung zu (K)", oder auch noch:

„Die Umhüllungscurve (enveloppe) des drehenden Schenkels NM ist die Antipedale von O bezüglich der Cochleoïde selbst."

Wir suchen jetzt die Gleichung von (K). (Fig. 3.).

Setzen wir Wkl. $AID = \alpha$, den Bogen $AD = OP = \pi r$, so haben wir $AI \times \alpha = \pi r$ oder $AI = \frac{\pi r}{\alpha}$.

Die Gleichung von ID wird sein

$$y = x \operatorname{tg} DIA + OI = -x \operatorname{cotg} \alpha + \frac{\pi r}{\alpha} \tag{1}$$

Differentiiren wir (1) bezüglich α, so kommt:

$$\frac{x}{\sin^2\alpha} - \frac{\pi r}{\alpha^2} = 0 \quad \text{oder} \quad x(1 + \operatorname{cotg}^2\alpha) - \frac{\pi r}{\alpha^2} = 0 \tag{2}$$

Aus (1) folgt:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\frac{\pi r}{\alpha} - y}{x},$$

welchen Wert wir in (2) substituiren; das gibt:

$$x\left(1 + \frac{(\pi r - \alpha y)^2}{\alpha^2 x^2}\right) - \frac{\pi r}{\alpha^2} = 0$$

oder

$$\alpha^2(x^2 + y^2) - 2\pi r \alpha y + \pi^2 r^2 - \pi r x = 0,$$

woraus:

$$\alpha = \frac{\pi r y \pm \sqrt{\pi r x(x^2 + y^2 - \pi r x)}}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\pi r y \mp \sqrt{\pi r x(x^2 + y^2 - \pi r x)}}{\pi r(\pi r - x)}$$

Die Gleichung (1) führt jetzt zur Gleichung von (K):

$$y + x \operatorname{cotg} \frac{\pi r y \pm \sqrt{\pi r x(x^2 + y^2 - \pi r x)}}{x^2 + y^2} = \frac{\pi r y \mp \sqrt{\pi r x(x^2 + y^2 - \pi r x)}}{\pi r - x}$$

oder

$$x \operatorname{cotg} \frac{\pi r y \pm \sqrt{\pi r x(x^2 + y^2 - \pi r x)}}{\pi^2 r^2 + y^2} = \frac{x y \mp \sqrt{\pi r x(x^2 + y^2 - \pi r x)}}{\pi r - x}$$

$$\frac{\pi r y \pm \sqrt{\pi r x(x^2 + y^2 - \pi r x)}}{x^2 + y^2} = \operatorname{arc\,cotg} \frac{x y \mp \sqrt{\pi r x(x^2 + y^2 - \pi r x)}}{x(\pi r - x)} =$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x(\pi r - x)}{x y \mp \sqrt{\pi r x(x^2 + y^2 - \pi r x)}} =$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x(x y \pm \sqrt{\pi r x(x^2 + y^2 - \pi r x)})}{\pi r(x^2 + y^2)}.$$

Die gesuchte Gleichung ist daher in ihrer einfachsten Form:

$$\pi r y \pm \sqrt{\pi r x(x^2 + y^2 - \pi r x)} = (x^2 + y^2) \operatorname{arc\,tg} \frac{x(x y \mp \sqrt{\pi r x(x^2 + y^2 - \pi r x)})}{\pi r(x^2 + y^2)}$$

oder

$$\operatorname{cotg} \frac{\pi r y \mp \sqrt{\pi r x(x^2 + y^2 - \pi r x)}}{x^2 + y^2} = \frac{x y \pm \sqrt{\pi r x(x^2 + y^2 - \pi r x)}}{x(\pi r - x)}.$$

Die Gleichung (2) führt zur Bestimmung des Berührungspunktes der Geraden NM mit der Umhüllungscurve (enveloppe). Man hat (Fig. 5.)

$$x = \frac{\pi r \sin^2 \alpha}{\alpha^2},$$

aber

$$\alpha = \frac{\pi r}{ON},$$

daher

$$x = \frac{\overline{ON}^2 \sin^2 \alpha}{\pi r} = \frac{\overline{NM}^2 \sin^2 \alpha}{\pi r} = \frac{\overline{MH}^2}{OB}$$

Nun ist MH senkr. auf OY, MF senkr. auf OX und OG die Abscisse des Berührungspunktes von MN mit (K), man hat also:

$$OE^2 = OG \times OB$$

woraus folgt:

Beschreibe man auf OB als Durchmesser einen Kreis, ziehe die Ordinate ME, beschreibe aus O als Mittelpunkt mit OE einen Kreisbogen EF, ziehe FGI senkr. auf OX, so ist I der gesuchte Punkt.

Die Construction der Tangente an die Cochleoïde und des Berührungspunktes des drehenden Schenkels mit dessen Umhüllungscurve (K).

Es führen uns sehr einfache kinematische Betrachtungen zur Construction der Tangente an die Cochleoïde und des oben genannten Berührungspunktes.

Man hat

$$ON \times \alpha = \pi r$$

woraus

$$\alpha \frac{dON}{dt} + ON \frac{d\alpha}{dt} = 0.$$

Aber $\frac{dON}{dt}$ ist die Geschwindigkeit von N auf OY, $ON \frac{d\alpha}{dt}$ ist die Geschwindigkeit des Punktes M, als auf NM fest liegend betrachtet während der Rotation von NM um N, die Gleichung wird also zurückgeführt auf $\alpha \times$ Geschw. von $N +$ Geschw. von M auf

$$NM = O\left(\alpha = \frac{\pi r}{ON}\right)$$

oder

$$\frac{\text{Geschw. von } N}{ON} + \frac{\text{Geschw. von } M \text{ auf } NM}{\pi r} = 0.$$

Fig. 6. Stellt man die erste dieser beiden Geschwindigkeiten durch ON vor, so wird die zweite durch MO senkr. auf NM und $= \pi r$ bezeichnet. Unter dieser Voraussetzung hat der Punkt M gleichsam eine Geschwindigkeit, welche als die Resultante der 3 nachfolgenden Geschwindigkeiten zu betrachten ist:

1. Eine Geschwindigkeit, welche durch $MW =$ und parallel NO wird vorgestellt, als herkünftig von der gleitenden Bewegung von N auf OY,

2. Eine Geschwindigkeit, welche durch MQ senkr. auf MN und $= \pi r = OB$ wird vorgestellt, und herrührt von der Rotation von NM,

3. Eine Geschwindigkeit vorgestellt durch MN, entstehend aus der gleitenden Bewegung von M auf MN derart, dass $MN = NO$. Die Resultante der Geschwindigkeiten MN und MW wird MO. Die von MO und MQ ist MU, wenn $OU =$ und parallel MQ. Hieraus folgt die höchst einfache Regel:

Um die Tangente an einen Punkt M der Cochleoïde zu construiren, ziehe man OU senkr. auf MN und $= OB = \pi r$; ziehe ferner MU so wird diese die Tangente sein.

Es sei jetzt der Berührungspunkt der Umhüllungscurve von NM mit dieser letzten zu bestimmen.

Hierzu suchen wir das Centrum der momentanen Drehung der veränderlichen Geraden MN. Da der Punkt N die Gerade OY durchläuft, ist die Normale zu seiner Trajectorie NZ senkr. auf OY.

Bliebe NM constant, so würde die Tangente zur Trajectorie von M die Richtung derjenigen Geschwindigkeit sein, welche aus den Geschwindigkeiten MW und MQ resultirt. Drehen wir diese beiden Geschwindigkeiten um $\frac{\pi}{2}$ um M, so wird MW die Lage MW' senkr. auf OX, und OQ die Lage OQ' einnehmen.

Ziehen wir $Q'L =$ und senkr. auf MW' und ziehen ML, so ist diese die Normale zur Curve von M beschrieben unter der Voraussetzung, dass M fest liegen bleibt auf WM während der Rotation dieser Geraden WM.

Der Schnittpunkt von NZ und ML wird also das momentane Centrum der Drehung der Geraden NM sein; die Projection von D auf MN daher der Berührungspunkt von MN mit der Umhüllungscurve dieser veränderlichen Geraden. Daher die folgende Regel:

Man nehme auf MN, $MQ' = \pi r = OB$, ziehe $Q'L$ parall. OX und $= MW = ON$, ziehe ML, so schneidet diese die Linie NZ parall. OB in einem Punkte D, welcher, projicirt auf MN den Punkt P als Berührungspunkt der augenblicklichen Schenkelstellung MN mit ihrer Umhüllungscurve (K) gibt.

Amsterdam am 25. März 1883.

XIX.

Neue Methode zur Berechnung der Excentricität bei astronomischen Instrumenten und Uhren.

Von

Franz Carl Lukas in Wien.

I.

Es stelle LL' die Alhidade des zu untersuchenden Instrumentes vor; ferner sei die Teilung des Ablesungskreises von c aus vorgenommen, während die Drehung der Alhidade im Punkte c_1 erfolge.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Punktes c_1 mit

$$\left.\begin{array}{l} x = \zeta \\ y = v \end{array}\right\} \qquad 1)$$

und beziehen alle Berechnungen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem in c, bei welchem der Bequemlichkeit halber die x-Axe mit dem Nullpunkte der Teilung zusammenfällt, so wäre die Lösung der Aufgabe dann gegeben, wenn die Werte ζ und v und eventuell der Abstand cc_1 gefunden ist.

Nun sind wir in der Lage, die Winkel xcL und xcL' der Alhidade abzulesen und seien diese Winkel in verschiedenen Lagen der Alhidade LL' mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots \sigma_n$ am oberen Ende L und mit $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3', \ldots \sigma_n'$ am unteren Ende L' bezeichnet. Dadurch, dass diese Winkel bekannt, ist es ermöglicht, die Coordinaten der Punkte m und m' in verschiedenen Lagen der Alhidade in Bezug auf das Centrum in c anzugeben, so dass sich aus der Figur folgende Gleichungen ergeben würden.

Für das obere Ende L der Alhidade:

Punkt m_1 $$\left.\begin{aligned} x_1 &= r.\cos\sigma_1 \\ y_1 &= r.\sin\sigma_1 \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Punkt m_2 $$\left.\begin{aligned} x_2 &= r.\cos\sigma_2 \\ y_2 &= r.\sin\sigma_2 \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

. . . .

Punkt m_n $$\left.\begin{aligned} x_n &= r.\cos\sigma_n \\ y_n &= r.\sin\sigma_n \end{aligned}\right\} \quad 4)$$

Für das untere Ende L' der Alhidade:

Punkt m_1' $$\left.\begin{aligned} x_1' &= r.\cos\sigma_1' \\ y_1' &= r.\sin\sigma_1' \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

Punkt m_2' $$\left.\begin{aligned} x_2' &= r.\cos\sigma_2' \\ y_2' &= r.\sin\sigma_2' \end{aligned}\right\} \quad 6)$$

. . . .

Punkt m_n' $$\left.\begin{aligned} x_n' &= r.\cos\sigma_n' \\ y_n' &= r.\sin\sigma_n' \end{aligned}\right\} \quad 7)$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Punkte m_1, m_2, m_3, m_4, ... m_n die Stellen bezeichnen, wo der obere Teil der Alhidade des Instrumentes den Kreis (Teilkreis) des Instrumentes trifft, ebenso wie dies in den Punkten m_1', m_2', m_3', m_4', ... m_n' von dem unteren Teile der Alhidade geschehen würde.

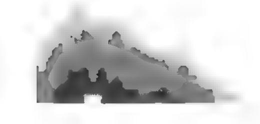
Der Radius des Teilkreises in c ist mit r angenommen, so dass

$$c_1m_1 = cm_2 = cm_3 = \ldots = cm_n = r \quad 8)$$

$$c_1m_1' = cm_2' = cm_3' = \ldots = cm_n' = r \quad 9)$$

ist. Da die Lagen der Punkte m_1, m_2, m_3, m_4, ... m_n, wie auch der zugeordneten Punkte m_1', m_2', m_3', m_4', ... m_n' in Bezug auf das der Berechnung zu Grunde gelegte Axensystem bekannt sind, so ist es ein Leichtes, die Alhidaden in den verschiedenen Lagen darzustellen, da man blos die Gleichungen der Linien m_1m_1', m_2m_2', m_3m_3', m_4m_4', ... m_nm_n' zu bestimmen hat, für welche man aus den Formen 2) bis 10) erhält:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Linie } m_1m_1' \quad y - y_1 = \frac{y_1 - y_1'}{x_1 - x_1'}(x - x_1) \\ &\text{Linie } m_2m_2' \quad y - y_2 = \frac{y_2 - y_2'}{x_2 - x_2'}(x - x_2) \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\text{Linie } m_nm_n' \quad y - y_n = \frac{y_n - y_n'}{x_n - x_n'}(x - x_n) \end{aligned}\right\} \quad 10)$$



Setzt man:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{y_1 - y_1'}{x_1 - x_1'} \\ a_2 &= \frac{y_2 - y_2'}{x_2 - x_2'} \\ &\;\cdots\cdots \\ a_n &= \frac{y_n - y_n'}{x_n - x_n'} \end{aligned}\right\} \quad 11)$$

und daher:

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= y_1 - a_1x_1 = y_1' - a_1x_1' \\ b_2 &= y_2 - a_2x_2 = y_2' - a_2x_2' \\ &\;\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_n &= y_n - a_nx_n = y_n - a_nx_n' \end{aligned}\right\} \quad 12)$$

so kann man die Gleichungen in 10) auch so schreiben:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Linie } m_1m_1' && y = a_1x + b_1 \\ &\text{Linie } m_2m_2' && y = a_2x + b_2 \\ & && \cdots\cdots \\ &\text{Linie } m_nm_n' && y = a_nx + b_n \end{aligned}\right\} \quad 13)$$

Von der Richtigkeit kann man sich durch Vergleichung der Werte überzeugen; übrigens braucht man bei der Form 12) nur zu bedenken, dass die Punkte m_1, m_2, m_3, m_4, ... m_n, wie auch die Punkte m_1, m_2, m_3, m_4, ... m_n' Punkte der betreffenden Linien m_1m_1', m_2m_2', m_3m_3', m_4m_4', ... m_nm_n' sind.

Um die Coordinaten des Punktes c zu erhalten, hätte man sämmtliche in 13) zum Durchschnitte zu bringen, was am besten mit Hilfe der Gauss'schen Methode der kleinsten Quadrate geschieht, wonach man erhält:

$$\left.\begin{aligned} x \sum_{n=n}^{n=1} [a_n^2] + \sum_{n=n}^{n=1} [a_nb_n] &= y \sum_{n=n}^{n=1} [a_n] \\ x \sum_{n=1}^{n=1} [a_n] + \sum_{n=n}^{n=1} [b_n] &= y \,.\, n \end{aligned}\right\} \quad 14)$$

Aus diesen zwei Gleichungen erhalten wir für die Werte ζ und v demnach:

$$x = \zeta = \frac{n \sum\limits_{n=n}^{n=1} [a_nb_n] - \sum\limits_{n=n}^{n=1} [a_n] \sum\limits_{n=n}^{n=1} [b_n]}{\sum\limits_{n=n}^{n=1}{}^2 [a_n] - n \sum\limits_{n=n}^{n=1} [a_n^2]} \quad 15)$$

$$y = v = \frac{\sum\limits_{n=n}^{n=1}[a_n]\sum\limits_{n=n}^{n=1}[a_n b_n] - \sum\limits_{n=n}^{n=1}[a_n^2]\sum\limits_{n=n}^{n=1}[b_n]}{\sum\limits_{n=n}^{n=1}{}^2[a_n] - n\sum\limits_{n=n}^{n=1}[a_n^2]} \qquad 15)$$

wobei

$$\sum\limits_{n=n}^{n=1}{}^2[a_n] = \sum\limits_{n=n}^{n=1}[a_n]\sum\limits_{n=n}^{n=1}[a_n] \qquad 16)$$

zu nehmen ist.

Nennt man den Abstand $cc_1 = \varrho$, so hat man zu dessen Bestimmung die Formel

$$\varrho = \sqrt{\zeta^2 + v^2} \qquad 17)$$

wodurch die Lage des Punktes c in Bezug auf den Mittelpunkt des Teilungskreises vollkommen bestimmt erscheint.

II.

Diese hier dargestellten Werte ζ und v können noch in anderer Weise bestimmt werden, wenn man nämlich bedenkt, dass die Bedingung, der Punkt c gehöre der Alhidade LL' in den verschiedenen Lagen an, durch folgende Gleichungen gegeben sind:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{v-y_1}{\zeta-x_1} &= \frac{v-y_1'}{\zeta-x_1'} = \frac{y_1-y_1'}{x_1-x_1'} = a_1 \\
\frac{v-y_2}{\zeta-x_2} &= \frac{v-y_2'}{\zeta-x_2'} = \frac{y_2-y_2'}{x_2-x_2'} = a_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{v-y_n}{\zeta-x_n} &= \frac{v-y_n'}{\zeta-x_n'} = \frac{y_n-y_n'}{x_n-x_n'} = a_n
\end{aligned}\right\} \qquad 18)$$

Durch Wegschaffung der Nenner dieser Gleichungen erhält man weiter folgende mit 18) identische Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(x_1-x_1')v-(y_1-y_1')\zeta &= y_1(x_1-x_1')-x_1(y_1-y_1') \\
&= y_1'(x_1-x_1')-x_1'(y_1-y_1') = x_1y_1'-y_1x_1' \\
(x_2-x_2')v-(y_2-y_2')\zeta &= y_2(x_2-x_2')-x_2(y_2-y_2') \\
&= y_2'(x_2-x_2')-x_2'(y_2-y_2') = x_2y_2'-y_2x_2' \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(x_n-x_n')v-(y_n-y_n')\zeta &= y_n(x_n-x_n')-x_n(y_n-y_n') \\
&= y_n'(x_n-x_n')-x_n'(y_n-y_n') = x_ny_n'-y_nx_n'
\end{aligned} \qquad 19)$$

Obwohl in Form 19) die von ζ und v freien Glieder vollkommen einander gleich sind, wie man sich durch Auflösung leicht überzeugen kann, so soll für die weitere Berechnung doch nur das letzte von ζ und v freie Glied zur weiteren Entwicklung benutzt werden. Die Bestimmung der Werte ζ und v geschieht auch hier wieder am besten nach der Methode der kleinsten Quadrate, wonach man wieder erhielte:

$$v \sum_{n=n}^{n=1}[(x_n - x_n')^2] - \zeta \sum_{n=n}^{n=1}[(x_n - x_n')(y_n - y_n')] = \sum_{n=n}^{n=1}[(x_n - x_n')(x_n y_n' - y_n x_n')]$$

$$v \sum_{n=n}^{n=1}[(x_n - x_n')(y_n - y_n')] - \zeta \sum_{n=n}^{n=1}[(y_n - y_n')^2] = \sum_{n=n}^{n=1}[(y_n - y_n')(x_n y_n' - y_n x_n')] \quad 20)$$

Setzt man zur Bequemlichkeit bei der Berechnung:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{n=n}^{n=1}[(x_n - x_n')^2] &= m \\
\sum_{n=n}^{n=1}[(x_n - x_n')(y_n - y_n')] &= n \\
\sum_{n=n}^{n=1}[(y_n - y_n')^2] &= p \\
\sum_{n=n}^{n=1}[(x_n - x_n')(x_n y_n' - y_n x_n')] &= q \\
\sum_{n=n}^{n=1}[(y_n - y_n')(x_n y_n' - y_n x_n')] &= s
\end{aligned}\right\} \quad 21)$$

so lassen sich die Formen in 20) kürzer schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
mv - n\zeta &= q \\
nv - p\zeta &= s
\end{aligned}\right\} \quad 22)$$

woraus man endlich die Werte

$$\left.\begin{aligned}
v &= \frac{pq - ns}{mp - n^2} \\
\zeta &= \frac{nq - ms}{mp - n^2}
\end{aligned}\right\} \quad 23)$$

erhält.

Diese Werte unterscheiden sich von jenen in 15) nur durch die Darstellung, sind aber mit denselben identisch; ebenso wie die Gleichungen in 19) mit jenen in 13) in naher Beziehung stehen, wie sich leicht zeigen lässt.

III.

Bei den in I. und II. entwickelten Methoden wurde vorausgesetzt, dass sowohl eine Ablesung in L, wie in L' möglich sei. Bei Uhren, wo selbst für den Fall, wo der Secundenzeiger, dessen Excentricität man eben bestimmen will, in L und L' gleichzeitig eingestellt und abgelesen werden kann, diese Ablesung in Folge der raschen Bewegung des betreffenden Secundenzeigers jedoch nicht L und L', sondern nur in einem der beiden Punkte möglich erscheint, ist es am besten, den Secundenschlag hierzu zu benutzen, d. h. man nimmt die Lagen der Secundenschläge 0, 1, 2, 3, ... 29 als zugeordnete zu jenen von 30, 31, 32, ... 59 an, indem man erstere als Ablesungen in L, letztere als fingirte in L' betrachtet.

Wirft man die Frage auf, ob es besser sei, bei der Berechnung der Excentricität die Methode in I. oder jene in II. zu wählen, so wird man sich für die Methode in I. schon deshalb entscheiden müssen, weil die Berechnung der Werte von b (siehe Form 15)) schon einen Anhaltspunkt für die Genauigkeit der Ablesungen der Winkel $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots \sigma_n$ und $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3', \ldots \sigma_n'$ giebt, indem die Werte b ein Steigen oder Fallen vom Positiven ins Negative ergeben müssen, widrigenfalls die gemachten Voraussetzungen nicht zutreffen.

Es kann nämlich folgendes der Fall sein:

1) Die Alhidade ist statt einer geraden Linie eine in c_1 oder einem anderen Punkte gebogene. (Bei der Uhr wäre die Voraussetzung des gleichmässigen Secundenschlages irrig.)

2) Die Excentricität könnte eine mehrfach veränderliche sein, insbesondere dann, wenn mehrere Hülsen sich im Mittelpunkte bewegen.

3) Das Instrument enthält unberücksichtigt gebliebene Teilungsfehler.

Im Falle 3) wäre einfach vor der Rechnung eine Correctur der Werte $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \ldots \sigma_n$ und $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3', \sigma_4', \ldots \sigma_n'$ vorzunehmen. Im Falle 1) und 2) müsste man sich mit der „gefundenen mittleren Excentricität" begnügen, wenn man es nicht vorziehen wollte, eine genauere und eingehendere Untersuchung mit Rücksicht auf die gegebenen Verhältnisse vorzunehmen, worüber ein andermal abgehandelt werden soll.

Diese hier gegebene Methode erlaubt für den Fall, wo sich am Instrumente eine zweite Alhidade $L''L'''$ befindet, die senkrecht auf der ersteren LL' steht, eine neue Controlle; für die Bestimmung bei Uhren müsste wieder der Secundenschlag massgebend sein.

Setzt man voraus (siehe Figur), die Alhidade $L''L'''$ ergebe bei der Ablesung in den Punkten m'', m''' die Werte σ'' und σ''', so ergiebt sich nach Analogie der früheren Punkte m und m' folgendes System aus den Ablesungen in L'':

$$\text{Punkt } m_1'' \qquad \left.\begin{aligned} x_1'' &= r \cdot \cos \sigma_1'' \\ y_1'' &= r \cdot \sin \sigma_1'' \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$\text{Punkt } m_2'' \qquad \left.\begin{aligned} x_2'' &= r \cdot \cos \sigma_2'' \\ y_2'' &= r \cdot \sin \sigma_2'' \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{Punkt } m_n'' \qquad \left.\begin{aligned} x_n'' &= r \cdot \cos \sigma_n'' \\ y_n'' &= r \cdot \sin \sigma_n'' \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

und ebenso für die Ablesungen in L''':

$$\text{Punkt } m_1''' \qquad \left.\begin{aligned} x_1''' &= r \cdot \cos \sigma_1''' \\ y_1''' &= r \cdot \sin \sigma_1''' \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$\text{Punkt } m_2''' \qquad \left.\begin{aligned} x_2''' &= r \cdot \cos \sigma_2''' \\ y_2''' &= r \cdot \sin \sigma_2''' \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{Punkt } m_n''' \qquad \left.\begin{aligned} x_n''' &= r \cdot \cos \sigma_n''' \\ y_n''' &= r \cdot \sin \sigma_n''' \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Für die Visurlinien erhielte man nach Form 10):

$$\left.\begin{aligned} &\text{Linie } m_1''m_1''' \qquad y - y_1'' = \frac{y_1'' - y_1'''}{x_1'' - x_1'''}(x - x_1'') \\ &\text{Linie } m_2''m_2''' \qquad y - y_2'' = \frac{y_2'' - y_2'''}{x_2'' - x_2'''}(x - x_2'') \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\text{Linie } m_n''m_n''' \qquad y - y_n'' = \frac{y_n'' - y_n'''}{x_n'' - x_n'''}(x - x_n'') \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

oder falls man wieder

$$\left.\begin{aligned} a_1' &= \frac{y_1'' - y_1'''}{x_1'' - x_1'''} \\ a_2' &= \frac{y_2'' - y_2'''}{x_2'' - x_2'''} \\ &\cdots\cdots \\ a_n' &= \frac{y_n'' - y_n'''}{x_n'' - x_n'''} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

und daher

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = y_1'' - a_1'x_1'' = y_1''' - a_1'x_1''' \\ b_2 = y_2'' - a_2'x_2'' = y_2''' - a_2'x_2''' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_n = y_n'' - a_n'x_n'' = y_n''' - a_n'x_n''' \end{array}\right\} \quad 32)$$

setzt, für die Gleichungen in 30) folgende Schreibweisen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Linie } m_1''m_1''' & y = a_1'x + b_1' \\ \text{Linie } m_2''m_2''' & y = a_2'x + b_2' \\ & \dots\dots \\ \text{Linie } m_n''m_n''' & y = a_n'x + b_n' \end{array}\right\} \quad 33)$$

Bei diesen hier gegebenen Gleichungen, wie auch bei jenen in 2) bis 13) gegebenen, wird man nicht die Werte $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$, $\sigma_1', \sigma_2', \dots \sigma_n'$, $\sigma_1'', \sigma_2'', \dots \sigma_n''$, $\sigma_1''', \sigma_2''', \dots \sigma_n'''$, sondern die entsprechenden verbesserten Werte $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_n$, $\varrho_1', \varrho_2', \dots \varrho_n'$, $\varrho_1'', \varrho_2'', \dots \varrho_n''$, $\varrho_1''', \varrho_2''', \dots \varrho_n'''$ benutzen, wenn man eine solche Correctur anzubringen wünscht.

Da LL' und $L''L'''$ aufeinander senkrecht stehen, so müssen die Gleichungen in 14) und 38) folgenden Bedingungen entsprechen:

$$\left.\begin{array}{l} a_1a_1' = -1 \\ a_2a_2' = -1 \\ \dots\dots \\ a_na_n' = -1 \end{array}\right\} \quad 34)$$

Oder mit Rücksicht auf die gegebenen Werte wäre:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \dfrac{y_1 - y_1'}{x_1 - x_1'} = \dfrac{\sin\sigma_1 - \sin\sigma_1'}{\cos\sigma_1 - \cos\sigma_1'} = -\operatorname{cotg}\dfrac{\sigma_1 + \sigma_1'}{2} \\ a_2 = \dfrac{y_2 - y_2'}{x_2 - x_2'} = \dfrac{\sin\sigma_2 - \sin\sigma_2'}{\cos\sigma_2 - \cos\sigma_2'} = -\operatorname{cotg}\dfrac{\sigma_2 + \sigma_2'}{2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n = \dfrac{y_n - y_n'}{x_n - x_n'} = \dfrac{\sin\sigma_n - \sin\sigma_n'}{\cos\sigma_n - \cos\sigma_n'} = -\operatorname{cotg}\dfrac{\sigma_n + \sigma_n'}{2} \end{array}\right\} \quad 35)$$

und

$$\left.\begin{array}{l} a_1' = \dfrac{y_1'' - y_1'''}{x_1'' - x_1'''} = \dfrac{\sin\sigma_1'' - \sin\sigma_1'''}{\cos\sigma_1'' - \cos\sigma_1'''} = -\operatorname{cotg}\dfrac{\sigma_1'' + \sigma_1'''}{2} \\ a_2' = \dfrac{y_2'' - y_2'''}{x_2'' - x_2'''} = \dfrac{\sin\sigma_2'' - \sin\sigma_2'''}{\cos\sigma_2'' - \cos\sigma_2'''} = -\operatorname{cotg}\dfrac{\sigma_2'' + \sigma_2'''}{2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n' = \dfrac{y_n'' - y_n'''}{x_n'' - x_n'''} = \dfrac{\sin\sigma_n'' - \sin\sigma_n'''}{\cos\sigma_n'' - \cos\sigma_n'''} = -\operatorname{cotg}\dfrac{\sigma_n'' + \sigma_n''}{2} \end{array}\right\} \quad 36)$$

so dass die Gleichungen in 34) folgende Formen annehmen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg}\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{2}\,.\operatorname{cotg}\frac{\sigma_1''+\sigma_1'''}{2} &= -1 \\ \operatorname{cotg}\frac{\sigma_2+\sigma_2'}{2}\,.\operatorname{cotg}\frac{\sigma_2''+\sigma_2'''}{2} &= -1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \operatorname{cotg}\frac{\sigma_n+\sigma_n'}{2}\,.\operatorname{cotg}\frac{\sigma_n''+\sigma_n'''}{2} &= -1 \end{aligned}\right\} \qquad 37)$$

oder auch:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotg}\frac{\sigma_1+\sigma_1'}{2} &= -\operatorname{tg}\frac{\sigma_1''+\sigma_1'''}{2} \\ \operatorname{cotg}\frac{\sigma_2+\sigma_2'}{2} &= -\operatorname{tg}\frac{\sigma_2''+\sigma_2'''}{2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \operatorname{cotg}\frac{\sigma_n+\sigma_n'}{2} &= -\operatorname{tg}\frac{\sigma_n''+\sigma_n'''}{2} \end{aligned}\right\} \qquad 38)$$

woraus weiter folgt, dass

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma_1+\sigma_1'}{2} \pm \frac{\pi}{2} &= \frac{\sigma_1''+\sigma_1'''}{2} \\ \frac{\sigma_2+\sigma_2'}{2} \pm \frac{\pi}{2} &= \frac{\sigma_2''+\sigma_2'''}{2} \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \frac{\sigma_n+\sigma_n'}{2} \pm \frac{\pi}{2} &= \frac{\sigma_n''+\sigma_n'''}{2} \end{aligned}\right\} \qquad 39)$$

sein müsste, wobei für die Anordnung nach unserer Figur nur das obere Zeichen (Plus) zu wählen ist.

Da diese Bedingungen in 39) jedoch im allgemeinen nicht zutreffen werden, so bestimmen wir:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma_1+\sigma_1'}{2} &= \alpha_1 \\ \frac{\sigma_2+\sigma_2'}{2} &= \alpha_2 \\ \cdots\cdots & \\ \frac{\sigma_n+\sigma_n'}{2} &= \alpha_n \end{aligned}\right\} \qquad 40)$$

und

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sigma_1''+\sigma_1'''}{2} &= \alpha_1' \\ \frac{\sigma_2''+\sigma_2'''}{2} &= \alpha_2' \\ &\cdots\cdots \\ \frac{\sigma_n''+\sigma_n'''}{2} &= \alpha_n'\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

und ermitteln weiter die Werte:

$$\left.\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\Delta_1 &= \frac{\alpha_1-\alpha_1'}{2}+\frac{\pi}{4} \\ \tfrac{1}{2}\Delta_2 &= \frac{\alpha_2-\alpha_2'}{2}+\frac{\pi}{4} \\ &\cdots\cdots \\ \tfrac{1}{2}\Delta_n &= \frac{\alpha_n-\alpha_n'}{2}+\frac{\pi}{4}\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

womit wir die corrigirten Werte durch folgendes System von Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned}\varrho_1 &= \sigma_1-\frac{\Delta_1}{2} \\ \varrho_2 &= \sigma_2-\frac{\Delta_2}{2} \\ &\cdots\cdots \\ \varrho_n &= \sigma_n-\frac{\Delta_n}{2}\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

$$\left.\begin{aligned}\varrho_1' &= \sigma_1'-\frac{\Delta_1}{2} \\ \varrho_2' &= \sigma_2'-\frac{\Delta_2}{2} \\ &\cdots\cdots \\ \varrho_n' &= \sigma_n'-\frac{\Delta_n}{2}\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

$$\left.\begin{aligned}\varrho_1'' &= \sigma_1''+\frac{\Delta_1}{2} \\ \varrho_2'' &= \sigma_2''+\frac{\Delta_2}{2} \\ &\cdots\cdots \\ \varrho_n'' &= \sigma_n''+\frac{\Delta_n}{2}\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1''' &= \sigma_1''' + \frac{\Delta_1}{2} \\ \varrho_2''' &= \sigma_2''' + \frac{\Delta_2}{2} \\ &\cdots\cdots \\ \varrho_n''' &= \sigma_n''' + \frac{\Delta_n}{2} \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Heissen die verbesserten Werte von α und α' entsprechend β und β', so hat man weiter:

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 - \frac{\Delta_1}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_1'}{2} - \frac{\Delta_1}{2} \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{\Delta_2}{2} = \frac{\sigma_2 + \sigma_2'}{2} - \frac{\Delta_2}{2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_n &= \alpha_n - \frac{\Delta_n}{2} = \frac{\sigma_n + \sigma_n'}{2} - \frac{\Delta_n}{2} \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \beta_1' &= \alpha_1' + \frac{\Delta_1}{2} = \frac{\sigma_1'' + \sigma_1'''}{2} + \frac{\Delta_1}{2} \\ \beta_2' &= \alpha_2' + \frac{\Delta_2}{2} = \frac{\sigma_2'' + \sigma_2'''}{2} + \frac{\Delta_2}{2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_n' &= \alpha_n' + \frac{\Delta_n}{2} = \frac{\sigma_n'' + \sigma_n'''}{2} + \frac{\Delta_n}{2} \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Von der Richtigkeit dieser hier gegebenen Gleichungen in 43) bis 48) kann man sich leicht überzeugen, wie auch von der Richtigkeit der nachfolgenden Relationen, die sich aus 47) und 48) ergeben:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_1' &= \beta_1 + \beta_1' \\ \alpha_2 + \alpha_2' &= \beta_2 + \beta_2' \\ &\cdots\cdots \\ \alpha_n + \alpha_n' &= \beta_n + \beta_n' \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Die Berechnung der Excentricität hätte man mit den auf diese Weise verbesserten Werten nach einer der beiden Methoden in I. oder II. durchzuführen, wobei es bei Bestimmungen an Uhren gut erscheint, die Verwandlungen in das Gradmass sogleich vorzunehmen, da sonst durch die Correcturen allein schon grössere Fehler entstehen könnten, indem eine Zehntel-Secunde im Bogenmasse den Wert von 36 Minuten besitzt.

Bezüglich der Continuität des Wertes b gilt dasselbe, was schon früher gesagt wurde, nur kann hier der Fall eintreten, dass die Continuität durch die Correctur entweder hervorgerufen oder selbst aufgehoben wurde.

IV.

Um die Abhängigkeit der berechneten Grössen in Bezug auf die Genauigkeit der beobachteten kennen zu lernen, ist es am einfachsten die Gleichungen in 19) zu differentiiren, gleichgiltig welchen Weg man für die Berechnung der Excentricität gewählt hat.

Man erhält demnach:

$$\left.\begin{aligned}
(x_1-x_1')\partial v-(y_1-y_1')\partial\zeta &= (\zeta-x_1')\partial y_1-(\zeta-x_1)\partial y_1' \\
&\quad -(v-y_1')\partial x_1+(v-y_1)\partial x_1' \\
(x_2-x_2')\partial v-(y_2-y_2')\partial\zeta &= (\zeta-x_2')\partial y_2-(\zeta-x_2)\partial y_2' \\
&\quad -(v-y_2')\partial x_2+(v-y_2)\partial x_2' \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
(x_n-x_n')\partial v-(y_n-y_n')\partial\zeta &= (\zeta-x_n')\partial y_n-(\zeta-x_n)\partial y_n' \\
&\quad -(v-y_n')\partial x_n+(v-y_n)\partial x_n'
\end{aligned}\right\} \quad 50)$$

Setzt man der Kürze halber

$$\left.\begin{aligned}
K_1 &= (\zeta-x_1')\partial y_1-(\zeta-x_1)\partial y_1'-(v-y_1')\partial x_1+(v-y_1)\partial x_1' \\
K_2 &= (\zeta-x_2')\partial y_2-(\zeta-x_2)\partial y_2'-(v-y_2')\partial x_2+(v-y_2)\partial x_2' \\
&\cdots\cdots\cdots \\
K_n &= (\zeta-x_n')\partial y_n-(\zeta-x_n)\partial y_n'-(v-y_n')\partial x_n+(v-y_n)\partial x_n'
\end{aligned}\right\} \quad 51)$$

so wären die Gleichungen in 50) gegeben durch

$$\left.\begin{aligned}
(x_1-x_1')\partial v-(y_1-y_1')\partial\zeta &= K_1 \\
(x_2-x_2')\partial v-(y_2-y_2')\partial\zeta &= K_2 \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots \\
(x_n-x_n')\partial v-(y_n-y_n')\partial\zeta &= K_n
\end{aligned}\right\} \quad 52)$$

wobei die Werte $K_1, K_2, \ldots K_n$ nach ausgeführter Reduction folgende Gestalt annehmen:

$$\left.\begin{aligned}
K_1 &= r[\{\cos\sigma_1(\zeta-x_1')+\sin\sigma_1(v-y_1')\}\partial\sigma_1 \\
&\quad -\{\cos\sigma_1'(\zeta-x_1)+\sin\sigma_1'(v-y_1)\}\partial\sigma_1'] \\
K_2 &= r[\{\cos\sigma_2(\zeta-x_2')+\sin\sigma_2(v-y_2')\}\partial\sigma_2 \\
&\quad -\{\cos\sigma_2'(\zeta-x_2)+\sin\sigma_2'(v-y_2)\}\partial\sigma_2'] \\
&\cdots\cdots\cdots \\
K_n &= r[\{\cos\sigma_n(\zeta-x_n')+\sin\sigma_n(v-y_n')\}\partial\sigma_n \\
&\quad -\{\cos\sigma_n'(\zeta-x_n)+\sin\sigma_n'(v-y_n)\}\partial\sigma_n']
\end{aligned}\right\} \quad 53)$$



Um aus den Gleichungen in 50) resp. in 52) die Werte ∂v und $\partial \zeta$ zu bestimmen, erscheint es am besten, wieder die Methode der kleinsten Quadrate in Anwendung zu bringen, wodurch man folgende Bestimmungsgleichungen erhielte:

$$\begin{aligned}
\partial v \sum_{n=n}^{n=1} [(x_n - x_n')^2] - \partial \zeta \sum_{n=n}^{n=1} [(y_n - y_n')(x_n - x_n')] &= \sum_{n=n}^{n=1} [K_n(x_n - x_n')] \\
\partial v \sum_{n=n}^{n=1} [(x_n - x_n')(y_n - y_n')] - \partial \zeta \sum_{n=n}^{n=1} [(y_n - y_n')^2] &= \sum_{n=n}^{n=1} [K_n(y_n - y_n')]
\end{aligned} \qquad 54)$$

Nimmt man

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{n=n}^{n=1} [(x_n - x_n')^2] &= M \\
\sum_{n=n}^{n=1} [(x_n - x_n')(y_n - y_n')] &= N \\
\sum_{n=n}^{n=1} [(y_n - y_n')^2] &= P \\
\sum_{n=n}^{n=1} [K_n(x_n - x_n')] &= Q \\
\sum_{n=n}^{n=1} [K_n(y_n - y_n')] &= S
\end{aligned}\right\} \qquad 55)$$

an, so kann man die Gleichungen in 54) auch schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
M\partial v - N\partial \zeta &= Q \\
N\partial v - P\partial \zeta &= S
\end{aligned}\right\} \qquad 56)$$

woraus man endlich erhält:

$$\left.\begin{aligned}
\partial v &= \frac{PQ - NS}{MP - N^2} \\
\partial \zeta &= \frac{NQ - MS}{MP - N^2}
\end{aligned}\right\} \qquad 57)$$

Zu erwähnen wäre noch, dass es am besten ist, sämmtliche Werte in Teilen von r auszudrücken, d. h. $r = 1$ zu setzen; man hat in diesem Falle in sämmtlichen hier angeführten Formen einfach den Wert r wegzulassen.



XX.

Zur perspectivischen Projection.

Von

Emil Hain.

I.

Die Stralen, welche von einem beliebigen Punkte des Raumes zu den Punkten irgend eines Teiles der Erdoberfläche gezogen werden, schneiden eine beliebige Ebene in Punkten, deren Gesammtheit die perspectivische Projection jenes Oberflächenteiles genannt wird.

Ist diese Ebene parallel zum Horizont des angenommenen Punktes A, so erhält man ein kreisförmiges Bild, welches dem Panorama eines Aussichtspunktes A entspricht. E sei der Mittelpunkt der Erdkugel, AE treffe ihre Oberfläche in O.

Wir ziehen einen Kreis vom Mittelpunkte E und dem Radius $EO = r$ und an denselben von A eine Tangente, welche die Peripherie in B trifft. Die Tangente in O treffe AB in H.

Darnach ist H ein Punkt, von welchem an den gedachten Kreis die zwei Tangenten HO, HB gezogen sind. Nach einer bekannten Eigenschaft des Kreises ist dann

$$HO = HB.$$

Die Dreiecke HEO, HEB sind congruent. HE treffe den Kreis (die Erdoberfläche) in C. Dann ist:

$$\text{Bogen } OC = \text{Bogen } CB$$

C liegt in der Mitte von O und B. AC schneide HO in D.

Denken wir uns nun zwischen O und A eine horizontale Kartenebene; diese werde von OA in O', von OB in B', von OC in C' getroffen. Zwischen O' und C' erscheint also das Bild der Stellen von O bis C, während die andere Hälfte BC zwischen B' und C' abgebildet ist.

Eine Zeichnung, in welcher AO gegen OE sehr klein angenommen wird, zeigt, dass die Strecken OD, DH, also auch $O'C'$, $C'B'$ ungleich sind. Der Rand des Panorama's von der Breite BC wird auf der Karte weniger breit als der mittlere Teil OC erscheinen.

Der Zweck dieser Zeilen ist nun, das Verhältniss

$$\frac{O'C'}{C'B'} = \frac{OD}{DH}$$

anzugeben, wobei neben einigen goniometrischen Formeln die Fundamentalsätze der ebenen Trigonometrie in Anwendung kommen.

II.

Die bestimmenden Grössen zur Ausmittelung des gesuchten Wertes sind:

$$\text{der Erdradius } EO = EB = EC = r$$

und

$$OA = h.$$

Der Radius EB steht im Berührungspunkte B auf der Tangente AB senkrecht. Das Dreieck ABE ist also bei B rechtwinklig. Somit ist nach dem Pythagoräischen Lehrsatze:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2$$

Nun ist:

$$AE = r + h$$

$$BE = r$$

also:

$$(r+h)^2 = \overline{AB}^2 + r^2$$

$$\overline{AB}^2 = (r+h)^2 - r^2$$

$$\overline{AB}^2 = r^2 + 2rh + h^2 - r^2$$

$$AB = \sqrt{2rh + h^2} = \sqrt{h}\,.\sqrt{2r+h}$$

Ferner ist das Dreieck AOH ebenfalls rechtwinklig; die Katheten sind AO, HO; die Hypotenuse ist HA.

Wir haben also:

$$\overline{AH}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{HO}^2$$

Bedienen wir uns der Abkürzung:

$$HO = a$$

und bedenken wir, dass die Strecken HO, HB einander gleich sind; so bekommen wir:

$$HA^2 = h^2 + a^2$$
$$(\overline{AB} - a)^2 = h^2 + a^2$$
$$\overline{AB}^2 - 2AB.a + a^2 = h^2 + a^2$$
$$\overline{AB}^2 - 2AB.a = h^2$$

Setzen wir den gefundenen Wert von $\overline{AB}^2$ ein, so erhalten wir

$$2rh + h^2 - 2\overline{AB}.a = h^2,$$
$$2rh - 2\overline{AB}.a = 0,$$

woraus sich

$$a = \frac{rh}{\sqrt{2rh + h^2}} = \frac{r\sqrt{h}}{\sqrt{2r + h}}$$

ergibt.

Zur Bestimmung des Wertes HC betrachten wir das bei B rechtwinklige Dreieck HBE. In demselben ist:

$$\overline{EH}^2 = \overline{HB}^2 + \overline{BE}^2$$

Schreiben wir der Kürze halber

$$HC = c,$$

so folgt:

$$(r + c)^2 = a^2 + r^2$$
$$r + c = \sqrt{a^2 + r^2}$$
$$c = \sqrt{a^2 + r^2} - r,$$

wo die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist.

III.

Wir setzen:

$$\text{Winkel } OAH = \alpha$$
$$\text{Winkel } OHC = \beta$$

Dann ist:

$$\text{Winkel } AHO = 90^0 - \alpha$$

Die trigonometrischen Functionen von α ergeben sich aus der Betrachtung des rechtwinkligen Dreiecks ABE, es ist:

$$\sin\alpha = \frac{BE}{AE} = \frac{r}{r + h}$$

Die gemeinsame Seite EH der congruenten Dreiecke HEO, HEB halbirt den Winkel BHO. Wir haben daher:

$$2\beta + 90^0 - \alpha = 180^0$$
$$2\beta = 90^0 + \alpha$$
$$\beta = 45^0 + \frac{\alpha}{2}$$

Ferner brauchen wir im Folgenden den Winkel AEC.

Es ist:

$$\text{Winkel } AEC = \tfrac{1}{2} \text{ Winkel } AEB$$
$$= \tfrac{1}{2}(90^0 - \alpha)$$
$$= 45^0 - \frac{\alpha}{2}.$$

IV.

Um nun das Verhältniss

$$OD : DH$$

zu finden, betrachten wir die Strecken:

$$AD, \quad CD, \quad AC.$$

Aus dem Dreiecke AOD ergibt sich, wenn wir den spitzen Winkel bei D mit δ bezeichnen:

$$AD = \frac{AO}{\sin\delta} = \frac{h}{\sin\delta}$$

Nach dem Sinussatze erhalten wir in dem Dreiecke CDH:

$$\frac{CD}{CH} = \frac{\sin\beta}{\sin\delta}$$

$$CD = \frac{c\sin\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\delta}$$

Also ist:

$$AD + CD = \frac{h}{\sin\delta} + \frac{c\sin\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\delta}$$

$$AC = \frac{h + c\sin\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\delta}$$

Der Carnot'sche Satz gibt für das Dreieck AEC:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 - 2\overline{AE}\,.\,\overline{CE}\cos AEC$$

$$AC = \sqrt{2rh + h^2 + 2r^2 - 2r(r+h)\cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

Vergleichen wir die beiden für AC gefundenen Werte, so bekommen wir:

$$\sin\delta = \frac{h + c\sin\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2rh + h^2 + 2r^2 - 2r(r+h)\cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)}}$$

Nun ist:

$$OD = h\cot\delta$$

$$DH = a - h\cot\delta$$

somit:

$$OD : DH = \frac{h\cot\delta}{a - h\cot\delta} = \frac{h}{a\,\mathrm{tang}\,\delta - h}$$

Die Grössen a, c sind durch r und h ausgedrückt; damit ist $\sin\delta$ und $\mathrm{tang}\,\delta$ bekannt. Sonach ist die Formel für den Wert des gesuchten Verhältnisses gegeben.

V.

Für die gewöhnlichen Verhältnisse, wo h gegen r sehr klein ist, fordert die in IV. gegebene Formel zu viel Rechnung; man kann aber in diesem Falle sich eines Näherungswertes bedienen, den wir auf folgende Weise finden.

Wir haben gefunden:

$$CH = c = \sqrt{a^2 + r^2} - r$$

$$a = \frac{rh}{\sqrt{2rh + h^2}}$$

Dividiren wir Zähler und Nenner dies Ausdrucks für a durch r, so erhalten wir:

$$a = \frac{h}{\frac{1}{r}\sqrt{2rh + h^2}} = \frac{h}{\sqrt{\frac{2rh}{r^2} + \frac{h^2}{r^2}}}$$

Für den angenommenen Fall ist $\frac{h}{r}$ ein sehr kleiner echter Bruch, also kann $\frac{h^2}{r^2}$ vernachlässigt werden. Dann wird

$$a = \frac{h}{\sqrt{\frac{2h}{r}}} = \sqrt{\frac{hr}{2}}$$

$$a^2 = \frac{hr}{2}$$

Die Substitution dieses Wertes für a^2 in den Ausdruck für c gibt:

$$c = \sqrt{\frac{rh}{2} + r^2} - r$$

$$= \sqrt{r^2\left(1 + \frac{h}{2r}\right)} - r$$

$$= \sqrt{1 + \frac{h}{2r}} - r$$

Wenn ε ein sehr kleiner echter Bruch ist, so kann in der identischen Gleichung:

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}$$

der Bruch $\frac{\varepsilon^2}{4}$ vernachlässigt werden. Dann erhalten wir:

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = 1 + \varepsilon$$

$$\sqrt{1 + \varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

Nun ist $\frac{h}{2r}$ ein sehr kleiner echter Bruch, also ist:

$$\sqrt{1 + \frac{h}{2r}} = 1 + \frac{h}{4r}$$

$$c = r\left(1 + \frac{h}{4r}\right) - r = \frac{h}{4}$$

Für eine geringe Höhe h kann man die Verticalen der Orte O und B nahezu parallel annehmen; dann folgt aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ADO, CDH:

$$OD : DH = OA : CH = h : c$$

Wir erhalten sonach in erster Annäherung:

$$OD:DH = 4:1.$$

VI.

Mittelst der Formel:

$$\operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$$

kann der in IV. gegebene Ausdruck für $\sin\delta$ von trigonometrischen Functionen frei gemacht werden. Wir erhalten dann:

$$\sin\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{2r+h}{2(r+h)}}$$

$$\cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{2r+h}{2(r+h)}}$$

$$a = \frac{r\sqrt{h}}{\sqrt{2r+h}}$$

$$c = r\left[\sqrt{\frac{2(r+h)}{2r+h}} - 1\right]$$

Werden diese Werte in die Formel

$$\sin\delta = \frac{h + c\sin\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2rh + h^2 + 2r^2 - 2r(r+h)\cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)}}$$

eingesetzt, so findet man nach allerdings längerer Rechnung:

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{(r+h)\sqrt{2(r+h)} - r\sqrt{2r+h}}{r\sqrt{h}}$$

Substituirt man diesen Wert in die Gleichung:

$$OD:DH = \frac{h}{a\operatorname{tang}\delta - h}$$

so erhält man schliesslich:

$$OD:DH = \frac{\sqrt{2(r+h)(2r+h)} + 2r + h}{r+h}$$

Dieser Ausdruck wird für

$$\frac{k}{r} = 0$$

am grössten, nämlich: 4 : 1 und für

$$\frac{h}{r} = \infty,$$

in welchem Fall das Projectionscentrum A in die Unendlichkeit rückt, am kleinsten und zwar:

$$(1 + \sqrt{2}) : 1 = 2 \cdot 41 : 1.$$

Ferner erhalten wir für die Fälle:

$$\frac{h}{r} = 1, \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{1000}$$

die Werte

$$3 \cdot 23 : 1, \quad 3 \cdot 98 : 1, \quad 3 \cdot 99 : 1.$$

Der letztere Wert, der also dem Verhältnisse 4 : 1 sehr nahe kömmt, entspricht einem Aussichtspunkt von der Höhe von 6367 Metern.

XXI.

Krümmungslinien in den Nabelpunkten von Flächen.

Von

R. Hoppe.

Ein Nabelpunkt sei Anfang der xyz, die Berührungsebene Ebene der xy, die Normale Axe der z. Betrachtet man ein unendlich kleines Flächenstück, welches den Nabelpunkt umgibt, so lässt sich die Gleichung der Fläche im allgemeinen schreiben:

$$z = \frac{x^2+y^2}{2\varrho} + u + R_4 \tag{1}$$

wo ϱ den Krümmungsradius des Normalschnitts im Nabelpunkt,

$$u = \frac{\alpha}{6}x^3 + \frac{\beta}{2}x^2y + \frac{\gamma}{2}xy^2 + \frac{\delta}{6}y^3 \tag{2}$$

eine beliebige homogene ganze Function 3. Grades von x, y, und R_n einen in $n$ter Ordnung mit x, y verschwindenden, nicht in Rechnung kommenden Rest bezeichnet. Sind ferner p, q, r die Richtungscosinus der Normale in (xyz), und drücken wir die partiellen Differentialquotienten von u nach x und y bzhw. durch die Indices 1 und 2 aus, so ist

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\varrho} + u_1 + R_3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\varrho} + u_2 + R_3$$

$$pt = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\varrho} - u_1 + R_3$$

$$qt = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\varrho} - u_2 + R_3$$

$$rt = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{vmatrix} = 1$$

woraus:

$$t^2 = 1 + \frac{x^2 + y^2}{\varrho^2} + 2\frac{xu_1 + yu_2}{\varrho} + R_4$$

$$t = 1 + R_2$$

so dass

$$p = -\frac{x}{\varrho} - u_1 + R_3; \quad q = -\frac{y}{\varrho} - u_2 + R_3 \tag{3}$$

Die partiellen Differentialquotienten von p und q lassen sich in der Form darstellen:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = H\frac{\partial x}{\partial x} + H_1\frac{\partial x}{\partial y} = H$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = H\frac{\partial y}{\partial x} + H_1\frac{\partial y}{\partial y} = H_1$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = J\frac{\partial x}{\partial x} + J_1\frac{\partial x}{\partial y} = J$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = J\frac{\partial y}{\partial x} + J_1\frac{\partial y}{\partial y} = J_1$$

Die durch diese Form definirten Coefficienten haben (bei Vernachlässigung von R_2) also folgende Werte:

$$H = -\frac{1}{\varrho} - u_{11}; \quad H_1 = -u_{12}$$

$$J = -u_{12}; \quad J_1 = -\frac{1}{\varrho} - u_{22}$$

Sie sind auch die Coefficienten der Gleichung

$$Jk^2 + (H - J_1)k - H_1 = 0$$

welche das Variationsverhältniss

$$k = \partial y : \partial x$$

für die Hauptkrümmungsrichtungen bestimmt. Diese Gleichung lautet nach Einsetzung der obigen Werte:

$$u_{12}k^2 + (u_{11} - u_{22})k - u_{12} = 0 \tag{4}$$

Geht nun eine der Krümmungslinien vom Punkte (xyz) durch den Nabelpunkt, so ist

$$\frac{y}{x} = \frac{\partial y}{\partial x} = k \tag{5}$$

Setzt man für u seinen Wert (2), so wird hiernach

$$\frac{u_{11}}{x} = \alpha + \beta k; \quad \frac{u_{12}}{x} = \beta + \gamma k; \quad \frac{u_{22}}{x} = \gamma + \delta k$$

Dies eingeführt in Gl. (4) gibt:

$$\gamma k^3 + (2\beta - \delta)k^2 + (\alpha - 2\gamma)k - \beta = 0 \tag{6}$$

Jede reelle Wurzel dieser Gleichung bestimmt im allgemeinen die Richtung einer vom Nabelpunkt ausgehenden Krümmungslinie. Von einer Ausnahme wird später die Rede sein.

Discussion.

Die Gl. (4) ohne die Relation (5) hat bekanntlich stets 2 reelle Wurzeln k_1 und k_2, entsprechend den 2, verschiedenen Scharen angehörenden Krümmungslinien. Ein Vorzeichenwechsel von

$$k_1 - k_2 = \pm \sqrt{(u_{11} - u_{22})^2 + 4u_{12}{}^2} : 2u_{12}$$

bedeutet also einen Uebergang von der einen Schar zur andern.

Von dieser Quadratwurzel ist Gl. (6) unabhängig. Betrachtet man nun zwei zum Nabelpunkt entgegengesetzt liegende Punkte (x, y) und $(-x, -y)$, so entsprechen diesen entgegengesetzte Werte von u_{12}, dagegen gleicher Wert der Quadratwurzel, folglich entgegengesetzte Werte von $k_1 - k_2$. Daraus erhellt 1) dass jede Krümmungslinie, die den Nabelpunkt erreicht, ihn in unveränderter Richtung überschreitet, 2) dass sie im selben Augenblicke von einer Schar zur andern, d. i. vom Krümmungsmaximum durch die constante Krümmung zum Krümmungsminimum oder umgekehrt, übergeht.

Gl. (6) hat 3 oder 1 reelle Wurzel (für $\gamma = 0$ muss die Wurzel $k = \infty$, d. i. $x = 0$, mitgezählt werden). Ihre Geltung setzt indes voraus, dass nicht

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

ist. Unter den Wurzeln können gleiche vorkommen; doch bildet dieser Fall im allgemeinen keine Ausnahme, weil sich die Wurzeln in höherer Ordnung unterscheiden können. Endlich ist auch der Fall zu berücksichtigen, dass sich z nicht bis zu 3. Ordnung entwickeln lässt.

Das Resultat, sofern es die genannten Ausnahmefälle von der Betrachtung ausschliesst, lautet:

Von einem Nabelpunkt, dessen Umgebung die Form (1) hat, wo u nicht constant null ist, gehen entweder 6 oder 2 Zweige von Krümmungslinien aus, parweise in entgegengesetzter Richtung. Von jedem solchen Pare verfolgt der eine Zweig die grösste, der andre die kleinste Normalschnittkrümmung.

Ist u constant null, so tritt an seine Stelle ein in R_4 enthaltener Ausdruck höherer Ordnung. Ist das nächste Glied der Entwickelung von z

$$v = \frac{\alpha}{24}x^4 + \frac{\beta}{6}x^3y + \frac{\gamma}{4}x^2y^2 + \frac{\delta}{6}xy^3 + \frac{\varepsilon}{24}y^4$$

also

$$z = \frac{x^2+y^2}{2\varrho} + v + R_5$$

so bleibt der Gang der Rechnung derselbe, und in Gl. (4) ist nur v für u zu setzen. Gl. (6) wird alsdann:

$$\delta k^4 + (3\gamma - \varepsilon)k^3 + 3(\beta - \delta)k^2 + (\alpha - 3\gamma)k - \beta = 0 \qquad (7)$$

Da v_{11}, v_{12}, v_{22} bei Vorzeichenwechsel von x und y unverändert bleiben, so gehören hier die 2 entgegengesetzten Zweige der vom Nabelpunkt ausgehenden Krümmungslinien derselben Schar an. Solcher Pare giebt es dann vier, zwei oder keins.

Ein weiterer Unterschied ist folgender. Die Coefficienten der Gl. (7) verschwinden für

$$\beta = \delta = 0; \quad \alpha = 3\gamma = \varepsilon$$

und es wird

$$8v = \gamma(x^2+y^2)^2$$

während die Coefficienten der Gl. (6) nur mit u verschwinden können. Ist der Rest R_5 gleichfalls Function von x^2+y^2, so bleibt k will-

kürlich, die Fläche wird eine Rotationsfläche, der Nabelpunkt ihr Scheitel, und in diesem treffen in allen Richtungen Krümmungslinien derselben Schar zusammen.

Seien nun $\varkappa$, λ, μ die (reellen oder imaginären) Wurzeln der Gl. (6), also

$$\delta - 2\beta = (\varkappa + \lambda + \mu)\gamma$$
$$\alpha - 2\gamma = (\lambda\mu + \mu\varkappa + \varkappa\lambda)\gamma$$
$$\beta = \varkappa\lambda\mu\gamma$$

woraus:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = (\lambda\mu + \mu\varkappa + \varkappa\lambda + 2)\gamma; \quad \beta = \varkappa\lambda\mu\gamma \\ \delta = (\varkappa + \lambda + \mu + 2\varkappa\lambda\mu)\gamma \end{array}\right\} \tag{8}$$

Setzt man diese Werte in Gl. (1) ein, so stellt die Gleichung

$$\begin{array}{l} z = \frac{x^2 + y^2}{2\varrho} + \frac{\gamma}{6}\{(\lambda\mu + \mu\varkappa + \varkappa\lambda + 2)x^3 + 3\varkappa\lambda\mu x^2 y \\ \qquad + 3xy^2 + (\varkappa + \lambda + \mu + 2\varkappa\lambda\mu)y^3\} + R_4) \end{array} \tag{9}$$

eine Fläche dar, welche im Anfangspunkt der xyz sphärisch gekrümmt ist, in einem Punkte von welchem in den (reellen oder imaginären) Richtungen

$$y = \varkappa x; \quad y = \lambda x; \quad y = \mu x \tag{10}$$

Krümmungslinien ausgehen. Wir wollen sie Hauptstrahlen nennen.

Betrachtet man diese Eigenschaft nebst den 6 Hauptstrahlen als gegeben, so zeigt sich, dass im allgemeinen eine Classe von Flächen dieselbe realisirt, und dass die Terme der Entwickelung von z bis zu 3. Grade durch diese Eigenschaft und durch die Constantenwerte ϱ, γ bestimmt sind, während alle zu dieser Classe gehörigen Flächen sich durch die ganz willkürlich bleibenden Terme höhern Grades allein unterscheiden.

Krümmungslinien in der Umgebung des Nabelpunkts.

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien in der Nähe des Nabelpunkts war nach (4):

$$u_{12}\partial y^2 + (u_{11} - u_{22})\partial x \partial y - u_{12}\partial x^2 = 0 \tag{11}$$

Der Radiusvector eines Punkts der Krümmungslinie wird ein Maximum oder Minimum nur für

$$x\partial x + y\partial y = 0$$

wenn $\partial y : \partial x$ der vorigen Gleichung genügt, also nur für

$$u_{12}x^2 - (u_{11} - u_{22})xy - u_{12}y^2 = 0$$

das ist dieselbe kubische Gleichung, welche durch die 3 Verhältnisswerte (10) erfüllt wird. Hieraus folgt der Satz:

Der Radiusvector einer Krümmungslinie in der Nähe des Nabelpunkts kann nur in einer vom Nabelpunkt ausgehenden Krümmungslinie ein Maximum oder Minimum haben.

Noch umfassender lässt sich das Resultat dahin aussprechen, dass kein andrer vom Nabelpunkt ausgehender Strahl von einer Krümmungslinie normal geschnitten werden kann. Daraus folgt, dass keine Krümmungslinie einen solchen Strahl berühren kann, weil sonst die zweite Krümmungslinie in demselben Punkte den Strahl normal kreuzte.

Verfolgt man nun eine Krümmungslinie erster Schar, so muss sie solange alle consecutiven Strahlen überschreiten, bis sie aus dem unendlich kleinen Felde der Betrachtung verschwindet, also nach beiden Seiten hin sich schliesslich vom Nabelpunkt entfernen, da sie mindestens einen Strahl, nämlich denjenigen, welcher Krümmungslinie derselben Schar ist, nicht überschreiten kann. Folglich ist ein Minimum des Radiusvectors unausbleiblich, mithin ein Maximum unmöglich.

Dieses Minimum findet im Durchschnitt mit einem Hauptstrahl statt. Lässt man auf letzterem den Durchschnittspunkt stetig bis zum Nabelpunkt rücken, so wird die Krümmungslinie 1. Schar eine Succession ebensolcher durchlaufen und in der Endlage in die nächsten 2 Hauptstrahlen übergehen, welche demnach Krümmungslinien 1. Schar sind. Demnach liegt jeder zur 2. Schar gehörige Hauptstrahl zwischen 2 zur 1. Schar gehörigen Hauptstrahlen. Oder mit andern Worten:

Die Hauptstrahlen gehören abwechselnd der ersten und zweiten Schar an.

Gibt es nur 2 entgegengesetzte Hauptstrahlen, so ist der Winkel zwischen 2 gleichnamigen Hauptstrahlen $= 4R$, und letztere fallen zusammen.

Aus den vorstehenden Betrachtungen ist die Form des Krümmungslinien-Netzes vollständig zu ersehen. Der Kürze wegen heisse ein Strahl erster oder zweiter Art, welcher der 1. oder 2. Schar von Krümmungslinien, bzhw. von grösster oder kleinster Normalschnittkrümmung, angehört.

Im Falle von 6 Hauptstrahlen gruppiren sich die übrigen Krümmungslinien in 6 Scharen hyperbel-ähnlicher Curven, welche einen

ungleichnamigen Hauptstrahl zur gemeinsamen Hauptaxe und die zwei nächsten gleichnamigen Hauptstrahlen zu gemeinsamen Asymptoten, mithin den Nabelpunkt zum gemeinsamen Mittelpunkt haben. Die Felder der benachbarten Scharen decken sich zur Hälfte, so dass der rechte Arm einer Quasi-Hyperbel auf dem Nachbarfelde rechts, der linke links zum rechtwinkligen Durchschnitt mit der Hälfte der angrenzenden ungleichnamigen Schar gelangt. Die Hyperbelzweige in den Scheitelwinkeln sind ungleicher Art.

Im Falle von 2 Hauptstrahlen haben gleichfalls die 2 Curvenscharen die 2 entgegengesetzten Hauptstrahlen zur gemeinsamen Axe, aber der Nabelpunkt liegt hier auf der concaven Seite zwischen beiden und die Scheitel der einen Schar auf der concaven Seite der andern.

Ausser diesen 2 Netzformen gibt es nur Specialfälle, die sehr mannichfaltig sind und sich nicht wol erschöpfen lassen.

Gleichung der auf die Berührungsebene projicirten Krümmungslinien.

Setzt man

$$\cot 2\omega = \frac{u_{11} - u_{22}}{2u_{12}} \tag{12}$$

so lautet nach (11) die Differentialgleichung der Krümmungslinien:

$$\partial y^2 + 2\partial x\,\partial y \cot 2\omega - \partial x^2 = 0$$

und gibt nach Auflösung die 2 Werte:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tg}\omega, \quad -\cot\omega \tag{13}$$

Beide sind Functionen der einen Variabeln

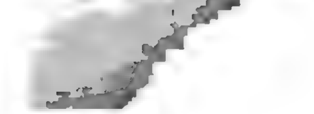
$$\frac{y}{x} = v$$

und nach Elimination von y erhält man:

$$x\frac{\partial v}{\partial x} + v = \operatorname{tg}\omega, \quad -\cot\omega$$

Verweilen wir bei dem erstern Werte, indem der zweite durch Substitution $\omega + R$ für ω daraus hervorgeht, so kommt:

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\partial v}{\operatorname{tg}\omega - v} \tag{14}$$



Nun ist

$$u_{11} = \alpha x + \beta y; \quad u_{12} = \beta x + \gamma y; \quad u_{22} = \gamma x + \delta y \tag{15}$$

daher nach Gl. (12)

$$\cot 2\omega = \frac{\alpha - \gamma + (\beta - \delta)v}{2(\beta + \gamma v)} \tag{16}$$

woraus:

$$v = -\frac{\alpha - \gamma - 2\beta \cot 2\omega}{\beta - \delta - 2\gamma \cot 2\omega}$$

oder, wenn man

$$\operatorname{tg} \omega = t$$

setzt:

$$v = -\frac{(\alpha - \gamma)t + \beta(t^2 - 1)}{(\beta - \delta)t + \gamma(t^2 - 1)} \tag{17}$$

Das gibt:

$$t - v = \frac{\gamma t^3 + (2\beta - \delta)t^2 + (\alpha - 2\gamma)t - \beta}{(\beta - \delta)t + \gamma(t^2 - 1)}$$

Der Zählor verschwindet für $t = \varkappa, \lambda, \mu$, daher ist

$$t - v = \frac{\gamma(t - \varkappa)(t - \lambda)(t - \mu)}{(\beta - \delta)t + \gamma(t^2 - 1)}$$

Gl. (17) differentiirt gibt:

$$\partial v = \frac{[\gamma(\alpha - \gamma) + \beta(\delta - \beta)](1 + t^2)\partial t}{[(\beta - \delta)t + \gamma(t^2 - 1)]^2}$$

daher geht Gl. (14) über in

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{\gamma(\alpha - \gamma) + \beta(\delta - \beta)}{(\beta - \delta)t + \gamma(t^2 - 1)} \frac{1 + t^2}{(t - \varkappa)(t - \lambda)(t - \mu)} \frac{\partial t}{\gamma}$$

Setzt man

$$\cot 2\varepsilon = \frac{\beta - \delta}{2\gamma}; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = e \tag{18}$$

so wird

$$(\beta - \delta)t + \gamma(t^2 - 1) = \gamma(t - e)\left(t + \frac{1}{e}\right)$$

also

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{A(1 + t^2)\partial t}{(t - e)\left(t + \frac{1}{e}\right)(t - \varkappa)(t - \lambda)(t - \mu)} \tag{19}$$

$$= Ae\partial t \left\{ \frac{1}{(e - \varkappa)(e - \lambda)(e - \mu)(t - e)} + \frac{e^3}{(1 + e\varkappa)(1 + e\lambda)(1 + e\mu)\left(t + \frac{1}{e}\right)} \right.$$

$$+\frac{1+\varkappa^2}{(1+e\varkappa)(\varkappa-e)(\varkappa-\lambda)(\varkappa-\mu)(t-\varkappa)}$$
$$+\frac{1+\lambda^2}{(1+e\lambda)(\lambda-e)(\lambda-\varkappa)(\lambda-\mu)(t-\lambda)}$$
$$+\frac{1+\mu^2}{(1+e\mu)(\mu-e)(\mu-\varkappa)(\mu-\lambda)(t-\mu)}\Big\}$$

wo

$$A=\frac{\gamma(\alpha-\gamma)-\beta(\delta-\beta)}{\gamma^2}=(1+\lambda\mu)(1+\mu\varkappa)(1+\varkappa\lambda) \tag{20}$$

Das Integral hat die Form:

$$x(t-e)^g\left(t+\frac{1}{e}\right)^h(t-\varkappa)^k(t-\lambda)^l(t-\mu)^m=C \tag{21}$$

Durch Substitution von $-\frac{1}{t}$, C' für t, C geht daraus die Gleichung der zweiten Krümmungslinienschar hervor.

Hier zeigt sich sogleich, dass die Rechnung für einen Fall ungültig wird, nämlich für $A=0$. Dieser findet statt, sooft zwei Hauptstrahlen einen rechten Winkel bilden, so dass einer der Factoren des Products (20) verschwindet. Hier wird nach Gl. (16) ω constant, daher die Substitution (17) unanwendbar. Geht man auf die Gl. (13) zurück, so ergeben diese ein Netz von 2 sich rechtwinklig schneidenden Scharen paralleler Geraden, welches mit dem dritten Hauptstrahl unvereinbar ist. Dieser Umstand erklärt sich durch die Form der Gl. (4), deren linke Seite hier in 2 Factoren zerfällt, einen nur von ∂x, ∂y, einen nur von x, y abhängig. Das Verschwinden des letztern kann keine Krümmungslinie bestimmen, weil es unabhängig von der Variationsrichtung stattfindet. Folglich wird hier die kubische Gleichung (6) ungültig. Wir müssen daher einen aufgestellten Satz jetzt folgendermassen ergänzen:

Es lässt sich stets eine Classe von Flächen mit einem Nabelpunkt angeben, von welchem in 3 beliebig gewählten, nur nicht normalen Richtungen Krümmungslinien auslaufen.

Die gleiche Beschränkung, ausgedrückt durch

$$\gamma(\alpha-\gamma)+\beta(\delta-\beta)\gtrless 0 \tag{22}$$

liegt der übrigen Rechnung zugrunde.

Will man die Gleichung der Krümmungslinien (21) in x und y darstellen, so kommt die Bemerkung zustatten, dass

$$g+h+k+l+m=0$$

sein muss, weil im Zähler des Ausdrucks (19) der Coefficient von t^4 null ist. Man kann demnach alle 5 Dignanden mit einem beliebigen gemeinsamen Factor multipliciren und dadurch den Nenner von

$$t = \frac{\pm\sqrt{(u_{11}-u_{22})^2 - 4u_{12}^3} - u_{11} + u_{22}}{4u_{12}} \tag{23}$$

entfernen. Die Gleichung enthält 2 Irrationale:

$$\sqrt{(\beta-\delta)^2 + 4\gamma^2}$$

enthalten in e und

$$\varDelta = \sqrt{\{(\alpha-\gamma)x + (\beta-\delta)y\}^2 + 4(\beta x + \gamma y)^2}$$

Das Vorzeichen der erstern hat keinen Einfluss, das von $\varDelta$ hingegen, welches bei Substitution von $-\frac{1}{t}$ für t wechselt, entscheidet darüber, ob die Krümmungslinie die grösste oder kleinste Normalschnittkrümmung verfolgt. Ein Uebergang von der einen Schar zur andern durch $\varDelta = 0$ kann, bei Voraussetzung von (22), nur bei $x = 0$, $y = 0$ stattfinden.

Geodätische Krümmung der Krümmungslinien im Scheitel.

Gemäss der Gl. (13) ist ω der Winkel zwischen der Tangente der ersten Krümmungslinie und der x Axe, d. i. der Krümmungswinkel der auf die Berührungsebene projicirten Curve s; folglich ist die Krümmung dieser Projection

$$\frac{\partial\omega}{\partial s} = \frac{\partial t}{\partial s}\cos^2\omega = \frac{\partial t}{\partial x}\cos^3\omega$$

das ist nach Gl. (19):

$$\frac{\partial\omega}{\partial s} = \frac{(t-e)\left(t+\frac{1}{e}\right)(t-\varkappa)(t-\lambda)(t-\mu)\cos^5\omega}{(1+\lambda\mu)(1+\mu\varkappa)(1+\varkappa\lambda)x} \tag{25}$$

Wir suchen nun den Wert dieses Ausdrucks für das Minimum des Radiusvectors, d. i. im Durchschnitt mit einem Hauptstrahl. Ist letzterer $y = \varkappa x$, so ist für denselben

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varkappa$$

also für die Tangentialrichtung der Curve

$$\frac{\partial y}{\partial x} = t = -\frac{1}{\varkappa}; \quad \cos\omega = \frac{\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2}}$$

Dies eingeführt gibt:

$$\frac{\partial\omega}{\partial s}=\frac{(1+e\varkappa)(\varkappa-e)}{(1+\lambda\mu)(1+\varkappa^2)^{\frac{1}{2}}x}$$

Bezeichnet r_0 den Radiusvector des Scheitels, so ist im Scheitel

$$x=\frac{r_0}{\sqrt{1+\varkappa^2}}$$

also

$$\frac{\partial\omega}{\partial s}=\frac{(1+e\varkappa)(\varkappa-e)}{(1+\lambda\mu)(1+\varkappa^2)r_0} \tag{26}$$

Für jede der 6 Scharen Krümmungslinien einzeln ist demnach der Krümmungsradius im Scheitel proportional dem Radiusvector. In den 2 gegenüberliegenden Scharen ist das Verhältniss dasselbe. Der Ausdruck (26) gilt gleicherweise für reelle wie für imaginäre λ, μ.

Beispiel.

Sind die Winkel zwischen den Hauptstrahlen gleich, und man nimmt den ersten zur x Axe, so wird

$$\varkappa=0;\qquad \lambda=-\sqrt{3};\quad \mu=\sqrt{3}$$
$$\alpha=-\gamma;\quad \beta=0;\qquad \delta=0$$

Die Gleichung der Fläche lautet, wenn wir $R_4=0$ setzen:

$$z=\frac{x^2+y^2}{2\varrho}+\gamma\frac{x}{6}(3y^2-x^2)$$

Da ferner hier $\cot 2\varepsilon=0$, so ist $\varepsilon=\frac{1}{4}R$, $e=1$, ferner $A=-2$, und die Entwickelung (19) ergibt:

$$\frac{\partial x}{x}=\left\{\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+\sqrt{3}}+\frac{1}{t-\sqrt{3}}\right)\right\}\partial t$$

integrirt:

$$\frac{C}{x^3}=\frac{t^2(t^2-3)^2}{(t^2-1)^3}$$
$$=\frac{t}{t^2-1}\left\{t-\frac{8t}{t^2-1}+4t\left(\frac{t}{t^2-1}\right)^2\right\}$$

Nun ist nach Gl. (16)

$$\frac{y}{x}=v=-\operatorname{tg}2\omega=\frac{2t}{t^2-1} \tag{27}$$

$$t = \frac{x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y} \tag{28}$$

daher nach (27)

$$\frac{C}{x^3} = \frac{y}{2x}\left\{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)t - \frac{4y}{x}\right\}$$

und nach (28)

$$2C = x(x^2-3y^2) \pm (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$$

und rational dargestellt

$$(3x^2-y^2)^2y^2 + 4Cx(x^2-3y^2) - 4C^2 = 0$$

als gemeinsame Gleichung des ganzen Systems von Krümmungslinien.

Die geodätische Krümmung im Scheitel wird:

$$\frac{\partial\omega}{\partial s} = \frac{1}{2r_0}$$

Da alle 6 Scharen durch dieselben Bedingungen bestimmt sind, so ist von Anfang klar, dass sie einander congruent sein müssen, woraus dann die Gleichheit der Krümmungen in allen 6 Scheiteln folgt. Dies bestätigt sich, wenn man im Ausdruck (26) $\varkappa$, λ, μ vertauscht.

Algebraische Flächen mit einem Nabelpunkt.

Die Gleichung einer Fläche

$$F(x', y', z') = 0 \tag{29}$$

wo F eine ganze Function bezeichnet, sei durch Coordinatentransformation mit Einführung eines Flächenpunkts als Anfang der xyz und der Normalen in demselben als z Axe in

$$f(x, y, z) = 0 \tag{30}$$

übergegangen. Dann sind der constante Term und die Coefficienten von x und y null. Soll jener Flächenpunkt ein Nabelpunkt sein, so wird weiter erfordert, dass der Coefficient von xy null, und der von x^2 gleich dem von y^2 sei, während der von z im allgemeinen nicht null sein darf, so dass er sich $=1$ setzen lässt. Dann hat f folgende Form:

$$f(x, y, z) = z - \frac{x^2+y^2}{2\varrho} - \frac{\alpha'x^3+3\beta'x^2y+3\gamma'xy^2+\delta'y^3}{6} + (\varepsilon x+\zeta y)z + Q' \tag{31}$$

wo Q' alle Terme von höherm als dritten Grade in Bezug auf x, y, $\sqrt{z}$ enthält. Dafür kann man schreiben:

$$f(x, y, z)(1 - \varepsilon x - \zeta y) = z - \frac{x^2 + y^2}{2\varrho}$$

$$- \frac{1}{6}\left\{\left(\alpha' - \frac{3\varepsilon}{\varrho}\right)x^3 + 3\left(\beta' - \frac{\zeta}{\varrho}\right)x^2 y + 3\left(\gamma' - \frac{\varepsilon}{\varrho}\right)xy^2 + \left(\delta' - \frac{3\zeta}{\varrho}\right)y^3\right\} + Q$$

mit gleicher Bedeutung von Q. Da nun Q ohne Einfluss auf die Krümmungslinien in unendlicher Nähe des Nabelpunkts ist, so kann man die allgemeinste Gleichung algebraischer Flächen mit einem Nabelpunkte erhalten, von welchem aus 6 Krümmungslinienzweige in den durch $\varkappa$, λ, μ relativ bestimmten Richtungen gehen, indem man

$$\alpha' = \frac{3\varepsilon}{\varrho} + (\lambda\mu + \mu\varkappa + \varkappa\lambda + 2)\gamma$$

$$\beta' = \frac{\zeta}{\varrho} + \varkappa\lambda\mu\gamma; \quad \gamma' = \frac{\varepsilon}{\varrho} + \gamma$$

$$\delta' = \frac{3\zeta}{\varrho} + (\varkappa + \lambda + \mu + 2\varkappa\lambda\mu)\gamma$$

setzt und auf Gl. (31) die allgemeinste Coordinatentransformation anwendet.

Diese neue Darstellungsform unterscheidet sich von der anfänglichen wesentlich dadurch, dass der Uebergang zwischen ihr und einer beliebigen algebraischen Gleichung (29) lediglich durch lineare Substitutionen vollzogen wird, während Gl. (1) als Auflösung einer Gleichung nach z und Entwickelung in eine unendliche Reihe betrachtet ward. Dadurch wird namentlich das gewonnen, dass man über den Grad der Gl. (29) ohne Einbusse an Allgemeinheit verfügen kann. Soll z. B. die allgemeinste Gleichung einer Fläche 3. Grades mit einem Nabelpunkt und gegebenen umliegenden Krümmungslinien aufgestellt werden, so braucht man nur in Gl. (30) den Rest (31) auf folgende Terme zu beschränken:

$$Q' = (Ax^2 + Bxy + Cy^2)z + (D + Ex + Fy)z^2 + Gz^3$$

und die allgemeinste lineare Coordinatentransformation auszuführen.



XXII.

Einfache Methode, beim Interpoliren die zweiten Differenzen in Rechnung zu ziehen.

Von

Nell.

---

§ 1.

Zur Erleichterung der Lösung mathematischer, physikalischer, astronomischer Probleme bedient man sich fortwährend der Tafeln, welche die numerischen Werte gewisser Functionen der Eingangszahlen (Argumente) enthalten. Durch die Interpolationsrechnung erhält man die betreffenden Functionswerte auch für solche Werte des Arguments, welche in der Tafel nicht angegeben sind. Am einfachsten macht sich das Interpoliren, wenn gewisse Aenderungen des Arguments proportionale, oder doch fast proportionale Aenderungen der Function zur Folge haben; mit anderen Worten, wenn die zweiten und höheren Differenzen gleich Null, oder doch so klein sind, dass man sie ausser Acht lassen kann. Dies erfordert indes, dass die Argumente nach ziemlich kleinen Intervallen fortschreiten, wodurch die Tafel fast immer eine unverhältnissmässig grosse Ausdehnung erhalten müsste.

Seien nun

$a,\ a+w,\ a+2w,\ a+3w$ ... die aufeinanderfolgenden Argumente,
$f(a),\ f(a+w),\ f(a+2w),\ f(a+3w)$ ... die zugehörigen Functionswerte,
$\Delta',\ \Delta'',\ \Delta'''$ ... die erste, zweite und dritte Differenz,

so erhält man den zwischen a und $(a+w)$ liegenden Wert $(a+z)$ nach der bekannten Interpolationsformel:

$$f(a+z) = f(a) + n\Delta' + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta'' + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta'''$$

Hier ist $\frac{z}{w} = n$ gesetzt. Die Zahl n bewegt sich stets zwischen den Grenzen 0 und 1. Wir nehmen nun an, Δ''' sei so klein, dass das letzte Glied nicht in Betracht komme, und können daher schreiben:

$$f(a+z) = f(a) + n\left(\Delta' - \frac{1-n}{2}\Delta''\right)$$

Wäre der Ausdruck in der Klammer unveränderlich, so könnte man mittelst desselben einfach interpoliren. Beachtet man, dass Δ'' immer beträchtlich kleiner sein wird als Δ', und dass n zwischen 0 und 1 liegt, so wird man keinen allzugrossen Fehler begehen, wenn man in der Klammer $n = \frac{1}{2}$ setzt. Hiernach findet sich

$$f(a+z) = f(a) + n(\Delta' - \tfrac{1}{4}\Delta'') + \varphi$$

φ stellt den begangenen Fehler vor; derselbe findet sich

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\Delta'' n(n - \tfrac{1}{2})$$

Subtrahirt man daher von jeder ersten Differenz den vierten Teil der zweiten, so gibt φ den Fehler an, der dadurch entsteht, dass mit jener Zahl einfach interpolirt wird.

Um deutlich zu übersehen, wie gross dieser Fehler in jedem Falle sein wird, betrachten wir n als Abscisse und φ als Ordinate einer Curve, und lassen n die verschiedenen Werte von 0 bis 1 durchlaufen. (Fig. 1.) $AGBD$ stellt diese Curve (Parabel) vor; die Ordinate gibt an jeder Stelle die Grösse des Fehlers φ an. Für $n = 0$ und $n = \frac{1}{2}$ verschwindet der Fehler; für $n = \frac{1}{4} = AF$ ist er ein Maximum und beträgt $-\frac{\Delta''}{32}$. In der zweiten Hälfte des Intervalls wächst er rasch und erreicht für $n = 1$ den Wert $CD = \frac{\Delta''}{4}$.

Hätte man dagegen die zweite Differenz ganz vernachlässigt, so wäre der Fehler $\varphi' = \frac{n(n-1)}{2}\Delta''$ (Curve AEC). φ' verschwindet am Anfang und Ende des Intervalls, ist aber in der Mitte am grössten, nämlich $= BE = -\frac{\Delta''}{8}$.

Man ersieht hieraus, dass der Fehler φ namentlich nur in der ersten Hälfte des Intervalls kleiner ist als φ', dass er aber beträchtlich grösser wird, wenn die Zahl n sich der Einheit nähert. Dieser grössere Fehler lässt sich dadurch vermeiden, dass man in der zweiten Hälfte des Intervalls rückwärts interpolirt. Dafür ist

$$f(a+z) = f(a+w) - (1-n)\left(\varDelta' + \frac{n}{2}\varDelta''\right)$$

Setzt man im letzten Factor wieder $n = \frac{1}{2}$, so wird

$$f(a+z) = f(a+w) - (1-n)(\varDelta' + \tfrac{1}{4}\varDelta'') + \varphi$$

$$\varphi = -\frac{\varDelta''}{2}(1-n)(n-\tfrac{1}{2})$$

Die Construction dieser Gleichung für $n = \frac{1}{2}$ bis $n = 1$ gibt die Curve BJC; φ verschwindet für $n = \frac{1}{2}$ und für $n = 1$ und erreicht für $n = \frac{3}{4}$ den grössten Wert $= -\frac{\varDelta''}{32}$.

Werden in einer solchen Tafel überall statt der ersten und zweiten Differenzen die Zahlen $(\varDelta' - \frac{1}{4}\varDelta'')$ und $(\varDelta' + \frac{1}{4}\varDelta'')$ angesetzt, so hat man nicht mehr Arbeit, als beim einfachen Interpoliren. Ist $\varDelta''$ nicht grösser als 16, so beträgt der Fehler im ungünstigsten Falle höchstens eine halbe Einheit der letzten Decimale der Function und kommt also nicht in Betracht.

§ 2.

Der Fehler φ, welcher bei dem vereinfachten Interpolationsverfahren begangen wird, lässt sich noch etwas vermindern, wenn man in dem Ausdruck für $f(a+z)$ die Grösse $\varDelta''$ mit einer Zahl x multiplicirt, welche grösser ist, als $\frac{1}{4}$

$$f(a+z) = f(a) + n(\varDelta' - x\varDelta'') + \varphi$$

also

$$\varphi = \tfrac{1}{2}n\varDelta''(n + 2x - 1)$$

(Fig. 2.) Man erhält dann die Curve ANK statt AGB. Sei MN die grösste (negative) Ordinate, so wählen wir nun x so, dass $BK = -MN$ wird; dies führt, da

$$BK = \frac{\varDelta''}{8}(4x-1) \quad \text{und} \quad MN = -\frac{\varDelta''}{8}(1-2x)^2$$

zu der Bedingung:

$$4x - 1 = (1-2x)^2$$

daraus

$$x = 1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}29289$$

Der grösste Wert von φ wird dadurch $= \frac{\varDelta''}{46{,}63}$. Wenn daher die zweite Differenz nicht grösser ist als 23, so ist der Fehler im ungünstigsten Falle immer noch kleiner als eine halbe Einheit der letzten Decimale. Wir haben nun also

für das Vorwärtsinterpoliren $f(a+z) = f(a) + n(\Delta' - 0{,}29289\Delta'')$,
für das Rückwärtsinterpoliren $f(a+z) = f(a+w) - (1-n)(\Delta' + 0{,}29289\Delta'')$

Um auch zu wissen, wann man die dritte Differenz vernachlässigen kann, setzen wir:

$$\varphi'' = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\Delta'''$$

Dieser Wert wird am grössten für

$$n = 1 - \sqrt{\tfrac{1}{3}} = 0{,}42265$$

dafür wird

$$\varphi'' = \frac{\sqrt{3}}{27}\Delta''' = \frac{\Delta'''}{15{,}59}$$

Es kann daher die dritte Differenz bis zu 7 Einheiten betragen, ohne dass deren Vernachlässigung einen merklichen Einfluss auf das Resultat der Interpolation ausüben würde.

§ 3.

Tafel I.

N	$\sqrt{N}$	Δ'	Δ''
100	10,000		
		488	
110	10,488		—22
		466	
120	10,954		—18
		448	
130	11,402		—18
		430	
140	11,832		—15
		415	
150	12,247		—13
		402	
160	12,649		—13
		389	
170	13,038		—11
		378	
180	13,416		—10
		368	
190	13,784		—10
		358	
200	14,142		— 9

Tafel II.

N	$\sqrt{N}$	V	R
100	10,000		
		494,4	481,6
110	10,488		
		471,3	460,7
120	10,954		
		453,3	442,7
130	11,402		
		434,4	425,6
140	11,832		
		418,8	411,2
150	12,247		
		405,8	398,2
160	12,649		
		392,2	385,8
170	13,038		
		380,9	375,1
180	13,416		
		370,9	365,1
190	13,784		
		360,6	355,4
200	14,142		

Um die Anwendung dieser Regeln zu zeigen, sind in Tafel I. die Quadratwurzeln einer Reihe von Zahlen, nebst den ersten und zweiten Differenzen angegeben; in Tafel II. dieselben Wurzeln und daneben die nach den obigen Regeln gebildeten Interpolationszahlen, die durch die Ueberschriften V und R daran erinnern, welche Zahl beim Vorwärts- und welche beim Rückwärtsinterpoliren zu gebrauchen ist. Es soll z. B. $\sqrt{112{,}75}$ berechnet werden. Hier ist

$$z = 2{,}75, \quad w = 10, \quad n = \frac{2{,}75}{10} = 0{,}275$$

Da $n < \frac{1}{2}$, so wird vorwärts interpolirt.

$$\sqrt{112{,}75} = \sqrt{110} + 0{,}275 \,.\, 471{,}3 = 10{,}488 + 129{,}6 = 10{,}618$$

Die Benutzung der Tafel I. nach der Formel

$$f(a+z) = f(a) + n\Delta' + \frac{n(n-1)}{2}\Delta''$$

hätte ergeben:

$$\sqrt{112{,}75} = \sqrt{110} + 0{,}275 \,.\, 466 + \frac{0{,}275 \,.\, 0{,}725}{2} 18 = 10{,}488 + 128{,}15 + 1{,}79$$

$$\sqrt{112{,}75} = 10{,}488 + 129{,}94 = 10{,}618$$

Sei ferner $\sqrt{128{,}33}$ zu berechnen. Hier wird man, da $n = 0{,}833$, rückwärts interpoliren

$$\sqrt{128{,}33} = \sqrt{130} - \left(1 - \frac{8{,}33}{10}\right) 442{,}7 = 11{,}402 - 73{,}9 = 11{,}328$$

§ 4.

Die Anwendung der vereinfachten Interpolationsmethode soll noch an einer Tafel gezeigt werden, welche dazu dient, die Berechnung der Kreissegmentflächen zu erleichtern. Sei r der Halbmesser, α der Centriwinkel und S der Inhalt eines Kreissegments, so besteht die Beziehung

$$S = \tfrac{1}{2} r^2 (\alpha - \sin \alpha)$$

Bezeichne ferner $2a$ die Sehne und b die Pfeilhöhe des Segments, so erhält man α und r durch die Formeln

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4} = \frac{b}{a}, \qquad r = \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

Die Berechnung von S nach der angeführten Formel ist einerseits umständlich, andererseits erhält man dadurch, namentlich bei flachen Segmenten, nur eine geringe Genauigkeit. Denn sei z. B. $\alpha = 7^0\, 12'$, so gibt die 7stellige Logarithmentafel $\log \sin \alpha = 9{,}0980662$, also $\sin \alpha = 0{,}12533323$; Bogen $\alpha = 0{,}12566371$, $\alpha - \sin \alpha = 0{,}00033048$ und $\log(\alpha - \sin \alpha) = 6{,}5191452 - 10$.

Nun ist aber auf 12 Decimalstellen

$$\begin{aligned} \alpha &= 0{,}1256\,6370\,6144 \\ \sin \alpha &= 0{,}1253\,3323\,3564 \\ \hline \alpha - \sin \alpha &= 0{,}0003\,3047\,2580 \end{aligned}$$

Sucht man hiervon den Logarithmen, so wird

$$\log(\alpha - \sin \alpha) = 6{,}519\,1354 - 10$$

also gegen das vorhergefundene Resultat um 98 Einheiten der sieben-

ten Decimale verschieden. Man sieht also, dass in diesem Falle bei ausschliesslicher Anwendung der siebenstelligen Logarithmentafel der Wert von $\log(\alpha - \sin\alpha)$ auf höchstens 5 Decimalen richtig gefunden werden konnte. Der Grund davon ist darin zu suchen, dass bei einem kleinen Winkel Bogen und Sinus in den ersten Decimalstellen übereinstimmen, folglich in der Differenz der beiden eine geringere Anzahl geltender Ziffern vorkommt.

§ 5.

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, dass ein flaches Kreissegment mit Hülfe der Sinustafel sich nicht besonders genau berechnen lässt, wir wollen es deshalb versuchen, den Inhalt in anderer Weise zu bestimmen.

(Fig. 3.) Sei $ADCB$ die Hälfte eines Kreissegments,
- $AECB$ - - - Parabelsegments,

so ist, wenn $BC = a$, $AB = b$, das letztere $= \frac{2}{3}ab$.

Setzen wir die Ordinate FD des Kreisbogens $= y'$,
- - - - FE - Parabelbogens $= y$,

so ist

$$y'^2 = \frac{a^2+b^2}{b}x - x^2 \quad \text{und} \quad y^2 = \frac{a^2}{b}x$$

$$y'-y = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{b}x - x^2} - \sqrt{\frac{a^2}{b}x} = a\sqrt{\frac{x}{b}}\left\{\left(1+\frac{b(b-x)}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right\}$$

Entwickelt man nach dem binomischen Satze, so findet sich:

$$y'-y = a\sqrt{\frac{x}{b}}\left\{\frac{1}{2}\frac{b(b-x)}{a^2} - \frac{1}{2.4}\frac{b^2(b-x)^2}{a^4} + \frac{1.3}{2.4.6}\frac{b^3(b-x)^3}{a^6} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\frac{b^4(b-x)^4}{a^8} + \cdots\right\}$$

Wird der Inhalt des ganzen Kreissegments wieder durch S bezeichnet, so ist

$$\tfrac{1}{2}S = \tfrac{2}{3}ab + \int_0^b (y'-y)dx$$

Setzt man für $(y'-y)$ die obige Reihe, und führt die angedeutete Integration aus, so erhält man:

$$S = \tfrac{4}{3}ab\left\{1 + \frac{3}{1.3.5}\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{3}{3.5.7}\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \frac{3}{5.7.9}\left(\frac{b}{a}\right)^6 - \frac{3}{7.9.11}\left(\frac{b}{a}\right)^8 + \cdots\right\}$$

Diese Reihe für den Inhalt des Kreissegments kann nun auch benutzt werden, um die transcendente Grösse $(\alpha - \sin\alpha)$ zu berechnen. Denn es ist

$$a = r\sin\frac{\alpha}{2}, \quad b = a\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{4}$$

daher

$$S = \tfrac{4}{3}r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{4}\left\{1 + \frac{1}{5}\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{35}\mathrm{tg}^4\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{105}\mathrm{tg}^6\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{231}\mathrm{tg}^8\frac{\alpha}{4} + \ldots\right\}$$

Da nun auch

$$S = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$$

so erhält man durch Gleichsetzung der beiden Werte von S

$$\alpha - \sin\alpha = \frac{8}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{4}\left\{1 + \frac{1}{5}\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{35}\mathrm{tg}^4\frac{\alpha}{4} + \frac{1}{105}\mathrm{tg}^6\frac{\alpha}{4} - \ldots\right\}$$

Setzt man, wie in § 4. $\alpha = 7^0\,12'$, folglich

$$\frac{\alpha}{2} = 3^0\,36', \quad \frac{\alpha}{4} = 1^0\,48'$$

so erhält man mit Anwendung der siebenstelligen Logarithmentafel

$$\alpha - \sin\alpha = 0{,}0003\,3040\,735 + 0{,}0000\,0006\,526 - 0{,}0000\,0000\,001 = 0{,}0003\,3047\,260$$

also sehr nahe übereinstimmend mit dem genau berechneten Werte in § 4.

§ 6.

Die in § 5. entwickelte Reihe für S zeigt, dass für ganz flache Kreissegmente gesetzt werden kann: $S = \frac{4}{3}ab$; für den Halbkreis ist $b = a = r$, also dafür $S = \frac{\pi}{2}r^2$ oder $= \frac{\pi}{2}ab$. Setzen wir jetzt allgemein für irgend ein Segment $S = k\,ab$, so ist k ein Coefficient, der sich innerhalb der Grenzen $\frac{4}{3} = 1{,}333333..$ und $\frac{\pi}{2} = 1{,}570796$ bewegt, welcher sich daher mit Vorteil in eine Tabelle bringen lässt.

Zur Berechnung von k hat man nach den Entwickelungen des § 5. den folgenden Ausdruck:

$$k = \tfrac{4}{3}\left\{1 + \frac{1}{5}\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{1}{35}\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \frac{1}{105}\left(\frac{b}{a}\right)^6 - \frac{1}{231}\left(\frac{b}{a}\right)^8 + \frac{1}{429}\left(\frac{b}{a}\right)^{10} - \ldots\right\}$$

Nimmt man beiderseits die Logarithmen, so findet sich:

$$\log k = \log\frac{4}{3} + \frac{M}{5}\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{17M}{350}\left(\frac{b}{a}\right)^4 + \frac{47M}{2625}\left(\frac{b}{a}\right)^6 - \frac{11029M}{1347500}\left(\frac{b}{a}\right)^8 + \cdots$$

$\log\frac{4}{3} = 0{,}12493\,87366$ $\qquad\log\frac{47M}{2625} = 7{,}89075\,3$

$\log\frac{M}{5} = 8{,}93881\,431$ $\qquad\log\frac{11029M}{1347500} = 7{,}55079$

$\log\frac{17M}{350} = 8{,}32416\,52$

Hiernach wurde die beigefügte Tafel berechnet. In der mit A bezeichneten Spalte finden sich die Werte von $\log\frac{b}{a}$ und daneben der zugehörige $\log k$ auf 5 Decimalstellen.

Soll nun zu irgend einem A das zugehörige k bestimmt werden, so bezeichne

A^0 das nächst kleinere A der Tafel, $\log k^0$ den zugehörigen Wert von $\log k$
A' - - grössere A - - $\log k'$ - - - - -

dann ist

$$\log k = \log k^0 + (A - A^0)\,V, \text{ wenn } (A - A^0) < (A' - A)$$
$$\log k = \log k' - (A' - A)\,R, \quad - \quad (A - A^0) > (A' - A)$$

Von $A = 9{,}00$ bis $9{,}80$ beträgt das Intervall der Zahlen A in der Tafel 2 Einheiten der zweiten Decimale. Hiernach hätte man unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen $n = \frac{A - A^0}{2}$, wo die Differenz $A - A^0$ in Einheiten der zweiten Decimale auszudrücken ist. Man hätte also

$$\log k = \log k^0 + \frac{A - A^0}{2}\,V$$

Um indes nicht mit 2 dividiren zu müssen, wurde $\frac{V}{2}$ statt V angesetzt. Die gleiche Bemerkung gilt für R.

Zur Erläuterung mögen folgende Beispiele dienen:

1. $A = 8{,}6327$ $\quad A^0 = 8{,}6$ $\quad \log k^0 = 0{,}12508$
$A - A^0 = 0{,}327$ $\quad V = 6{,}8$ $\quad (A - A^0)\,V = \phantom{0{,}1250}2{,}2$
$\log k = 0{,}12510$

2. $A = 9{,}17264$ $\quad A' = 9{,}18$ $\quad \log k' = 0{,}12692$
$A' - A = 0{,}736$ $\quad R = 9{,}79$ $\quad (A' - A)\,R = \phantom{0{,}1269}7{,}2$
$\log k = 0{,}12685$

3. $A = 9{,}9750 \quad A^0 = 9{,}97 \quad \log k^0 = 0{,}18831$

$A - A^0 = 0{,}5 \quad V = 249{,}5 \quad (A - A^0)V = 124{,}75$

$\log k = 0{,}18956$

Da hier A in der Mitte liegt zwischen A^0 und A', so hätte man ebensowohl rückwärts interpoliren können. Dafür ist

$A' = 9{,}98 \quad A' - A = 0{,}5 \quad R = 254{,}5 \quad \log k' = 0{,}19083$

$(A' - A)R = 127{,}25$

$\log k = 0{,}18956$

§ 7.

Der Gebrauch der Tafel soll an einigen Beispielen gezeigt werden.

1. Von einem Kreissegment ist die Sehne = 195,96, die Pfeilhöhe = 25,36, also

$a = 97{,}98 \quad b = 25{,}36 \quad \log b = 1{,}40415 \quad \log k = 0{,}13067$

$\log a = 1{,}99114 \quad \log ab = 3{,}39529$

$\log \frac{b}{a} = 9{,}41301 \quad \log S = 3{,}52596$

$S = 3357{,}1$

2. $a = 709{,}89$; $b = 1087{,}83$. Da hier $b > a$, so ist das Segment grösser als der Halbkreis. Hier berechnet man den ganzen Kreis und subtrahirt das kleinere Segment. Wird die Pfeilhöhe des letzteren durch b' bezeichnet, so ist seine Fläche $= kab'$, daher $S = \pi r^2 - kab'$.

Nun ist $b' = 2r - b$, $r = \frac{a^2 + b^2}{2b}$, also $b' = \frac{a^2}{b}$, dies eingesetzt gibt

$$S = \frac{\pi}{4} b^2 \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 - k\left(\frac{a}{b}\right) a^2$$

Um k zu erhalten, geht man mit $\log \frac{b'}{a}$, oder wegen $b' = \frac{a^2}{b}$ mit $\log \frac{a}{b}$ in die Spalte A der Tafel ein.

$\log a = 2{,}851\,191$ *) $\qquad \log k = 0{,}15913$

$\log b = 3{,}032\,953 \qquad \log \frac{a}{b} = 9{,}81824$

$\log \frac{a}{b} = 9{,}818\,238 \qquad \log a^2 = 5{,}70238$

$5{,}67975 = \log 478354$

*) Das erste Glied in der Formel für S ist meist beträchtlich grösser als das zweite. Man tut daher gut, um ein sicheres Resultat zu erhalten, dasselbe mit 6 stelliger Logarithmen zu berechnen.

$$\log\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 9{,}636476$$

$$\log\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] = 0{,}156243\,^{*})$$

$$\log\tfrac{1}{4}\pi = 9{,}895093$$

$$\log b^2 = 6{,}065906$$

$$\log\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] = 0{,}312486$$

$$\overline{6{,}273482}$$

$$S = 1877078 - 478354 = 1398724$$

§ 8.

Sind von dem Kreissegmente die Grössen r und α statt a und b gegeben, so erhält man:

$$S = k\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\left(r\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

Man geht mit $\log\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$ in die Spalte A der Tafel ein und entnimmt $\log k$, z. B.

$$r = 25,\quad \alpha = 36^0\,25'\,20'',\quad \tfrac{1}{4}\alpha = 9^0\,6'\,20'',\quad \log\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} = 9{,}20486,$$

$$\log k = 0{,}12715,\quad \log S = 1{,}11765,\quad S = 13{,}111$$

Wenn der Wkl. $\alpha > 180^0$, so ist das Segment grösser als der Halbkreis. Man findet dann

$$S = \pi r^2 - k\operatorname{tg}\frac{360^0-\alpha}{4}\left(r\sin\frac{360-\alpha}{2}\right)^2 = \pi r^2 - k\cot\frac{\alpha}{4}\left(r\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

Den $\log k$ erhält man, indem man mit $\log\cot\frac{\alpha}{4}$ in die Spalte A eingeht.

---

*) Diesen Wert erhält man sehr einfach mittelst der sechsstelligen Tafel der Gauss'schen Logarithmen von Bremiker.



Tafel zur leichten Berechnung der Kreissegmentflächen.

Den Zahlen A ist noch -10 anzuhängen.

A	$\log k$	V	R
3.0	0.12494		
4.0	0.12494		
5.0	0.12494		
6.0	0.12494		
7.0	0.12494		
8.0	0.12495		
8.1	0.12495	1.0	1.0
8.2	0.12496	0.7	1.3
8.3	0.12497	1.4	2.6
8.4	0.12499	3.7	4.3
8.5	0.12503	4.1	5.9
8.6	0.12508	6.8	9.2
8.7	0.12516	9.4	14.6
8.8	0.12528	17.8	24.2
8.9	0.12549	26.7	37.3
9.00	0.12581	3.85	4.15
9.02	0.12589	4.35	4.65
9.04	0.12598	4.85	5.15
9.06	0.12608	5.35	5.65
9.08	0.12619	5.85	6.15
9.10	0.12631	6.21	6.79
9.12	0.12644	7.50	7.50
9.14	0.12659	7.06	7.94
9.16	0.12674	8.85	9.15
9.18	0.12692	9.21	9.79
9.20	0.12711		

A	$\log k$	V	R
9.20	0.12711	10.35	10.65
9.22	0.12732	10.56	11.44
9.24	0.12754	12.21	12.79
9.26	0.12779	13.06	13.94
9.28	0.12806	14.56	15.44
9.30	0.12836	16.06	16.94
9.32	0.12869	17.56	18.44
9.34	0.12905	18.91	20.09
9.36	0.12944	20.91	22.09
9.38	0.12987	22.91	24.09
9.40	0.13034	24.77	26.23
9.42	0.13085	27.27	27.73
9.44	0.13141	29.62	31.38
9.46	0.13202	32.62	34.38
9.48	0.13269	35.47	37.53
9.50	0.13342	38.97	41.03
9.52	0.13422	42.33	44.67
9.54	0.13509	46.33	48.67
9.56	0.13604	50.04	52.96
9.58	0.13707	55.04	57.96
9.60	0.13820	59.89	63.11
9.62	0.13943	65.24	68.76
9.64	0.14077	71.24	74.76
9.66	0.14223	76.80	81.20
9.68	0.14381	84.45	88.55
9.70	0.14554		

A	$\log k$	V	R
9.70	0.14554	91.30	95.70
9.72	0.14741	98.36	103.64
9.74	0.14943	107.36	112.64
9.76	0.15163	116.07	121.93
9.78	0.15401	125.92	132.08
9.80	0.15659	134.9	138.1
9.81	0.15796	140 4	143.6
9.82	0.15938	145.9	149.1
9.83	0.16085	151.2	154.8
9.84	0.16238	157.2	160.8
9.85	0.16397	163.1	166 9
9.86	0.16562	169.6	173.4
9.87	0.16734	176.1	179.9
9.88	0.16912	182.6	186.4
9.89	0.17096	188.9	193.1
9.90	0.17287	195.8	200.2
9.91	0.17485	203.4	207.6
9.92	0.17691	210.3	214.7
9.93	0.17903	217.7	222.3
9.94	0.18123	225.7	233.3
9.95	0.18351	233.8	238.2
9.96	0.18587	241.0	246 0
9.97	0.18831	249.5	254.5
9.98	0.19083	258.2	262.8
9.99	0.19343	266.2	270.8
0.00	0.19612		



XXIII.

Zur Theorie der Flächen gerader Ordnung.

Von

Eduard Mahler.

Artikel I.

„Gruppirt man die Tangentialebenen T einer Fläche F_2 2ter Ordnung so zu je zwei, dass die Schnittgeraden $\mathfrak{g}$ je zweier ein Tangentenebenenpaar bildenden Tangentialebenen in einer und derselben Ebene E zu liegen kommen, so ist das Erzeugniss dieses Systems von Tangentenebenenpaaren mit einem ihm projectivischen Flächenbüschel $(FB)_n$ $n$ter Ordnung eine Fläche der $2(n+1)$ter Ordnung."

Behufs Beweises dieses Satzes nehmen wir eine beliebige Ebene E' im Raume an, so schneidet diese das Flächenbüschel in einem Systeme von Curven $n$ter Ordnung, das mit dem Systeme der Geraden $\mathfrak{g}$, in denen E' von den Ebenen T geschnitten wird, in folgender Verwandtschaft steht. Jeder Curve $C_n^{(i)}$ entspricht eine bestimmte Fläche $F_n^{(i)}$ des Büschels $(F-B)_n$, dieser ein bestimmtes Tangentenebenenpaar $T^{(i)}$ und diesem zwei bestimmte Geraden $\mathfrak{g}_1^{(i)}$ und $\mathfrak{g}_2^{(i)}$, in denen das Tangentenebenenpaar $T^{(i)}$ die Ebene E' schneidet. Umgekehrt gehören zu jeder Geraden $\mathfrak{g}$ von E' zwei sich in ihr schneidende Tangentenebenen T, deren jede einem anderen Tangentenebenenpaare angehört; jedem anderen Tangentenebenenpaare entspricht aber eine andere Fläche F_n des Büschels $(F-B)_n$, d. h. jedem anderen Tangentenebenenpaare entspricht eine andere Curve C_n

des auf E' liegenden Curvensystems, also gehören zu jeder Geraden $\mathfrak{g}$ zwei Curven C_n. Nun ziehen wir in der Ebene E' eine beliebige Gerade $\mathfrak{G}$, so schneidet diese jede Curve $C_n^{(i)}$ in n Punkten $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}$, $\alpha_3^{(i)}$ . . . $\alpha_n^{(i)}$ und jede Gerade $\mathfrak{g}$ in einem Punkte γ. Es entstehen sonach auf $\mathfrak{G}$ zwei conlocale Punktreihen α und γ, von denen die eine 2-deutig, die andere $2n$-deutig ist. (Letzteres ist aus folgendem Grunde klar. Nachdem jeder Curve $C_n^{(i)}$ zwei Geraden $\mathfrak{g}_1^{(i)}$ und $\mathfrak{g}_2^{(i)}$ entsprechen, so entsprechen jedem der auf $C_n^{(i)}$ gelegenen n Punkte $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}$ . . . $\alpha_n^{(i)}$ der α-Reihe dieselben 2 Punkte $\gamma_1^{(i)}$, $\gamma_2^{(i)}$ der γ-Reihe, in denen $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{g}_1^{(i)}$ und $\mathfrak{g}_2^{(i)}$ geschnitten wird. Umgekehrt gehören wieder zu jeder Geraden $\mathfrak{g}$ zwei Curven C_n, also gehören zu jedem γ Punkte der γ-Reihe zwei Gruppen von n Punkten α der α-Reihe, d. i. $2n$ Punkte der α-Reihe). Die gemeinsamen Punkte dieser Reihen sind Punkte des Erzeugnisses, welches das System der Geraden $\mathfrak{g}$ mit dem ihm verwandten Systeme der Curven C_n bildet, also Punkte jener Curve, in der E' von dem zu suchenden Erzeugnisse geschnitten wird; nachdem nun die Anzahl jener gemeinsamen Punkte $2n+2=2(n+1)$ beträgt, so ist die Anzahl der Punkte, die die Gerade $\mathfrak{G}$ mit jener Schnittcurve überhaupt gemein haben kann, $2(n+1)$, und die Schnittcurve ist daher von der $2(n+1)$ten Ordnung. Dann ist aber unser Erzeugniss eine Fläche von der Ordnung $2(n+1)$.

Artikel II.

Sonach ist eine neue allgemeine Art zur Erzeugung von Flächen gerader Ordnung gegeben. Ist z. B. $n=1$, d. h. wir fragen nach dem Erzeugnisse eines Ebenenbüschels und jenes mit ihm projectivischen Systems von Tangentenebenenpaaren, so erhalten wir eine Fläche 4ter Ordnung. Doch scheint es nicht überflüssig, den hier verfolgten Gedankengang bei einem Beispiele nochmals durchzuführen und wir wählen hiezu die genannte Fläche 4ter Ordnung, Es soll also folgender Satz bewiesen werden.

„Das Erzeugniss des zu einer Fläche 2ter Ordnung gehörenden Systems von Tangentenebenenpaaren (die ihre Schnittgeraden in einer und derselben Ebene E haben) mit einem ihm projectivischen Ebenenbüschel B ist eine Fläche 4ter Ordnung."

Wir nehmen zu diesem Zwecke — wie früher — eine Ebene E' im Raume an, so schneidet diese das Büschel in einem Strahlenbüschel b, das mit dem Systeme der Geraden $\mathfrak{g}_1$ in denen E' von d Ebenen T geschnitten wird, in der Verwandtschaft steht, dass

jedem Strahle A^i des Büschels b zwei bestimmte Geraden $\mathfrak{g}_1^{(i)}$ und $\mathfrak{g}_2^{(i)}$ entsprechen, während andererseits zu jeder Geraden $\mathfrak{g}$ zwei Strahlen A des Büschels b gehören. Ziehen wir in der Ebene E' eine Gerade $\mathfrak{G}$, so entstehen auf dieser 2 zweideutige conlocale Punktreihen α und γ. Die gemeinsamen Punkte dieser Reihen, deren Zahl 4 ist, sind Punkte des Erzeugnisses, welches das System der Geraden $\mathfrak{g}$ mit dem ihm verwandten Strahlenbüschel b bildet, also Punkte jener Curve, in der E' von dem zu suchenden Erzeugnisse geschnitten wird. Jene Curve ist sonach von der 4ten Ordnung und sonach ist das gesuchte Erzeugniss eine Fläche 4ter Ordnung.

Nehmen wir statt eines Ebenbüschels ein Ebenenbündel, so ist das Erzeugniss ebenfalls eine Fläche 4ter Ordnung. Der Beweis ist analog zu führen wie früher, nur erhalten wir in der Ebene E' statt eines Strahlenbüschels b ein System von Geraden a, das aber zu den Geraden $\mathfrak{g}$ in derselben Verwandtschaft steht, wie das Strahlenbüschel b.

Artikel III.

Die Ebene E ward als Träger der den in Betracht gezogenen Tangentenebenenpaaren entsprechenden Geraden $\mathfrak{g}$ angesehen. Sucht man nun die Schnittcurve dieser Ebene E mit dem Erzeugnisse $F_{2(n+1)}$, so erscheint diese als Erzeugniss des genannten Geradensystems $\mathfrak{g}$ mit dem ihm verwandten Curvensysteme, in welchem E von den Flächen des Büschels $(F-B)_n$ geschnitten wird. Die verwandtschaftliche Beziehung ist die, dass jeder Geraden $\mathfrak{g}_0^{(i)}$ ein bestimmtes Tangentenebenenpaar, diesem eine bestimmte Fläche $F_n^{(i)}$ des Büschels $(F-B)_n$ und dieser eine bestimmte Curve $C_n^{(i)}$ entspricht, während andererseits jeder Curve $C_n^{(i)}$ eine bestimmte Fläche $F_n^{(i)}$, dieser ein bestimmtes Tangentenebenenpaar und diesem eine bestimmte Gerade $\mathfrak{g}^{(i)}$ entspricht. Während also bei der in Artikel I. in Betracht gezogenen Ebene E' jeder Curve $C_n^{(i)}$ zwei Geraden $\mathfrak{g}_1^{(i)}$ und $\mathfrak{g}_2^{(i)}$ entsprachen, entspricht hier jeder Curve $C_n^{(i)}$ nur eine Gerade $\mathfrak{g}^{(i)}$. Dies hat natürlich darin seinen Grund, dass hier die beiden Geraden $\mathfrak{g}_1^{(i)}$ und $\mathfrak{g}_2^{(i)}$ in eine einzige Gerade $\mathfrak{g}^{(i)}$ fallen, und dies eben vermöge der besonderen Eigenschaft der Ebene E, die wir ihr zu Grunde legten. Dies ist auch die Ursache, warum hier jeder Geraden $\mathfrak{g}^{(i)}$ nur eine einzige Curve $C_n^{(i)}$ entspricht, während bei der oben genannten Ebene E' jeder Geraden $\mathfrak{g}^{(i)}$ 2 Curven $C_n^{(i)}$ entsprachen. Die Curve, welche sonach als Erzeugniss des Geradensystems $\mathfrak{g}$ mit dem in derselben Ebene E gelegenen Curvensysteme C_n erscheint, ist scheinbar nicht von der $2(n+1)$ten, sondern $(n+1)$ten Ordnung und ist eine **Doppelcurve** des Erzeugnisses $F_{2(n+1)}$.

Wir haben sonach folgenden Satz:

„Die Schnittcurve unseres Erzeugnisses $F_{2(n+1)}$ mit der Ebene E ist eine Doppelcurve unseres Erzeugnisses."

Die in Artikel II. in Betracht gezogene Fläche 4. Ordnung hat also in der Schnittcurve derselben mit der Ebene E einen Doppelkegelschnitt.

Ebenso einleuchtend ist der folgende Satz:

„Die Scheitelcurve des Büschels $(F-B)_n$ ist eine Doppelcurve unseres Erzeugnisses."

Artikel IV.

„Construction der Schnittcurve $C_{2(n+1)}$ des Erzeugnisses $F_{2(n+1)}$ mit einer Ebene E'."

Wollten wir — ohne vorher das Erzeugniss $F_{2(n+1)}$ construirt zu haben — die Curve bestimmen, in der $F_{2(n+1)}$ eine beliebige Ebene E' schneidet, so könnte folgender Weg eingeschlagen werden. Bekanntlich ist die Schnittcurve als ein Erzeugniss aufzufassen, das das System der Geraden $\mathfrak{g}'$, in denen E' von den Tangentenebenen T geschnitten wird, mit dem Curvensysteme bildet, in dem E' von den Flächen des Büschels $(F-B)_n$ geschnitten wird. Nun ist dieses Erzeugniss von der Ordnung $2(n+1)$ und ist daher durch

$$2(n+1)\frac{2n+5}{2} = (n+1)(2n+5)$$

Punkte bestimmt. Nimmt man also eine genügende Zahl von Geraden $\mathfrak{G}'$ in E' an, so liegen auf jeder $2(n+1)$ Punkte, die als die $2(n+1)$ gemeinsamen Elemente jener 2 conlocalen Punktreihen erscheinen, welche die Schnittpunkte γ' der Geraden $\mathfrak{g}'$ mit $\mathfrak{G}'$ einerseits und die n Schnittpunkte einer jeden Curve des Curvensystems mit $\mathfrak{G}'$ andrerseits bilden. Unsere Aufgabe wäre sonach gelöst, sobald wir auf einer genügenden Anzahl von Geraden $\mathfrak{G}'$ (in der Regel $\frac{2n+5}{2}$ Geraden und nur wenn $(2n+5)$ eine ungerade Zahl ist, $\frac{2n+6}{2} = n+3$ Geraden) die $2(n+1)$ gemeinsamen Elemente jener Reihen bestimmt haben, um so die genügende Anzahl von Punkten zu haben, durch die eben die zu suchende Schnittcurve bestimmt erscheint.

Doch gestattet die Aufgabe eine andere Lösung.

Es sei $\mathfrak{L}$ eine Gerade, so beschaffen, dass jede der 2 durch sie gehenden Tangentenebenen der Trägerfläche F_2 die Letztere in einem Punkte berühre, der der Schnittcurve von F_2 mit E angehört. Dann kann $\mathfrak{L}$ als Träger eines Ebenenbüschels B aufgefasst werden, dessen einzelne Elemente zu den in E gelegenen Geraden $\mathfrak{g}$, in denen sich je 2 zu einem Paare gehörende Tangenten T schneiden, in derselben Beziehung stehen, wie E zu $\mathfrak{L}$. Ebenso sei $\mathfrak{L}'$ eine Gerade, die E' gegenüber dieselbe Rolle spielt, wie $\mathfrak{L}$ der Ebene gegenüber. Dann kann $\mathfrak{L}'$ als Träger eines Ebenenbüschels B' aufgefasst werden, dessen Elemente zu den Geraden $\mathfrak{g}'$ der Ebene E' ($\mathfrak{g}'$ sind Geraden der Ebene E', die in E' dieselbe Rolle spielen, wie dies die Geraden $\mathfrak{g}$ in E tun) in derselben Beziehung stehen, wie die Elemente von B zu den Geraden $\mathfrak{g}$.

Die beiden Büschel B und B' stehen in folgender Verwandtschaft mit einander. Jedem Elemente von B entspricht eine einzige Gerade $\mathfrak{g}$, dieser ein bestimmtes Ebenenpaar T, diesem eine bestimmte Fläche von $(F-B)_n$, dieser eine bestimmte Curve C_n in E', dieser eine bestimmte Gruppe von n Geraden $\mathfrak{g}'$, jeder derselben ein bestimmtes Element von B', also entspricht jedem Elemente von B eine bestimmte Gruppe von n Elementen des Büschels B'. Anderseits entspricht jedem Elemente von B' eine bestimmte Gerade $\mathfrak{g}'$, dieser eine bestimmte Curve C_n, dieser eine bestimmte Fläche von $(F-B)_n$, dieser ein bestimmtes Tangentenebenenpaar, diesem eine bestimmte Gerade $\mathfrak{g}$ in E und dieser ein bestimmtes Element von B. Das Erzeugniss der beiden Ebenenbüschel B und B' ist also eine Fläche der $(n+1)$ten Ordnung und soll mit $F_{(n+1)}$ bezeichnet werden. Diese Fläche schneidet F_2 in einer Curve der $2(n+1)$ten Ordnung; die längs dieser Curve an F_2 gelegten Tangentenebenen bilden eine Umhüllungsfläche der $2(n+1$ten Ordnung, welche E' in der gewünschten Schnittcurve trifft.

Letzteres ist aus folgendem Grunde klar. Nimmt man einen Punkt μ der Fläche $F_{(n+1)}$ an, so geht durch ihn und die Gerade $\mathfrak{L}$ ein einziges und zwar ganz bestimmtes Element von B; ebenso geht durch μ und $\mathfrak{L}'$ ein bestimmtes Element von B'. Es gibt nun ein Tangentenebenenpaar T, dessen Elemente F_2 dort berühren, wo Letzteres von $(\mathfrak{L}\mu)$ geschnitten wird. Dieses Tangentenebenenpaar schneidet E' in 2 Geraden $\mathfrak{g}_1'$ und $\mathfrak{g}_2'$, denen die Gerade $\mathfrak{g}'$ entspricht, in der sich je 2 ebenfalls ein Paar bildende Tangentenebenen schneiden, die F_2 dort berühren, wo $(\mathfrak{L}'\mu)$ die Fläche F_2 schneidet. Ist aber μ ein der Fläche $F_{(n+1)}$ und der Trägerfläche F_2 gemein-

samer Punkt, so fällt $\mathfrak{g}'$ mit einer seiner entsprechenden Geraden ($\mathfrak{g}_1'$ oder $\mathfrak{g}_2'$) zusammen.

Das hier Vorgebrachte zeigt auch, dass die Schnittcurve des Erzeugnisses $F_{2(n+1)}$ mit der Ebene E eine Doppelcurve des Erzeugnisses $F_{2(n+1)}$ ist, denn in diesem Falle ist die Ebene E' die Ebene E selbst.

Galpócz im August 1883.

XXIV.

Ueber lineare Gleichungen.

Von

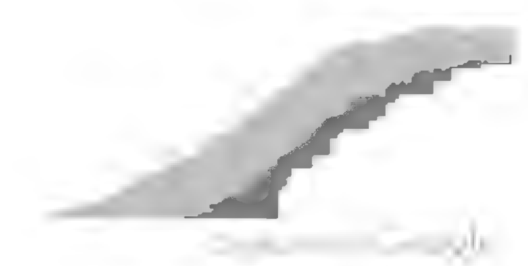
Herrn **C. Prediger,**
Professor in Clausthal.

In den Lehrbüchern der Algebra wird bei Auseinandersetzung der Methode von Bézout ein Umstand übergangen, welcher verdient etwas genauer untersucht zu werden, da er für den Anfänger eine Schwierigkeit bildet.

Wir meinen die Fälle, welche eintreten können, wenn aus den Bedingungsgleichungen für die unbekannten Multiplicatoren unendlich grosse Werte gefunden werden, so dass ein oder mehrere Werte der zu suchenden Unbekannten in unbestimmter Gestalt erscheinen, während diese Unbekannten fest bestimmte Werte haben und demnach die unbestimmte Form nur eine scheinbare ist. Man kann freilich in einem solchen Falle mit Hülfe einer andern Methode, oder durch andere Verbindung der Gleichungen den wahren Wert finden, es ist aber doch interessant darzulegen, auf welche Weise derselbe erhalten werden kann, ohne den einmal gewählten Gang der Auflösung und die Methode von Bézout zu verlassen.

Man habe n Gleichungen vom ersten Grade:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = k_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = k_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = k_n \end{array}\right\} \quad (A)$$



so wird die Auflösung derselben für die Unbekannten $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ nach der Methode von Bézout bekanntlich dadurch vollzogen, dass man $n-1$ Gleichungen mit den Factoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_{n-1}$ multiplicirt, die Summe dieser sämmtlichen Gleichungen bildet und mit derselben die letzte mit keinem Factor behaftete Gleichung durch Addition (oder Subtraction) verbindet. Dadurch gelangt man zu folgender Gleichung:

$$\begin{aligned}
&\{a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + a_{31}\lambda_3 + \ldots + a_{n-1,1}\lambda_{n-1} + a_{n1}\}x_1 \\
+&\{a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + a_{32}\lambda_3 + \ldots + a_{n-1,2}\lambda_{n-1} + a_{n2}\}x_2 \\
+&\{a_{13}\lambda_1 + a_{23}\lambda_2 + a_{33}\lambda_3 + \ldots + a_{n-1,3}\lambda_{n-1} + a_{n3}\}x_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+&\{a_{1n}\lambda_1 + a_{2n}\lambda_2 + a_{3n}\lambda_3 + \ldots + a_{n-1,n}\lambda_{n-1} + a_{nn}\}x_n \\
=& k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 + \ldots + k_{n-1}\lambda_{n-1} + k_n.
\end{aligned}$$

Für irgend eine Unbekannte x_r ergiebt sich:

$$x_r = \frac{k_1\ \lambda_1 + k_2\ \lambda_2 + k_3\ \lambda_3 + \ldots + k_{n-1}\ \lambda_{n-1} + k_n}{a_{1r}\lambda_1 + a_{2r}\lambda_2 + a_{3r}\lambda_3 + \ldots + k_{n-1,r}\lambda_{n-1} + a_{nr}} \tag{B}$$

und die Werte der Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ u. s. w. erhält man aus folgenden Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + a_{31}\lambda_3 + \ldots + a_{n-1,1}\lambda_{n-1} + a_{n1} &= 0 \\
a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + a_{32}\lambda_3 + \ldots + a_{n-1,2}\lambda_{n-1} + a_{n2} &= 0 \\
a_{13}\lambda_1 + a_{23}\lambda_2 + a_{33}\lambda_3 + \ldots + a_{n-1,3}\lambda_{n-1} + a_{n3} &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\
a_{1n}\lambda_1 + a_{2n}\lambda_2 + a_{3n}\lambda_3 + \ldots + a_{n-1,n}\lambda_{n-1} + a_{nn} &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{C}$$

deren Anzahl gleich $n-1$ sein muss.

Ereignet es sich nun, dass die Werte der unbekannten Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ unendlich gross ausfallen, so erscheint der Wert für x_r in unbestimmter Gestalt, welche in der Regel nur eine scheinbare ist, da x_r meistens einen bestimmten Wert hat.

Will man in solchem Falle die Auflösung mit Hülfe der Methode von Bézout durchführen, so dividire man jede der Gleichungen im System (C) durch λ_{n-1} und gehe zur Grenze über, dann ergeben sich unter der Voraussetzung, dass $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots a_{nn}$ endliche Grössen bezeichnen, die Gleichungen:

(D)

$$a_{11}\lim\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-1}}\right) + a_{21}\lim\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_{n-1}}\right) + a_{31}\lim\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_{n-1}}\right) + \ldots + a_{n-1,1} = 0$$

$$a_{12}\lim\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-1}}\right) + a_{22}\lim\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_{n-1}}\right) + a_{32}\lim\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_{n-1}}\right) + \ldots + a_{n-1,2} = 0$$

$$a_{13}\lim\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-1}}\right)+a_{23}\lim\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_{n-1}}\right)+a_{33}\lim\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_{n-1}}\right)+\ldots+a_{n-1,3}=0$$

. . . .

$$a_{1n}\lim\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-1}}\right)+a_{2n}\lim\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_{n-1}}\right)+a_{3n}\lim\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_{n-1}}\right)+\ldots+a_{n-1,n}=0$$

Wird der Ausdruck für x_r in folgender Gestalt

$$x_r=\frac{k_1\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-1}}\right)+k_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_{n-1}}\right)+k_3\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_{n-1}}\right)+\ldots+k_{n-1}+\frac{k_n}{\lambda_{n-1}}}{a_{1r}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-1}}\right)+a_{2r}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_{n-1}}\right)+a_{3r}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_{n-1}}\right)+\ldots+a_{n-1,r}+\frac{a_{nr}}{\lambda_{n-1}}}$$

dargestellt, $\lim x_r$ gebildet, rechter Hand die Werte von

$$\lim\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-1}}\right),\quad \lim\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_{n-1}}\right),\quad \lim\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_{n-1}}\right)\text{ u. s. w.}$$

durch diejenigen ersetzt, welche man aus den Gleichungen (D) erhält, so ergiebt sich durch Uebergang zur Grenze, unter der Voraussetzung, dass k_n und a_{nr} endliche Grössen bedeuten, der wahre Wert von x_r.

Ein zweites Verfahren zur Auffindung des wahren Wertes für x_r besteht darin, dass man mit Hülfe der Gleichungen (C) $n-2$ Multiplicatoren als Functionen des $n-1$ten darstellt und die gefundenen Werte in den Ausdruck für x_r einführt. Dadurch wird x_r eine lineare Function dieses Multiplicators und erhält die Gestalt:

$$x_r=\frac{A+B\lambda_1}{A'+B'\lambda_1} \tag{E}$$

Nach vollführter Division im Zähler und im Nenner durch λ_1 und Berücksichtigung, dass sowohl A als auch A' nur endliche Werte haben können, erscheint beim Uebergang zur Grenze für ein unendlich gross werdendes λ_1 der wahre Wert:

$$\lim x_r=\frac{B}{B'} \tag{F}$$

Die nachfolgenden Beispiele werden diese Methoden in ein helles Licht stellen.

Beispiel 1. Es seien die Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned}2x_1+3x_2+5x_3&=17\\4x_1+6x_2+7x_3&=31\\9x_1-7x_2+2x_3&=15\end{aligned}$$

welche, wenn dieselben durch Determinanten aufgelöst werden, die Lösungen $x_1=3$, $x_2=2$, $x_3=1$ ergeben.

so wird die Auflösung derselben für die Unbekannten $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ nach der Methode von Bézout bekanntlich dadurch vollzogen, dass man $n-1$ Gleichungen mit den Factoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_{n-1}$ multiplicirt, die Summe dieser sämmtlichen Gleichungen bildet und mit derselben die letzte mit keinem Factor behaftete Gleichung durch Addition (oder Subtraction) verbindet. Dadurch gelangt man zu folgender Gleichung:

$$\begin{aligned}
&\{a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + a_{31}\lambda_3 + \ldots + a_{n-1,1}\lambda_{n-1} + a_{n1}\}x_1 \\
+&\{a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + a_{32}\lambda_3 + \ldots + a_{n-1,2}\lambda_{n-1} + a_{n2}\}x_2 \\
+&\{a_{13}\lambda_1 + a_{23}\lambda_2 + a_{33}\lambda_3 + \ldots + a_{n-1,3}\lambda_{n-1} + a_{n3}\}x_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+&\{a_{1n}\lambda_1 + a_{2n}\lambda_2 + a_{3n}\lambda_3 + \ldots + a_{n-1,n}\lambda_{n-1} + a_{nn}\}x_n \\
=& k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 + \ldots + k_{n-1}\lambda_{n-1} + k_n.
\end{aligned}$$

Für irgend eine Unbekannte x_r ergiebt sich:

$$x_r = \frac{k_1\ \lambda_1 + k_2\ \lambda_2 + k_3\ \lambda_3 + \ldots + k_{n-1}\ \lambda_{n-1} + k_n}{a_{1r}\lambda_1 + a_{2r}\lambda_2 + a_{3r}\lambda_3 + \ldots + k_{n-1,r}\lambda_{n-1} + a_{nr}} \qquad \text{(B)}$$

und die Werte der Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ u. s. w. erhält man aus folgenden Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}\lambda_1 + a_{21}\lambda_2 + a_{31}\lambda_3 + \ldots + a_{n-1,1}\lambda_{n-1} + a_{n1} &= 0 \\
a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + a_{32}\lambda_3 + \ldots + a_{n-1,2}\lambda_{n-1} + a_{n2} &= 0 \\
a_{13}\lambda_1 + a_{23}\lambda_2 + a_{33}\lambda_3 + \ldots + a_{n-1,3}\lambda_{n-1} + a_{n3} &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\
a_{1n}\lambda_1 + a_{2n}\lambda_2 + a_{3n}\lambda_3 + \ldots + a_{n-1,n}\lambda_{n-1} + a_{nn} &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(C)}$$

deren Anzahl gleich $n-1$ sein muss.

Ereignet es sich nun, dass die Werte der unbekannten Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ unendlich gross ausfallen, so erscheint der Wert für x_r in unbestimmter Gestalt, welche in der Regel nur eine scheinbare ist, da x_r meistens einen bestimmten Wert hat.

Will man in solchem Falle die Auflösung mit Hülfe der Methode von Bézout durchführen, so dividire man jede der Gleichungen im System (C) durch λ_{n-1} und gehe zur Grenze über, dann ergeben sich unter der Voraussetzung, dass $a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots a_{nn}$ endliche Grössen bezeichnen, die Gleichungen:

$$\text{(D)}$$

$$a_{11}\lim\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-1}}\right) + a_{21}\lim\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_{n-1}}\right) + a_{31}\lim\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_{n-1}}\right) + \ldots + a_{n-1,1} = 0$$

$$a_{12}\lim\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-1}}\right) + a_{22}\lim\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_{n-1}}\right) + a_{32}\lim\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_{n-1}}\right) + \ldots + a_{n-1,2} = 0$$

$$a_{13}\lim\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-1}}\right)+a_{23}\lim\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_{n-1}}\right)+a_{33}\lim\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_{n-1}}\right)+\ldots+a_{n-1,3}=0$$

. . . .

$$a_{1n}\lim\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-1}}\right)+a_{2n}\lim\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_{n-1}}\right)+a_{3n}\lim\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_{n-1}}\right)+\ldots+a_{n-1,n}=0$$

Wird der Ausdruck für x_r in folgender Gestalt

$$x_r=\frac{k_1\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-1}}\right)+k_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_{n-1}}\right)+k_3\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_{n-1}}\right)+\ldots+k_{n-1}+\frac{k_n}{\lambda_{n-1}}}{a_{1r}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-1}}\right)+a_{2r}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_{n-1}}\right)+a_{3r}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_{n-1}}\right)+\ldots+a_{n-1,r}+\frac{a_{nr}}{\lambda_{n-1}}}$$

dargestellt, $\lim x_r$ gebildet, rechter Hand die Werte von

$$\lim\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{n-1}}\right),\quad \lim\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_{n-1}}\right),\quad \lim\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_{n-1}}\right)\ \text{u. s. w.}$$

durch diejenigen ersetzt, welche man aus den Gleichungen (D) erhält, so ergiebt sich durch Uebergang zur Grenze, unter der Voraussetzung, dass k_n und a_{nr} endliche Grössen bedeuten, der wahre Wert von x_r.

Ein zweites Verfahren zur Auffindung des wahren Wertes für x_r besteht darin, dass man mit Hülfe der Gleichungen (C) $n-2$ Multiplicatoren als Functionen des $n-1$ ten darstellt und die gefundenen Werte in den Ausdruck für x_r einführt. Dadurch wird x_r eine lineare Function dieses Multiplicators und erhält die Gestalt:

$$x_r=\frac{A+B\lambda_1}{A'+B'\lambda_1} \tag{E}$$

Nach vollführter Division im Zähler und im Nenner durch λ_1 und Berücksichtigung, dass sowohl A als auch A' nur endliche Werte haben können, erscheint beim Uebergang zur Grenze für ein unendlich gross werdendes λ_1 der wahre Wert

$$\lim x_r=\frac{B}{B'} \tag{F}$$

Die nachfolgenden Beispiele werden diese Methoden in ein helles Licht stellen.

Beispiel 1. Es seien die Gleichungen gegeben:

[illegible]

welche, wenn dieselben durch Determinanten aufgelöst werden, die Lösungen [illegible]

Wendet man nun die Methode von Bézout in der Weise an, dass man die zweite und dritte Gleichung mit den Coefficienten λ_1 und λ_2 multiplicirt und hierauf sämmtliche Gleichungen addirt, dann ergiebt sich die Gleichung:

$$(2+4\lambda_1+9\lambda_2)x_1+(3+6\lambda_1-7\lambda_2)x_2+(5+7\lambda_1+2\lambda_2)x_3=17+31\lambda_1+15\lambda_2$$

Behuf Bestimmung von x_1 ergiebt sich:

$$x_1=\frac{17+31\lambda_1+15\lambda_2}{2+4\lambda_1+9\lambda_2},\quad \text{ferner:}\quad \begin{matrix}3+6\lambda_1-7\lambda_2=0\\ 5+7\lambda_1+2\lambda_2=0\end{matrix}$$

aus den Bedingungsgleichungen folgt:

$$\lambda_1=-\frac{41}{61},\quad \lambda_2=-\frac{9}{61}$$

und nach Einsetzung dieser Werte in den Ausdruck für x_1 erhält man:

$$x_1=\frac{17-\frac{31.41}{61}-\frac{15.9}{61}}{2-\frac{4.41}{61}-\frac{9.9}{61}}=3$$

Es ergiebt sich ferner:

$$x_2=\frac{17+31\lambda_1+15\lambda_2}{3+6\lambda_1-7\lambda_2}\quad \text{und}\quad \begin{matrix}2+4\lambda_1+9\lambda_2=0\\ 5+7\lambda_1+2\lambda_2=0\end{matrix}$$

aus diesen Bedingungsgleichungen findet man:

$$\lambda_1=-\frac{41}{55},\quad \lambda_2=\frac{6}{55}$$

und wenn substituirt wird:

$$x_2=\frac{17-\frac{31.41}{55}+\frac{15.6}{55}}{3-\frac{6.41}{55}-\frac{7.6}{55}}=2$$

Zur Bestimmung von x_3 findet sich:

$$x_3=\frac{17+31\lambda_1+15\lambda_2}{5+7\lambda_1+2\lambda_2}$$

daneben bestehen die Gleichungen:

$$2+4\lambda_1+9\lambda_2=0$$
$$3+6\lambda_1-7\lambda_2=0$$

aus welchen $\lambda_1=-\frac{1}{2}$, $\lambda_2=0$ folgt. Durch Substitution findet sich dann:

$$x_3=\frac{17-\frac{31}{2}}{5-\frac{7}{2}}=1$$

Man erhält also nach dieser Methode und die aufzulösenden Gleichungen auf diese Art componirt, die nämlichen Werte für x_1, x_2 und x_3 wie durch die Methode der Determinanten.

Hätte man aber die Auflösung dieser Gleichungen in der Weise bewirkt, dass man die erste und zweite mit den Coefficienten λ_1 und λ_2 multiplicirte und von der Summe dieser beiden Gleichungen die dritte subtrahirte, dann hätte sich die Gleichung ergeben:

$$(2\lambda_1+4\lambda_2-9)x_1+(3\lambda_1+6\lambda_2+7)x_2+(5\lambda_1+7\lambda_2-2)x_3 = 17\lambda_1+31\lambda_2-15$$

Die Werte für x_1 und x_2 ergeben sich genau wie oben, für den Wert von x_3 erhält man aber:

$$x_3 = \frac{17\lambda_1+31\lambda_2-15}{5\lambda_1+7\lambda_2-2}$$

daneben bestehen die Bedingungsgleichungen:

$$2\lambda_1+4\lambda_2-9 = 0$$
$$3\lambda_1+6\lambda_2+7 = 0$$

aus welchen $\lambda_1 = +\infty$, $\lambda_2 = -\infty$ folgt*). Dadurch erhält x_3 die Gestalt:

$$x_3 = \frac{\infty-\infty-15}{\infty-\infty-2}$$

welches eine unbestimmte Form ist, es herrscht aber wie man sieht, nur eine scheinbare Unbestimmtheit vor, denn x_3 hat in diesem Falle einen festen bestimmten Wert. Um diesen zu finden, erhält man nach der ersten Methode aus den obigen Bedingungsgleichungen:

$$2\frac{\lambda_1}{\lambda_2}+4-\frac{9}{\lambda_2} = 0$$
$$3\frac{\lambda_1}{\lambda_2}+6+\frac{7}{\lambda_2} = 0$$

und hieraus:

$$\lim\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) = -2$$

Der Wert von x_3 kann aber auch in der Form

---

*) Da diese Gleichungen auf die Formen:

$$\lambda_1+2\lambda_2 = \tfrac{9}{2}$$
$$\lambda_1+2\lambda_2 = -\tfrac{7}{3}$$

gebracht werden können, so erkennt man, dass diese nicht mit einander verträglich sind und nur durch unendlich grosse Werte für λ_1 und λ_2 erfüllt werden können.

$$x_3 = \frac{17\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) + 31 - \frac{15}{\lambda_2}}{5\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) + 7 - \frac{2}{\lambda_2}}$$

dargestellt werden. Macht man nun hier den Grenzenübergang und substituirt für $\lim\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$ den eben gefundenen Wert, so kommt:

$$\lim x_3 = 1$$

welches der wahre Wert ist.

Nach der zweiten Methode ergiebt sich aus den Bedingungsgleichungen

$$\lambda_2 = \frac{9 - 2\lambda_1}{4} = -\frac{7 + 3\lambda_1}{6}$$

und nach Einführung des ersten Wertes in den Ausdruck für x_3:

$$x_3 = \frac{17\lambda_1 + 31\left(\frac{9-2\lambda_1}{4}\right) - 15}{5\lambda_1 + 7\left(\frac{9-2\lambda_1}{4}\right) - 2} = \frac{6\lambda_1 + 219}{6\lambda_1 + 56} = \frac{6 + \frac{219}{\lambda_1}}{6 + \frac{56}{\lambda_1}}$$

also nach ausgeführtem Grenzenübergang:

$$\lim x_3 = 1$$

Nach Einsetzung des zweiten Wertes erhält man:

$$x_3 = \frac{17\lambda_1 - 31\left(\frac{7+3\lambda_1}{6}\right) - 15}{5\lambda_1 - 7\left(\frac{7+3\lambda_1}{6}\right) - 2} = \frac{9\lambda_1 - 307}{9\lambda_1 - 61} = \frac{9 - \frac{307}{\lambda_1}}{9 - \frac{61}{\lambda_1}}$$

also wenn man zur Grenze übergeht:

$$\lim x_3 = 1$$

wie oben.

Beispiel 2. Es sind die Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 &= -19 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 29 \\ 9x_1 - 15x_2 + 7x_3 &= 91 \end{aligned}$$

Wird die Auflösung mit Hülfe der Determinanten vollführt, dann ergiebt sich $x_1 = 2$, $x_3 = -3$, $x_3 = 4$. Multiplicirt man die zweite und die dritte Gleichung mit den Factoren λ_1 und λ_2 und addirt sämmtliche Gleichungen, so findet sich nach der Methode von Bézout:

$$(2+3\lambda_1+9\lambda_2)x_1+(1-5\lambda_1-15\lambda_2)x_2+(-5+2\lambda_1+7\lambda_2)x_3$$
$$=-19+29\lambda_1+91\lambda_2$$

Zur Bestimmung von x_1 ergiebt sich:

$$x_1=\frac{91\lambda_2+29\lambda_1-19}{9\lambda_2+3\lambda_1+2}$$

und die Bedingungsgleichungen:

$$-15\lambda_2-5\lambda_1+1=0$$
$$7\lambda_2+2\lambda_1-5=0$$

aus welchen sich

$$\lambda_1=-\frac{68}{5},\quad \lambda_2=\frac{23}{5}$$

ergiebt. Führt man diese Werte in den Ausdruck für x_1 ein, dann ist:

$$x_1=\frac{91\cdot\frac{23}{5}-29\cdot\frac{68}{5}-19}{9\cdot\frac{23}{5}-3\cdot\frac{68}{5}+2}=2$$

wie bereits durch Determinanten gefunden wurde. Ferner ist:

$$x_2=\frac{91\lambda_2+29\lambda_1-19}{-15\lambda_2-5\lambda_1+1}$$

dabei:

$$9\lambda_2+3\lambda_1+2=0$$
$$7\lambda_2+2\lambda_1-5=0$$

aus welchen Gleichungen $\lambda_1=-\frac{59}{3}$, $\lambda_2=\frac{19}{3}$ folgt. Nun ergiebt sich durch Substitution dieser Werte:

$$x_2=\frac{91\cdot\frac{19}{3}-29\cdot\frac{59}{3}-19}{-15\cdot\frac{19}{3}+5\cdot\frac{59}{3}+1}=-3$$

wie oben gefunden wurde.

Für den Wert von x_3 ergiebt sich aber:

$$x_3=\frac{91\lambda_2+29\lambda_1-19}{7\lambda_2+2\lambda_1-5}$$

daneben die Bedingungsgleichungen:

$$9\lambda_2+3\lambda_1+2=0$$
$$-15\lambda_2-5\lambda_1+1=0$$

aus welchen sich $\lambda_1 = -\infty$, $\lambda_2 = +\infty$ findet*), dadurch wird:

$$x_3 = \frac{\infty - \infty - 19}{\infty - \infty - 5}$$

welche Form unbestimmt ist. Allein diese Unbestimmtheit ist nur scheinbar, denn aus den Multiplicatorengleichungen findet man nach der ersten Methode:

$$\lim\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) = -3$$

und weil

$$x_3 = \frac{91 + 29\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) - \frac{19}{\lambda_2}}{7 + 2\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) - \frac{5}{\lambda_2}}$$

ist, so ergiebt sich durch Uebergang zur Grenze und Einführung des Wertes von $\lim\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$ in den Bruch rechter Hand:

$$\lim x_3 = 4$$

welches der wahre Wert ist.

Nach der zweiten Methode ergiebt sich:

$$\lambda_2 = \frac{1 - 5\lambda_1}{15} = -\left(\frac{2 + 3\lambda_1}{9}\right)$$

folglich nach Einführung des ersten Wertes in den Ausdruck für x_3:

$$x_3 = \frac{91\left(\frac{1 - 5\lambda_1}{15}\right) + 29\lambda_1 - 19}{7\left(\frac{1 - 5\lambda_1}{15}\right) + 2\lambda_1 - 5} = \frac{20\lambda_1 + 194}{5\lambda_1 + 68} = \frac{20 + \frac{194}{\lambda_1}}{5 + \frac{68}{\lambda_1}}$$

daher:

$$\lim x_3 = 4$$

wie oben.

Beispiel 3. Man habe die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 8x_4 &= 13 \\ 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 35 \\ -x_1 + 5x_2 + 15x_3 &= 20 \\ 9x_1 + 4x_4 &= 57 \end{aligned}$$

---

*) Weil diese Gleichungen auf die Form:

$$\lambda_1 + 3\lambda_2 = -\tfrac{2}{3}$$
$$\lambda_1 + 3\lambda_2 = \tfrac{1}{5}$$

gebracht werden können, so ist ersichtlich, dass nur unendlich grosse Werte λ_1 und λ_2 denselben Genüge leisten.

aus welchen mit Hülfe der Determinanten $x_1 = 5$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ gefunden wird.

Für den Fall, dass man die Methode von Bézout anwenden will, ergiebt sich, wenn man die zweite, dritte und vierte Gleichung mit den Multiplicatoren λ_1, λ_2, λ_3 versieht und sämmtliche Gleichungen addirt:

$$(9\lambda_3 - \lambda_2 + 5\lambda_1 + 4)x_1 + (5\lambda_2 + 2\lambda_1 - 3)x_2 + (15\lambda_2 + 6\lambda_1 + 7)x_3 + (4\lambda_3 - 8)x_4 = 57\lambda_3 + 20\lambda_2 + 35\lambda_1 + 13$$

Zur Bestimmung von x_1 hat man nun:

$$x_1 = \frac{57\lambda_3 + 20\lambda_2 + 35\lambda_1 + 13}{9\lambda_3 - \lambda_2 + 5\lambda_1 + 4}$$

daneben bestehen die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} 5\lambda_2 + 2\lambda_1 - 3 &= 0 \\ 15\lambda_2 + 6\lambda_1 + 7 &= 0 \\ 4\lambda_3 \qquad\qquad - 8 &= 0 \end{aligned}$$

aus welchen $\lambda_1 = -\infty$, $\lambda_2 = +\infty$, $\lambda_3 = 2$ folgt. Dadurch wird:

$$x_1 = \frac{127 + \infty - \infty}{22 - \infty - \infty}$$

welche Form scheinbar unbestimmt ist; um den wahren Wert zu finden, haben wir aus den beiden ersten Bedingungsgleichungen nach der ersten Methode:

$$\lim\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) = -\tfrac{5}{2}, \quad \lim\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right) = 0$$

ferner ist auch:

$$x_1 = \frac{57\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right) + 20 + 35\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) + \frac{13}{\lambda_2}}{9\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right) - 1 + 5\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) + \frac{4}{\lambda_2}}$$

geht man in dieser Gleichung zur Grenze über und führt die Werte für $\lim\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$ und $\lim\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right)$ ein, dann findet sich:

$$\lim x_1 = 5$$

Ferner ist:

$$\lambda_3 = 2, \quad \lambda_2 = \frac{3 - 2\lambda_1}{5} = -\left(\frac{7 + 6\lambda_1}{15}\right)$$

man hat also nach der zweiten Methode:

$$x_1 = \frac{127 + 20\left(\frac{3-2\lambda_1}{5}\right) + 35\lambda_1}{22 - \left(\frac{3-2\lambda_1}{5}\right) + 5\lambda_1} = \frac{135\lambda_1 + 695}{27\lambda_1 + 107} = \frac{135 + \frac{695}{\lambda_1}}{27 + \frac{107}{\lambda_1}}$$

und durch Uebergang zur Grenze:

$$\lim x_1 = 5$$

wie oben.

Um den Wert von x_2 zu erhalten hat man:

$$x_2 = \frac{57\lambda_3 + 20\lambda_2 + 35\lambda_1 + 13}{5\lambda_2 + 2\lambda_1 - 3}$$

ferner existiren die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} 9\lambda_3 - \lambda_2 + 5\lambda_1 + 4 &= 0 \\ 15\lambda_2 + 6\lambda_1 + 7 &= 0 \\ 4\lambda_3 \qquad\qquad - 8 &= 0 \end{aligned}$$

aus welchen

$$\lambda_1 = -\frac{337}{81}, \quad \lambda_2 = \frac{97}{81}, \quad \lambda_3 = +2$$

erhalten wird; schreibt man diese Werte in den Ausdruck für x_2 ein und reducirt, so ergiebt sich:

$$x_2 = -1$$

wie oben.

Um den Wert von x_3 zu erhalten ist:

$$x_3 = \frac{57\lambda_3 + 20\lambda_2 + 35\lambda_1 + 13}{15\lambda_2 + 6\lambda_1 + 7}$$

und es bestehen die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} 9\lambda_3 - \lambda_2 + 5\lambda_1 + 4 &= 0 \\ 5\lambda_2 + 2\lambda_1 - 3 &= 0 \\ 4\lambda_3 \qquad\qquad - 8 &= 0 \end{aligned}$$

diese Gleichungen geben:

$$\lambda_1 = -\frac{107}{27}, \quad \lambda_2 = \frac{59}{27}, \quad \lambda_3 = 2$$

und eingeführt in den Wert für x_3 giebt:

$$x_3 = 2$$

Endlich findet sich zur Bestimmung des Wertes von x_4:

$$x_4 = \frac{57\lambda_3 + 20\lambda_2 + 35\lambda_1 + 13}{4\lambda_3 - 8}$$

ferner hat man die Bedingungsgleichungen:

$$9\lambda_3 - \lambda_2 + 5\lambda_1 + 4 = 0$$
$$5\lambda_2 + 2\lambda_1 - 3 = 0$$
$$15\lambda_2 + 6\lambda_1 + 7 = 0$$

welche die Werte: $\lambda_1 = -\infty$, $\lambda_2 = +\infty$, $\lambda_3 = +\infty$ finden lassen, dadurch ergiebt sich:

$$x_4 = \frac{\infty + \infty - \infty\, 13}{\infty - \infty}$$

welhe Form wieder unbestimmt ist. Aber diese Unbestimmtheit ist nur scheinbar, denn man erhält aus den Bedingungsgleichungen:

$$\lim\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) = -\tfrac{5}{2}, \quad \lim\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right) = \tfrac{2}{3}, \quad \lim\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right) = -\tfrac{5}{3}$$

und der Wert für x_4 lässt sich schreiben:

$$x_4 = \frac{57 + 20\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right) + 35\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right) + \frac{13}{\lambda_3}}{4 - \frac{8}{\lambda_3}},$$

geht man in dieser Gleichung zur Grenze über und setzt rechter Hand die Werte für $\lim\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)$ und $\lim\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)$ ein, so ergiebt sich:

$$\lim x_4 = 3$$

welches der wahre Wert ist.

Nach der zweiten Methode ergiebt sich durch Elimination der Multiplicatoren λ_2 und λ_3:

$$\lambda_2 = \frac{3 - 2\lambda_1}{5} = -\left(\frac{7 + 6\lambda_1}{15}\right), \quad \lambda_3 = -\left(\frac{17 + 27\lambda_1}{45}\right)$$

setzt man diese Werte in den Ausdruck für x_4 ein, dann erscheint dieser nur noch als Function von λ_1 und man erhält nach einer leichten Reduction:

$$x_4 = \frac{156 - 324\lambda_1}{-\,6\ldots - 108\lambda_1} = \frac{\frac{156}{\lambda_1} - 324}{-\frac{6\ldots}{\lambda_1} - 108}$$

also:

$$\lim x_4 = 3$$

wie oben.

Beispiel 4. Es seien die Gleichungen gegeben:

$$
\begin{aligned}
8x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 30 \\
4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 5 \\
4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= -10 \\
x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 6x_4 &= 26
\end{aligned}
$$

welche mit Hülfe der Determinanten aufgelöst die Werte: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{0}{0}$ liefern, die also hier sofort in unbestimmter Form auftreten. Dass diese aber im vorliegenden Falle nicht eine scheinbare, sondern in der Tat vieldeutige Form ist, ist leicht zu erkennen, denn wenn wir irgend ein resolvirendes System componiren, so ergiebt sich:

Auflösung:

1	2	3	4	
$x_1 = 0$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$x_1 = 3$	
$x_2 = 11$	$x_2 = 4$	$x_2 = -3$	$x_2 = -10$	u. s. w.
$x_3 = -6$	$x_3 = -1$	$x_3 = 4$	$x_3 = 9$	
$x_4 = 5$	$x_4 = 5$	$x_4 = 5$	$x_4 = 5$	

mithin also das vorliegende System wirklich unbestimmt.

Behuf Anwendung der Methode von Bézout wollen wir die drei ersten Gleichungen mit den Coefficienten λ_1, λ_2, λ_3 multipliciren und dazu die vierte addiren, dann findet sich:

$$
\begin{aligned}
&(8\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 1)x_1 + (4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 - 2)x_2 \\
&+ (4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 - 3)x_3 + (2\lambda_1 - \lambda_2 - 4\lambda_3 + 6)x_4 \\
&= 30\lambda_1 + 5\lambda_2 - 10\lambda_3 + 26.
\end{aligned}
$$

Zur Bestimmung von x_1 hat man:

$$x_1 = \frac{30\lambda_1 + 5\lambda_2 - 10\lambda_3 + 26}{8\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 1}$$

daneben bestehen die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 - 2 &= 0 \\
4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 - 3 &= 0 \\
2\lambda_1 - \lambda_2 - 4\lambda_3 + 6 &= 0
\end{aligned}
$$

aus welchen $\lambda_1 = +\infty$, $\lambda_2 = -\infty$, $\lambda_3 = +\infty$ gefunden wird. Dadurch nimmt der Wert für x_1 folgende Gestalt an:

$$x_1 = \frac{\infty - \infty - \infty + 26}{\infty - \infty + \infty + 1}$$

welche Form in der Tat unbestimmt ist, denn es lässt sich schreiben:

$$x_1 = \frac{30\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right) + 5\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right) - 10 + \frac{26}{\lambda_3}}{8\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right) + 4\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right) + 4 + \frac{1}{\lambda_3}};$$

bewirkt man den Grenzenübergang und ersetzt rechter Hand $\lim\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right)$ durch $\frac{3}{4}$, $\lim\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right)$ durch $-\frac{5}{2}$, welche Werte aus den Multiplicatorengleichungen durch Division mit λ_3 und nachherigem Grenzenübergange gewonnen werden, dann resultirt:

$$\lim x_1 = \frac{0}{0}$$

welche Form in diesem Falle wirklich unbestimmt ist.

Zu demselben Resultate gelangt man nach der zweiten Methode. Aus den Multiplicatorengleichungen findet sich:

$$\lambda_2 = -\frac{10}{3}\lambda_1 = -\left(\frac{10\lambda_1 + 2}{3}\right)$$

$$\lambda_3 = \left(\frac{4\lambda_1 + 5}{3}\right) = \left(\frac{8\lambda_1 + 13}{6}\right) = \left(\frac{4\lambda_1 + 3}{3}\right) = \left(\frac{8\lambda_1 + 9}{6}\right);$$

nehmen wir beliebige Werte für die Grössen λ_2 und λ_3, man wird immer das richtige Resultat $\frac{0}{0}$ für x_1 finden, wählen wir die ersten aus, so ergiebt sich:

$$x_1 = \frac{30\lambda_1 - 5\left(\frac{10}{3}\lambda_1\right) - 10\left(\frac{4\lambda_1 + 5}{3}\right) + 26}{8\lambda_1 - 4\left(\frac{10}{3}\lambda_1\right) + 4\left(\frac{4\lambda_1 + 5}{3}\right) + 1}$$

und vereinfacht:

$$x_1 = \frac{(90 - 90)\lambda_1 + 28}{(40 - 40)\lambda_1 + 23}$$

Hier dürfen im Zähler und im Nenner die Producte nicht getilgt werden, weil bei dem Grenzenübergange λ_1 unendlich gross wird, man erhält daher:

$$x_1 = \frac{90 - 90 + \frac{28}{\lambda_1}}{40 - 40 + \frac{23}{\lambda_1}}$$

folglich:

$$\lim x = \frac{0}{0}$$

Zur Bestimmung von x_2 findet sich:

$$x_2 = \frac{3[illegible]x_1 - [illegible]x_2 - 1[illegible]x_3 - 26}{[illegible]x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2}$$

ferner existiren die Bedingungsgleichungen:

$$[illegible]x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 1 = [illegible]$$

$$4x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3 = [illegible]$$

$$2x_1 - [illegible]x_2 - 4x_3 + 6 = 0$$

aus welchen nach Anwendung der [illegible] $\lambda_1 = + \infty$, $\lambda_2 = [illegible]$ $\lambda_3 = + \infty$ gefunden [illegible] ergiebt sich:

$$x_2 = \frac{\infty - \infty - \infty + 26}{\infty - \infty + \infty - 2}$$

welche Form in Wirklichkeit unbestimmt ist, denn es kann geschrieben werden:

$$x_2 = \frac{30\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right) + 5\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right) - 10 + \frac{26}{\lambda_3}}{4\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right) + 2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right) + 2 - \frac{2}{\lambda_3}}$$

und weil aus den Bedingungsgleichungen

$$\lim\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right) = \tfrac{3}{4}, \quad \lim\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}\right) = -\tfrac{5}{2}$$

sich ergiebt, so findet man durch Uebergang zur Grenze und durch Einführung der eben gewonnenen Grenzwerte:

$$\lim x_2 = \tfrac{0}{0}.$$

In Hinsicht der zweiten Methode ergiebt sich aus den Bedingungsgleichungen, wenn man λ_2 und λ_3 als Functionen von λ_1 darstellt:

$$\lambda_2 = -\frac{10\lambda_1}{3} = -\left(\frac{10\lambda_1 + 7}{3}\right)$$

$$\lambda_3 = \frac{16\lambda_1 + 25}{12} = \frac{8\lambda_1 + 23}{6} = \frac{16\lambda_1 - 3}{12} = \frac{8\lambda_1 + 9}{6}.$$

Welche Werte man auch wählen mag, es wird sich stets das richtige Resultat ergeben, nehmen wir z. B. die ersten, dann findet sich:

$$x_2 = \frac{30\lambda_1 - \frac{50\lambda_1}{3} - 5\left(\frac{16\lambda_1 + 25}{6}\right) + 26}{4\lambda_1 - \frac{20\lambda_1}{3} + \frac{16\lambda_1 + 25}{6} - 2},$$

folglich:

$$x_2 = \frac{(180 - 180)\lambda_1 + 31}{(40 - 40)\lambda_1 + 13}$$

wo man in dem Bruche rechter Hand, sowohl im Zähler wie auch im Nenner die Producte nicht streichen darf, da sie die Form $0 . \infty$ haben. Nun ergiebt sich:

$$x_2 = \frac{180 - 180 + \frac{31}{\lambda_1}}{40 - 40 + \frac{13}{\lambda_1}}$$

und nach vollzogenem Grenzenübergang:

$$\lim x_2 = \tfrac{0}{0}$$

wie oben.

Behuf Bestimmung von x_3 hat man:

$$x_3 = \frac{30\lambda_1 + 5\lambda_2 - 10\lambda_3 + 26}{4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 - 3}$$

und die Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} 8\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 1 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1 &= 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - 4\lambda_3 + 6 &= 0 \end{aligned}$$

löst man diese mit Hülfe der Determinanten auf, dann findet sich:

$$\lambda_1 = +\infty, \quad \lambda_2 = -\infty, \quad \lambda_3 = +\infty$$

und damit wird:

$$x_3 = \frac{\infty - \infty - \infty + 26}{\infty - \infty + \infty - 3}$$

welcher Ausdruck in der Tat unbestimmt ist, denn bringt man in gleicher Weise, wie bei den Werten x_1 und x_2 die oben gezeigten Methoden zur Bestimmung des wahren Wertes zur Anwendung, dann ergiebt sich beide Male:

$$\lim x_3 = \tfrac{0}{0}.$$

Endlich hat man zur Bestimmung von x_4:

$$x_4 = \frac{30\lambda_1 + 5\lambda_2 - 10\lambda_3 + 26}{2\lambda_1 - \lambda_2 - 4\lambda_3 + 6}$$

daneben die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 8\lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 + 1 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1 &= 0 \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

aus welchen $\lambda_2 = \lambda_2 = \lambda_2 = \tfrac{0}{0}$ gefunden wird. Diese Gleichungen bezeichnen geometrisch, wenn man die Multiplicatoren als veränderliche Coordinaten betrachtet, drei Ebenen, welche sich im Unendlichen in einer geraden Linie durchschneiden und es erscheint somit der Wert von x_4 von vornherein in seiner wirklichen unbestimmten Form $\tfrac{0}{0}$.

Clausthal, im October 1883.

XXV.

Miscellen.

1.

Bemerkung über den Aufsatz von Vályi, Seite 105, und dessen Vorgänger.

Der citirte Aufsatz handelt von den Fällen mehrfacher Collineation zweier Dreiecke. Derselbe Gegenstand ist bereits 1870 von J. Rosanes und H. Schröter in den Mathematischen Annalen von Clebsch und Neumann, Bd. II. S. 549 und 553, bearbeitet. Herr Professor H. Schröter hat mich nun aufgefordert die Priorität des Herrn Professor J. Rosanes und seine eigene gegenüber der Arbeit von Vályi zu constatiren. Ich nehme daraus Anlass, erstlich die an jener Stelle unterlassene Erwähnung beider Arbeiten hiermit nachzuholen, ferner aber die beiderseitigen Arbeiten mit einander zu vergleichen. Es wird sich daraus ergeben, dass der Aufsatz von Vályi, weit entfernt eine Wiederholung seiner Vorgänger zu sein, sich weder ganz noch zum Teil mit ihnen deckt und in Verfahren und Darstellung der Resultate völlig unabhängig von ihnen ist. Im Zuwerkegehen tritt jeder Begegnung die Urverschiedenheit in den Weg, dass Rosanes die Bedingungen perspectivischer Lage beider Dreiecke, ausgedrückt in Bezug auf ein beliebiges Fundamentaldreieck, aufstellt und bei diesen Bedingungen verweilt, während Vályi relativ zu dem einen Dreieck in einfachster allgemeiner Form das andre unmittelbar perspectivisch darstellt, so dass er mit den Bedingungen perspectivischer Lage überhaupt nicht zu tun hat, und nun mit den allein verfügbaren 3 Coefficienten operirt, von deren Relationen die Fälle mehrfacher Collineation abhangen.

Das erste Resultat von Rosanes, entnommen aus der Beobachtung jener Bedingungsgleichungen ist der Satz:

Wenn den Punkten a, b, c die Punkte A, B, C in 2 verschiedenen Anordnungen perspectivisch entsprechen, welche aus einander durch cyklische Permutirung hervorgehen, so liefert auch noch die dritte cyklische Permutation von A, B, C eine Anordnung, welche a, b, c perspectivisch entspricht.

Diese Bemerkung ist von Vályi nicht ausgesprochen, denn sie ist überholt durch die Bedingung dreifacher Collineation für cyklische Vertauschung, aus der sie rückgängig leicht hervorgeht, da andre cyklische Vertauschungen als dreifache ihr zufolge unmöglich sind.

Auf der andern Seite ist die entwickelte Aufstellung der Bedingungen der 4 Fälle, welche bei Vályi das Hauptresultat bildet, bei Rosanes gar nicht vorhanden, mithin in jeder Beziehung neu. Will Herr Schröter diese als eine zu leichte Folgerung aus der Combination der 6 Gleichungen für keine neue Leistung gelten lassen, so wird er jedenfalls nicht bestreiten können, dass sie ohne Hülfe irgend einer Aufstellung von Rosanes noch viel leichter gewonnen worden sind, als sie sich aus dessen complicirten Formeln herleiten lassen.

Die Fälle 2, 3, 4 und 6 facher Collineation, abgesehen von ihren Bedingungen, gehen natürlich auf beiden Seiten als dieselben hervor. Der Fall imaginärer sechsfacher Collineation, der einzige auf den Rosanes näher eingeht, liefert insofern einen Berührungspunkt der beiderseitigen Deductionen, als darin die dritte Wurzel der Einheit eine Rolle spielt.

Alles Genannte hat, wie es scheint, bei Rosanes nur die Bedeutung beiläufig am Wege gewonnener Resultate. Sein Ziel ist, die gesammte Configuration unter eine umfassende Anschauung zu stellen, was er durch Construction der Oerter variabeler Eckpunkte in Ausführung bringt. Diese seine Hauptaufgabe ist von Vályi gar nicht berührt worden.

Die Arbeit Schröter's „Ueber perspectivisch liegende Dreiecke" behandelt, wie er selbst sagt, dieselbe Frage synthetisch, welche die Arbeit von Rosanes „Ueber Dreiecke in perspectivischer Lage" vorher analytisch behandelt hat. Die Seiten, nach denen hin die Frage in beiden verfolgt wird, sind so übereinstimmend, dass ich wol einer gesonderten Vergleichung mit letzterer überhoben bin.

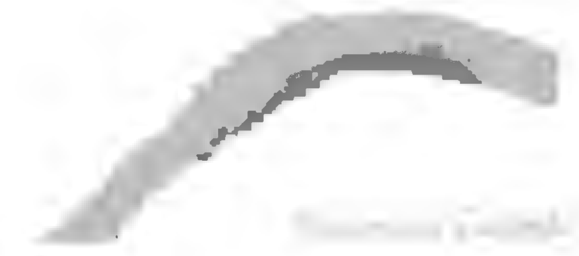
Herr Prof. Schröter wird hiernach gewiss anerkennen, dass Herr Vályi, sofern er aus den oben bezeichneten Arbeiten nicht den geringsten Nutzen für seine Arbeit ziehen konnte, auch nicht die Pflicht hatte dieselbe zu nennen.

R. Hoppe.

2.

Moment der gegenseitigen Anziehung der begrenzten Schenkel eines Winkels.

Das hier behandelte Thema [illegible] des Resultats zu [illegible] die Lösung, die [illegible] Wege ergeben sollte.



Der Scheitel des Winkels v sei Anfangspunkt der xy, der eine Schenkel a Axe der x, auf dem andern b sei u eine variable Strecke. Dann sind

$$x,\quad 0 \quad \text{und} \quad u\cos v,\quad u\sin v$$

die Coordinaten zweier Punkte auf a und b, und, wenn wir bloss eine Drehung des zweiten Schenkels zulassen,

$$\delta x_1 = -u\sin v\,\delta v, \qquad \partial y_1 = u\cos v\,\delta v$$

die Variationen des Punktes (u). Die Componenten der Anziehung der Linienelemente ∂x und ∂u, deren Einheiten sich in der Entfernung 1 mit der Intensität 1 anziehen, nach Newton'schem Gesetz sind:

$$X = \frac{u\cos v - x}{r^3}\,\partial x\,\partial u; \qquad Y = \frac{u\sin v}{r^3}\,\partial x\,\partial u$$

wo

$$r^2 = x^2 + u^2 - 2ux\cos v$$

Fügen wir eine Kraft p hinzu, die auf den Punkt $u = 1$ senkrecht auf den zweiten Schenkel wirkt und der Gesammtanziehung das Gleichgewicht hält, und führen die Werte in die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten

$$\int\!\!\int (X\delta x_1 + Y\delta y_1) = 0$$

ein, so kommt, da $-p\delta v$ das virtuelle Moment von p ist:

$$p = \int_0^b \partial u \int_0^a \frac{ux\sin v\,\partial x}{(x^2 + u^2 - 2ux\cos v)^{\frac{3}{2}}}$$

Bezeichnet c die dritte Seite des Dreiecks abc, ist also

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos v}$$

der Endwert von r, so ergibt die successive Integration nach den gewöhnlichen Formeln:

$$p = \frac{a + b - c}{\sin v}$$

Die so dargestellte Grösse ist das Moment der Anziehung zwischen a und b nach Newton'schen Gesetze, ausgedrückt in der als constant betrachteten Anziehung zweier Linieneinheiten von a und b in der Entfernung 1 als Einheit.

Angewandt auf die extremen Fälle ergibt die Formel bei verschwindendem v, dass $p\sin v$ gleich dem doppelten kleinsten Schenkel wird, wenn hingegen v ein gestreckter Winkel wird, verschwindet; im letztern Falle verschwindet auch p selbst. R. Hoppe.

XXVI.

Ueber Lissajous'sche Curven.

Von

Herrn **Himstedt,**
Gymnasiallehrer in Loebau, Westpreussen.

Um die Bewegung eines oscillirenden Punktes dem Auge sichtbar zu machen, kann man in folgender Weise verfahren.

Man befestige an das Ende einer vertical gestellten Stimmgabel einen kleinen Spiegel, so dass die Ebene des letzteren senkrecht zu der Richtung der Schwingungen der Gabel sich befindet. In einiger Entfernung davon stelle man eine zweite Stimmgabel horizontal auf, welche an ihrem Ende gleichfalls einen in der vorhin angegebenen Weise befestigten Spiegel trägt. Die Stimmgabeln seien derart aufgestellt, dass ein vom ersten Spiegel reflectirter Lichtstrahl auf den zweiten Spiegel fällt. Versetzt man dann die verticale Stimmgabel in Schwingungen, so erblickt man im zweiten Spiegel, welcher ruht, (am besten vermittelst eines Fernrohres), eine verticale gerade Linie, welche der Bewegung eines Punktes der schwingenden Stimmgabel entspricht. Ebenso nimmt man eine horizontale gerade Linie wahr, wenn nur die horizontate Stimmgabel schwingt, und die andere in Ruhe ist. Lässt man jedoch beide Stimmgabeln gleichzeitig vibriren, so erblickt man eine krumme Linie, deren Gestalt von dem Verhältniss der Schwingungszahlen der beiden Stimmgabeln, sowie von der Phasendifferenz derselben abhängig ist. In Folge des Umstandes nämlich, dass das menschliche Auge sehr schnell auf einander folgende Lichteindrücke als gleichzeitige wahrnimmt, erscheinen die einzelnen Punkte der Curve alle zu gleicher Zeit erleuchtet, so dass man die ganze von dem Punkte beschriebene Curve auf [illegible]

Vorstehende Methode, die Bewegung eines schwingenden Punktes dem Auge sichtbar zu machen, wurde zuerst von dem französischen Physiker Lissajous angegeben in den Annales de Physique et de Chimie, tome 51, nachdem schon früher der Engländer Thomas Young auf diese zusammengesetzten Schwingungen aufmerksam gemacht hatte. Nach jenem werden die Curven, welche der oscillirende Punkt beschreibt, Lissajous'sche Curven genannt. Die geometrischen Eigenschaften derselben sollen im Nachfolgenden untersucht werden.

§ 1.

Analytische Darstellung der Curven.

Wenn man die Lage des oscillirenden Punktes auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezieht, dessen Achsen mit den Richtungen der Stimmgabelschwingungen zusammenfallen, so ergeben sich für die Coordinaten x und y desselben Ausdrücke von der Form:

$$x = a \,.\, \sin(mt + \varphi)$$
$$y = b \,.\, \sin(nt).$$

In diesen Gleichungen bedeuten a und b die Amplituden der beiden Stimmgabeln, m und n ihre Schwingungszahlen, φ ihre Phasendifferenz, welche auch den Wert 0 haben kann, und t die Zeit.

In Betreff der beiden Zahlen m und n können gewisse Voraussetzungen gemacht werden, welche die Allgemeinheit obiger Gleichungen nicht beeinträchtigen. Sieht man nämlich fürs erste von irrationalen Werten ab, so ist zunächst klar, dass man m und n als ganze Zahlen voraussetzen darf. Denn wären sie Brüche mit den Nennern p und q, so könnte man eine neue Variabele t' einführen, derart, dass $t' = pqt$, wodurch die Nenner verschwinden würden. Ferner darf man m und n auch als relative Primzahlen voraussetzen; denn hätten sie noch einen gemeinschaftlichen Factor k, so könnte man denselben durch die Substitution $kt = t'$ beseitigen. Endlich ist es noch erlaubt, m und n als positiv anzunehmen, da man im entgegengesetzten Falle durch eine blosse Vertauschung der positiven und negativen Coordinatenachsen m und n positiv machen kann. Folglich kann man ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit die Zahlen m und n als ganze positive und relative Primzahlen annehmen.

Als die einfachsten Fälle der Lissajous'schen Curven können daher die folgenden angesehen werden:

$$1)\quad x = a \,.\, \sin(t + \varphi), \qquad y = b \,.\, \sin t$$
$$2)\quad x = a \,.\, \sin(t + \varphi), \qquad y = b \,.\, \sin 2t$$

3) $x = a.\sin(t+\varphi)$, $y = b.\sin 3t$

4) $x = a.\sin(2t+\varphi)$, $y = b.\sin 3t$

5) $x = a.\sin(t+\varphi)$, $y = b.\sin 4t$

6) $x = a.\sin(3t+\varphi)$, $y = b.\sin 4t$

etc.

Im ersten Falle haben die beiden Stimmgabeln, welche zur Erzeugung der Curven benutzt werden können, dieselbe Tonhöhe; in allen übrigen Fällen haben sie dagegen verschieden Tonhöhe, und zwar giebt die eine entweder die Octave der andern an, oder die Quinte der Octave, oder die Quinte, oder die zweite Octave, oder die Quarte etc.

§ 2.

Construction der Curven.

Die analytische Mechanik lehrt, dass die Projection einer gleichförmigen Kreisbewegung auf eine gerade Linie die Bahn eines oscillirenden Punktes ist. Dieser Satz giebt ein Mittel an die Hand, um die Curven punktweise zu construiren.

Man zeichne ein Rechteck aus den Seiten $2a$ und $2b$ und beschreibe über 2 benachbarten Seiten zwei Halbkreise, deren Peripherien man in kn resp. km gleiche Teile teile, wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Dann ziehe man durch die Teilpunkte parallele Transversalen zu den Seiten des Rechtecks, so erhält man eine Reihe von Schnittpunkten, von denen alle diejenigen, welche auf zwei sich entsprechenden Transversalen liegen, Punkte der gesuchten Curve sind; wenn man unter zwei sich entsprechenden Transversalen solche versteht, welche durch je zwei zusammengehörige Projectionen des oscillirenden Punktes hindurchgehen. Verbindet man dann jene Schnittpunkte durch einen continuirlichen Linienzug, so erhält man die Lissajous'sche Curve selbst.

Soll hiernach z. B. diejenige Curve gezeichnet werden, welche den Gleichungen:

$$x = a.\sin(2t+\varphi)$$
$$y = b.\sin 3t$$

entspricht, so teile man die Peripherien der Halbkreise über den Seiten $2a$ und $2b$ in 12 resp. 8 gleiche Teile und ziehe durch die Teilpunkte Parallelen zu den Seiten des Rechtecks, welches dadurch in $12 \times 8 = 96$ kleinere Rechtecke zerlegt wird. Den Mittelpunkt des Rechtecks wähle man als Coordinatenanfangspunkt und gebe der x Achse die Richtung der Seite $2a$. Nimmt man nun zunächst an,



dass die Phasendifferenz φ den Wert 0 hat, so beginnt der oscillirende Punkt seine Bewegung offenbar im Mittelpunkte des Rechtecks und geht von hier nach der gegenüberliegenden Ecke des ersten Rechtecks des ersten Quadranten, welche also ein zweiter Punkt der Curve ist. Dann gehe man, so oft wie möglich, nach der gegenüberliegenden Ecke des in der Richtung der Bewegung liegenden Scheitelrechtecks über, wodurch man weitere Punkte der gesuchten Curve erhält. Ist man aber auf diese Weise nach einem Punkte gelangt, welcher auf einer Seite des Rechtecks aus den Seiten $2a$ und $2b$ selbst liegt, so gehe man, der augenblicklichen Bewegungsrichtung des oscillirenden Punktes entsprechend, in das folgende unmittelbar daneben liegende Rechteck über. Hierdurch erhält man eine bestimmte Anzahl von Curvenpunkten, durch deren Verbindung man eine ganz innerhalb des Rechtecks liegende Curve construirt, welche in Fig. I. abgebildet ist.

Nimmt man zweitens an, dass die Phasendifferenz einen von 0 verschiedenen Wert hat, z. B. $\varphi = \frac{1}{12}\pi$, so findet man die Punkte der Curve noch auf dieselbe Weise wie vorhin, nur hat man in diesem Falle zu beachten, dass der oscillirende Punkt seine Bewegung nicht mehr im Mittelpunkte des Rechtecks beginnt, sondern in dem ersten Schnittpunkte, welcher auf der positiven Seite der x Achse liegt. Die auf diese Weise construirte Curve (Fig. II.) ist der vorigen ähnlich und kann in Folge allmählicher Verschiebungen aus derselben entstanden gedacht werden.

Setzt man ferner $\varphi = \frac{2}{12}\pi$, so beginnt die Bewegung in dem zweiten Schnittpunkte auf der positiven Seite der x Achse. In diesem Falle gelangt der oscillirende Punkt in eine Ecke des Rechtecks ($2a$, $2b$). Da derselbe aus leicht ersichtlichen Gründen nicht über das Rechteck hinaus kann, so findet hier eine Umkehr der Bewegung statt, und der oscillirende Punkt begiebt sich auf demselben Wege wieder nach dem Ausgangspunkte der Bewegung zurück. Dann setzt er seinen Weg aber über jenen Punkt hinaus weiter fort, gelangt zum zweiten Male nach einer Ecke des Rechtecks, dreht hier wieder um, und gelangt abermals nach seinem Ausgangspunkte, und zwar auf dem frühern Wege, denselben rückwärts durchlaufend. Die danach construirte Curve findet sich in Fig. III. Auch diese Curve kann man sich aus der vorigen (Fig. II.) durch allmähliche Verschiebungen entstanden denken, indem dabei an Stelle der Curvenschleifen einfache, von dem oscillirenden Punkte jedoch zweimal durchlaufene, Bögen getreten sind.

Für $\varphi = \frac{3}{12}\pi$ erhält man wieder dieselbe Curve wie Fig. II., jedoch in entgegengesetzter Richtung von dem oscillirenden Punkte durchlaufen.



Für $\varphi = \frac{4}{12}\pi$ ergiebt sich die ebenfalls in entgegengesetzter Richtung durchlaufene Curve von Fig. I.; und für $\varphi = \frac{5}{12}\pi$ endlich erhält man eine Curve, welche das Spiegelbild von Fig. II. ist, in Bezug auf die y Achse.

Wenn man auf diese Weise fortfährt, der Phasendifferenz φ immer andere Werte zu ertheilen, von $\varphi = \frac{6}{12}\pi$ bis $\varphi = \frac{23}{12}\pi$, (von noch grössern Werten kann wegen der Periodicität der Function sinus abgesehen werden), so überzeugt man sich leicht, dass man ausser den in Fig. I. bis III. abgebildeten Curven, resp. ihren Spiegelbildern in Bezug auf die y Achse, keine neuen Figuren mehr erhält, und ferner, dass je zwei Curven, welche zwei auf einander folgenden Werten von φ entsprechen, langsam in einander überzugehen scheinen. Letzteres erkennt man um so deutlicher, je mehr Werte von φ man noch zwischen den obigen Werten einschaltet.

§ 3.

Lage der Lissajous'schen Curven.

Im Folgenden soll nun die Lage der Lissajous'schen Curven in Bezug auf die Achsen und das bei der Construction derselben benutzte Rechteck untersucht werden und zwar zunächst unter der speciellen Voraussetzung, dass die Phasendifferenz der beiden Schwingungen den Wert 0 habe. In diesem Falle wird die allgemeine Lissajous'sche Curve durch das System

$$x = a \,.\, \sin mt, \quad y = b \,.\, \sin nt$$

ausgedrückt.

I. Der die Curve beschreibende Punkt befindet sich zur Zeit $t = 0$ im Coordinatenanfangspunkte, und beginnt von hier aus seine Bewegung und zwar zunächst im ersten Quadranten. Zur Zeit $t = 2\pi$ kehrt derselbe in den Anfangspunkt zurück, nachdem er inzwischen die ganze Curve beschrieben hat, folglich erhält man sämmtliche Punkte der Curve, wenn man den veränderlichen Parameter t von $t = 0$ bis $t = 2\pi$ variiren lässt. Die Projectionen des schwingenden Punktes haben während dieser Zeit m, resp. n ganze Schwingungen in den Achsen vollführt, da die Schwingungsdauer der Projectionen

$$T = \frac{2\pi}{m} \text{ und } T' = \frac{2\pi}{n}$$

betragen.

II. Aendert sich in den Gleichungen der Curve der Parameter t um die Grösse π, so ergiebt sich

$$x' = a \, . \sin m(t + \pi) = a \, . \sin mt \, . \cos m\pi$$
$$y' = b \, . \sin n(t + \pi) = b \, . \sin nt \, . \cos n\pi$$

wenn man mit $x'y'$ die dem Parameter $t + \pi$ entsprechenden Coordinaten des oscillirenden Punktes bezeichnet. Nun sind 3 Fälle zu unterscheiden:

Sind m und n beide ungerade, so ist $\cos m\pi = \cos n\pi = -1$, folglich $x' = -x$, $y' = -y$. Daraus folgt, dass der Coordinatenanfangspunkt ein Centrum der Curve ist. Diese Eigenschaft ist übrigens eine allgemeine, gleichgiltig ob m und n ungerade oder gerade sind, wie man leicht erkennt, wenn man $t' = -t$ setzt.

Ist aber zweitens m gerade und n ungerade, so ist $\cos m\pi = 1$, $\cos n\pi = -1$, folglich $x' = x$, $y' = -y$, d. h. jedem x entsprechen zwei gleiche und entgegengesetzte Werte des y, oder die Curve liegt symmetrisch zur x Achse.

Ist endlich umgekehrt m ungerade und n gerade, so erkennt man auf dieselbe Weise, dass die Curve in diesem Falle symmetrisch zur y Achse liegt.

Ein vierter Fall, wo m und n gleichzeitig gerade sind, ist in Folge der über diese Zahlen gemachten Voraussetzungen ausgeschlossen.

III. Betrachtet man 2 Parameter, welche durch die Gleichung $t + t' = \pi$ verbunden sind, (oder allgemeiner $t + t' = (2k + 1)\pi$, wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet), so ergiebt sich:

$$x' = a \, . \sin m(\pi - t) = -a \, . \sin mt \, . \cos m\pi$$
$$y' = b \, . \sin n(\pi - t) = -b \, . \sin nt \, . \cos n\pi$$

dann sind wieder 3 Fälle zu unterscheiden:

Sind m und n beide ungerade, so ist $\cos m\pi = \cos n\pi = -1$, folglich $x' = x$ und $y' = y$; jeder Punkt der Curve entspricht in diesem Falle also ausser dem Parameter t auch noch dem Parameter $\pi - t$, woraus folgt, dass der oscillirende Punkt während der Zeit 2π die Curve in ihrer ganzen Ausdehnung zweimal durchläuft.

Ist aber zweitens m gerade und n ungerade, so ergiebt sich $x' = -x$, $y' = y$, d. h. die Curve liegt symmetrisch zur y Achse.

Im dritten Falle endlich, wo m ungerade und n gerade, ist $x' = x$ und $y' = -y$, d. h. die Curve liegt symmetrisch zur x Achse.

Fasst man jetzt das unter II. und III. Bewiesene zusammen, so ergiebt sich folgender allgemeine Satz:

Wenn in der Gleichung einer Lissajous'schen Curve eine von den Zahlen m und n gerade ist, und die Phasendifferenz den Wert 0 hat, so liegt die Curve symmetrisch in Bezug auf beide Achsen.

§ 4.

Fortsetzung.

Da die Coordinaten des oscillirenden Punktes stets zwischen den Grenzen $\pm a$ resp. $\pm b$ liegen, so folgt, dass die Curve ganz innerhalb eines Rechtecks sich erstrecken muss, dessen Seiten $2a$ und $2b$ den Achsen parallel sind, und dessen Mittelpunkt in den Coordinatenanfangspunkt fällt. Dieses Rechteck möge das Amplitudenrechteck genannt werden.

Ist $\sin mt = \pm 1$, so befindet sich der oscillirende Punkt auf einer der y Achse parallelen (verticalen) Seite des Amplitudenrechtecks, und ist $\sin nt = \pm 1$, so befindet sich der Punkt auf einer der x Achse parallelen (horizontalen) Seite jenes Rechtecks. Ist aber gleichzeitig $\sin mt = \pm 1$, $\sin nt = \pm 1$, so geht der oscillirende Punkt durch eine Ecke des Rechtecks. In diesem Falle hat man:

$$mt = (2p+1)\frac{\pi}{2}, \qquad nt = (2q+1)\frac{\pi}{2}$$

wo p und q zwei beliebige ganze Zahlen bedeuten. Durch Elimination von t folgt hieraus:

$$n(2p+1) = m(2q+1)$$

Da diese Gleichung nur erfüllt sein kann, wenn m und n gleichzeitig ungerade sind, so ergiebt sich der Satz:

Eine Lissajous'sche Curve ohne Phasendifferenz kann nur dann durch eine Ecke des Amplitudenrechtecks hindurchgehen, wenn die Schwingungszahlen m und n beide ungerade sind.

Sind nun m und n beide ungerade, so folgt aus obiger Gleichung weiter:

$$np - mq = \tfrac{1}{2}(m - n)$$

Nun sind 2 Fälle zu unterscheiden:

1) Es sei $\frac{1}{2}(m - n)$ ungerade. Dann muss man von den beiden Zahlen p und q die eine gerade und die andere ungerade wählen. Folglich ist:

$$\text{entweder} \quad \sin mt = +1, \quad \sin nt = -1$$
$$\text{oder} \quad \sin mt = -1, \quad \sin nt = +1$$

2) Es sei $\frac{1}{2}(m-n)$ gerade. Dann sind für p und q entweder zwei gerade oder zwei ungerade Zahlen zu wählen. Folglich ist:

$$\text{entweder } \sin mt = +1, \ \sin nt = +1$$
$$\text{oder } \quad \sin mt = -1, \ \sin nt = -1$$

Daraus erkennt man, dass der oscillirende Punkt im ersten Falle durch diejenigen Ecken des Amplitudenrechtecks hindurchgeht, welche im zweiten und vierten Quadranten liegen, im zweiten Falle dagegen durch diejenigen, welche im ersten und dritten Quadranten liegen. Daher der Satz:

Eine Lissajous'sche Curve, in deren Gleichungen m und n ungerade Zahlen sind und $\varphi = 0$, geht stets durch zwei gegenüberliegende Ecken des Amplitudenrechtecks.

Wenn blos $\sin mt = \pm 1$, so befindet sich der oscillirende Punkt auf einer der verticalen Seiten des Amplitudenrechtecks. Für diesen Fall ist:

$$mt = (2p+1)\frac{\pi}{2}, \qquad t = \frac{2p+1}{m}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Um zu bestimmen, wie oft dies bei vollständiger Beschreibung der Curve geschieht, berücksichtige man, dass der Parameter t zwischen den Grenzen $t = 0$ und $t = 2\pi$ zu nehmen ist. Dies giebt für die Zahl p $2m$ verschiedene Werte, und folglich liegen $2m$ Curvenpunkte auf den verticalen Seiten des Amplitudenrechtecks.

Auf analoge Weise zeigt man, dass $2n$ Curvenpunkte auf den horizontalen Seiten des Amplitudenrechtecks liegen.

Diese Untersuchung bedarf einer Modification für den Fall, wo m und n beide ungerade sind. Bringt man hier die beiden Curvenpunkte, welche in die Ecken des Amplitudenrechtecks fallen, in Abrechnung, so erkennt man, dass $2(m-1)$ Curvenpunkte auf den verticalen und $2(n-1)$ auf den horizontalen Seiten des Amplitudenrechtecks liegen. Dabei ist aber noch zu berücksichtigen, dass jeder Punkt doppelt gezählt ist, da in diesem Falle der oscillirende Punkt während der Zeit 2π die Curve in ihrer ganzen Ausdehnung zweimal durchläuft.

Als Satz lässt sich dies folgendermassen zusammenfassen:

Der oscillirende Punkt, welcher eine Lissajous'sche Curve ohne Phasendifferenz beschreibt, befindet sich $2m$ mal auf den verticalen und $2n$ mal auf den horizontalen Seiten des Amplitudenrechtecks, wenn eine von den Zahlen m und n eine gerade ist. Sind aber beide ungerade, so befindet er sich $(m-1)$ mal auf den verticalen und

$(n-1)$ mal auf den horizontalen Seiten des Amplitudenrechtecks, wobei jedoch die Ecken desselben nicht mitgerechnet sind.

Die Curve schneidet die x Achse, wenn $t = \frac{k\pi}{n}$, wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Folglich ergeben sich für k, wenn man t zwischen den Grenzen $t = 0$ und $t = 2\pi$ nimmt, $2n$ verschiedene Werte, d. h. der oscillirende Punkt geht $2n$ mal durch die x Achse. Auf analoge Weise ergiebt sich, dass der oscillirende Punkt $2m$ mal die y Achse passirt. Hierbei ist noch zu bemerken, dass in dem Falle, wo m und n beide ungerade sind, und der oscillirende Punkt während der Zeit 2π die Curve in ihrer ganzen Ausdehnung zweimal durchläuft, derselbe die Achsen nur n resp. m mal passirt.

Die Abscissen eines Curvenpunktes sind positiv, wenn

$$\frac{2k+1}{m} \cdot \pi \gtrless t \gtrless \frac{2k}{m} \cdot \pi$$

dagegen negativ, wenn

$$\frac{2k}{m} \cdot \pi \gtrless t \gtrless \frac{2k-1}{m} \cdot \pi$$

Durch Vertauschung von m mit n folgt, dass die Ordinaten positiv oder negativ sind, je nachdem

$$\frac{2k+1}{n} \cdot \pi \gtrless t \gtrless \frac{2k}{n} \cdot \pi$$

oder

$$\frac{2k}{n} \cdot \pi \gtrless t \gtrless \frac{2k-1}{n} \cdot \pi$$

Um ferner diejenigen Intervalle von t zu finden, für welche die Coordinaten ihre Vorzeichen nicht ändern, betrachte man die Brüche

$$\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m} \ldots \frac{2m}{m}$$

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \ldots \frac{2n}{n}$$

und ordne dieselbe so, wie sie ihrer Grösse nach auf einander folgen. Multiplicirt man jeden derselben mit π, so geben je zwei benachbarte Producte eins der gesuchten Intervalle.

Für die Curve

$$x = a \cdot \sin 2t, \quad y = b \cdot \sin 3t$$

erhält man z. B. für jene Intervalle folgende Werte:

I. Von $t = 0$ bis $t = \frac{1}{3}\pi$
II. Von $t = \frac{1}{3}\pi$ bis $t = \frac{1}{2}\pi$
III. Von $t = \frac{1}{2}\pi$ bis $t = \frac{2}{3}\pi$
IV. Von $t = \frac{2}{3}\pi$ bis $t = \frac{3}{3}\pi$
V. Von $t = \frac{3}{3}\pi$ bis $t = \frac{4}{3}\pi$
VI. Von $t = \frac{4}{3}\pi$ bis $t = \frac{3}{2}\pi$
VII. Von $t = \frac{3}{2}\pi$ bis $t = \frac{5}{3}\pi$
VIII. Von $t = \frac{5}{3}\pi$ bis $t = 2\pi$

Dann kann man mit Hilfe der obigen Grenzen für jedes Intervall das Vorzeichen von x resp. y und damit den Quadranten bestimmen, in welchem sich die Curve für jene Intervalle von t erstreckt. So findet man, dass die obige Curve im ersten Quadranten liegt für das erste und sechste Intervall, im zweiten Quadranten für das vierte und siebente Intervall, im dritten Quadranten für das dritte und achte Intervall und im vierten Quadranten endlich für die beiden noch übrigen Intervalle.

§ 5.

Es soll jetzt untersucht werden, welchen Einfluss die Phasendifferenz auf die Resultate der beiden vorigen Paragraphen hat. Ist die Curve durch die Gleichungen

$$x = a . \sin(mt + \varphi), \quad x = b . \sin nt$$

gegeben, so ist zunächst klar, dass der oscillirende Punkt zur Zeit $t = 0$ nicht mehr im Coordinatenanfangspunkte, sondern in einem Punkte der x Achse, dessen Abscisse $x = a \sin \varphi$, sich befindet. Ob derselbe überhaupt den Anfangspunkt passirt, hängt davon ab, ob die beiden Gleichungen:

$$\sin nt = 0, \quad \sin(mt + \varphi) = 0$$

gleichzeitig für dasselbe t erfüllt sind. Aus diesen Gleichungen folgt:

$$nt = k\pi, \quad mt + \varphi = l\pi$$

wo k und l ganze Zahlen bedeuten. Durch Elimination von t ergiebt sich

$$\varphi = \frac{\pi}{n}(ln - km)$$

Daraus erkennt man, dass die Curve nur dann durch den Coordinatenanfangspunkt geht, wenn die Phasendifferenz einen dieser Gleichung entsprechenden Wert hat.

Aendert sich ferner in den Gleichungen der Curve der Parameter t um die Grösse π, so ergeben sich dieselben Resultate wie in § 3, II, d. h. für ein gerades m liegt die Curve symmetrisch zur x Achse und für ein gerades n symmetrisch zur y Achse. Dagegen hören die Folgerungen von § 3, III. auf richtig zu sein, und die Curve liegt jetzt also nicht mehr symmetrisch zu beiden Achsen, sondern nur zu einer derselben.

Soll die Curve durch eine Ecke des Amplitudenrechtecks gehen, so müssen die Gleichungen

$$\sin(mt+\varphi) = \pm 1, \quad \sin nt = \pm 1$$

für dasselbe t erfüllt sein. Aus ihnen folgt, dass

$$mt+\varphi = (2p+1)\frac{\pi}{2}, \quad nt = (2q+1)\frac{\pi}{2}$$

wo p und q wieder ganze Zahlen bedeuten. Durch Elimination von t erhält man hieraus:

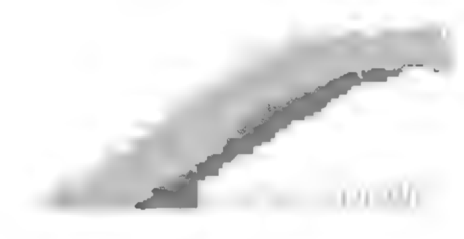
$$\varphi = \frac{m\pi}{2}\left[\frac{2p+1}{m} - \frac{2q+1}{n}\right]$$

Ob die Curve durch eine Ecke des Amplitudenrechtecks geht oder nicht, hängt jetzt also nur davon ab, ob die Phasendifferenz einen dieser Gleichung entsprechenden Wert hat oder nicht; gleichgiltig dabei ist aber, ob die Zahlen m und n gerade oder ungerade sind. Sind m und n beide ungerade, so geht die Curve, wie früher für den Fall $\varphi = 0$ bewiesen wurde, durch 2 gegenüberliegende Ecken des Amplitudenrechtecks. Ist aber eine von den Zahlen m und n gerade, so geht die Curve durch 2 benachbarte Ecken. Letzteres folgt aus der symmetrischen Lage der Curve zur x resp. y Achse.

Die übrigen Resultate des § 4. erleiden zum Teil geringe Modificationen, welche hier der Kürze wegen übergangen werden sollen. Dagegen muss noch untersucht werden, welche Werte der Phasendifferenz zu erteilen sind, damit die Curven, welche bestimmten Schwingungszahlen m und n entsprechen, der Gestalt und Lage nach dieselben bleiben; denn wie in § 2. gezeigt wurde, kann man durch Variiren der Phasendifferenz dieselben Curven auf verschiedene Weise construiren.

Angenommen, φ und φ' wären zwei Werte der Phasendifferenz, für welche die Curven identisch werden sollen; die erste Curve sei dargestellt durch die Gleichungen

$$x = a.\sin(mt+\varphi), \quad y = b.\sin nt$$



die zweite also durch

$$x = a \, . \sin(mt + \varphi'), \quad y = b \, . \sin nt$$

Beide Curven, deren Ordinaten für gleiche Werte des t dieselben sind, müssen offenbar coincidiren, wenn sie einen Schnittpunkt mit der x Achse gemeinschaftlich haben. Nun erhält man sämmtliche Schnittpunkte mit dieser Achse, wenn man

$$t = \frac{k}{n} . \pi$$

setzt, unter k eine ganze Zahl verstanden. Die Abscissen dieser Schnittpunkte sind also für die erste Curve

$$x = a \, . \sin\left(\frac{m}{n} k\pi + \varphi\right)$$

und für die zweite

$$x = a \, . \sin\left(\frac{m}{n} k'\pi + \varphi'\right)$$

Obige Bedingung ist also erfüllt, wenn

$$\sin\left(\frac{m}{n} k\pi + \varphi\right) = \sin\left(\frac{m}{n} k'\pi + \varphi'\right)$$

Nun sind die sinus zweier Winkel gleich, entweder, wenn ihre Summe ein ungerades Vielfache der Zahl π oder ihre Differenz ein gerades Vielfache dieser Zahl beträgt. Folglich:

$$\left(\frac{m}{n} k\pi + \varphi\right) + \left(\frac{m}{n} k'\pi + \varphi'\right) = (2p + 1)\pi$$

$$\left(\frac{m}{n} k\pi + \varphi\right) - \left(\frac{m}{n} k'\pi + \varphi'\right) = 2q\pi$$

wo p und q ganze Zahlen bedeuten. Schreibt man diese Gleichungen in der Form:

$$\varphi + \varphi' = (2p + 1)\pi - \frac{m}{n} \pi(k + k')$$

und

$$\varphi - \varphi' = 2q\pi - \frac{m}{n} \pi(k - k')$$

oder einfacher:

$$\varphi + \varphi' = (2p + 1)\pi - \frac{m}{n} h\pi$$

$$\varphi - \varphi' = 2q\pi - \frac{m}{n} l\pi$$

so kann man daraus alle diejenigen Werte der Phasendifferenz φ bestimmen, welche derselben Curve entsprechen.

Auf analoge Weise kann man auch die Werte von φ finden, für welche die eine Curve das Spiegelbild der andern ist. Für diesen Fall ergiebt sich nämlich, da die Abscissen jetzt entgegengesetzt gleich sein müssen,

$$\sin\left(\frac{m}{n}k\pi + \varphi\right) = -\sin\left(\frac{m}{n}k'\pi + \varphi'\right)$$

Da die sinus zweier Winkel entgegengesetzt gleich sind, entweder wenn ihre Summe ein gerades Vielfache der Zahl π oder ihre Differenz ein ungerades Vielfache dieser Zahl beträgt, so ergiebt sich schliesslich:

$$\varphi + \varphi' = 2p\pi - \frac{m}{n}h\pi$$

$$\varphi - \varphi' = (2q+1)\pi - \frac{m}{n}l\pi$$

aus welchen Gleichungen man die den Spiegelbildern entsprechenden φ berechnen kann.

§ 6.

Elimination des Parameters t.

Geht man wieder von den Gleichungen:

$$x = a.\sin mt, \quad y = b.\sin nt$$

aus, und substituirt in ihnen

$$mt = u, \quad nt = v$$

so dass

$$x = a.\sin u, \quad y = b.\sin v$$

wird, so sind die beiden Grössen u und v an die Gleichung gebunden $mv = nu$, folglich ist auch:

$$\sin mv = \sin nu$$

Sind nun m und n beide ungerade, so benutze man die für jedes ungerade k geltende Gleichung:

$$\sin kx = \frac{k}{1}\sin x - \frac{k(k^2-1^2)}{1.2.3}\sin^3 x + \frac{k(k^2-1)(k^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\sin^5 x - \ldots$$

Indem man noch beachtet, dass

$$\sin u = \frac{x}{a}, \quad \sin v = \frac{y}{b}$$

ergiebt sich dann folgende Gleichung:

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{y}{b}-\frac{m(m^2-1^2)}{1.2.3}\frac{y^3}{b^3}+\frac{m(m^2-1^2)\,(m^2-3^2)}{1.2.3.4.5}-\ldots$$

$$=\frac{n}{1}\cdot\frac{x}{a}-\frac{n(n^2-1^2)}{1.4.3}\frac{x^3}{a^3}+\frac{n(n^2-1^2)\,(n^2-3^2)}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{x^5}{a^5}-\ldots$$

Dies ist die Gleichung einer Lissajous'schen Curve zwischen den Coordinaten x und y, für den Fall, dass m und n beide ungerade sind. Dieselbe ist also eine algebraische Curve, deren Ordnung von der Grösse der Schwingungszahlen m und n abhängt. Nur in dem Falle, wo diese beiden Zahlen unendlich gross werden, was nach den über sie gemachten Voraussetzungen der Irrationalität derselben entspricht, wird die Curve transcendent. Von diesem Falle soll hier abgesehen werden.

Die linke Seite der obigen Gleichung ist eine ganze rationale Function $m$ten Grades von y, und entsprechend die rechte Seite eine ganze rationale Function $n$ten Grades von x. Die Gleichung repräsentirt also eine algebraische Curve $m$ter oder $n$ter Ordnung, je nachdem $m > n$ oder umgekehrt.

Hierbei muss noch bemerkt werden, dass diese Curve ungerader Ordnung mit der Lissajous'schen Curve nur innerhalb des Amplitudenrechtecks identisch ist. Denn eine Lissajous'schen Curve kann nie aus jenem Rechteck hinaustreten, während eine algebraische Curve ungerader Ordnung sich stets in's Unendliche erstreckt.

Da das absolute Glied in der Gleichung der Curve fehlt, so geht diese durch den Coordinatenanfangspunkt, übereinstimmend mit § 3., I; und weil nur ungerade Potenzen von x und y darin vorkommen, die Curvengleichung also dieselbe bleibt, wenn man gleichzeitig x und y mit $-x$ und $-y$ vertauscht, so ist der Anfangspunkt ein Centrum der Curve, übereinstimmend mit § 3., II.

Die Gleichung der Tangente im Anfangspunkte findet man, wenn man die Glieder erster Dimension $= 0$ setzt. Dies giebt:

$$\frac{x}{y}=\frac{am}{bn}$$

Da die Glieder zweiter Dimension fehlen, so hat diese Tangente 3 benachbarte Punkte mit der Curve gemeinschaftlich und ist also eine Wendetangente, und der Anfangspunkt selbst ein Wendepunkt, wo die Curve den Sinn ihrer Krümmung ändert.

Noch ist der Fall zu untersuchen, wo eine der beiden Schwingungszahlen m und n gerade ist. Zur Entwickelung der Gleichung

$$\sin mv = \sin nu$$

ist dann noch die für jedes gerade k giltige Gleichung:

$$\sin kx = \cos x \left[\frac{k}{1} . \sin x - \frac{k(k^2-2^2)}{1.2.3} \sin^3 x + \frac{k(k^2-2^2)(k^2-4^2)}{1.2.3.4.5} \sin^5 x - \ldots\right]$$

erforderlich. Beachtet man, dass:

$$\sin u = \frac{x}{a}, \quad \cos u = \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\sin v = \frac{y}{b}, \quad \cos v = \frac{1}{b}\sqrt{b^2-y^2}$$

so erhält man als Gleichung der Lissajous'schen Curve entweder:

$$\frac{1}{b}\sqrt{b^2-y^2}\left[\frac{m}{1} . \frac{y}{b} - \frac{m(m^2-2^2)}{1.2.3} . \frac{y^3}{b^3} + \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{1.2.3.4.5} \frac{y^5}{b^5} - \ldots\right]$$
$$= \frac{n}{1} . \frac{x}{a} - \frac{n(n^2-1^2)}{1.2.3} , \frac{x^3}{a^3} + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{1.2.3.4.5} \frac{x^5}{a^5} - \ldots$$

wenn m gerade und n ungerade, oder:

$$\frac{m}{1} . \frac{y}{b} - \frac{m(m^2-1^2)}{1.2.3} . \frac{y^3}{b^3} + \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{1.2.3.4.5} \frac{y^5}{b^5} - \ldots$$
$$= \frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}\left[\frac{n}{1} . \frac{x}{a} - \frac{n(n^2-2^2)}{1.2.3} \frac{x^3}{a^3} + \frac{n(a^2-2^2)(n^2-4^2)}{1.2.3.4.5} \frac{x^5}{a^5} - \ldots\right]$$

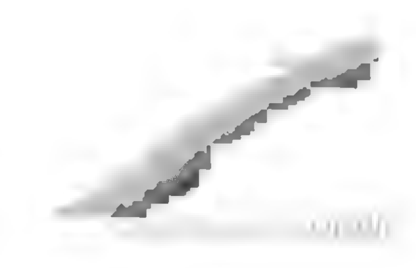
wenn m ungerade und n gerade.

Erhebt man beide Gleichungen in's Quadrat, um die Irrationalitäten zu beseitigen, so erkennt man, dass die linken Seiten vorstehender Gleichungen ganze rationale Functionen vom Grade $2m$ von y und die rechten Seiten ganze rationale Functionen $2n$ ten Grades von x sind. Daraus folgt, dass die Lissajous'sche Curve in diesem Falle eine algebraische Curve vom Grade $2m$ oder $2n$ ist, je nachdem $m > n$ oder umgekehrt.

Da vorstehende Gleichungen, nachdem sie in's Quadrat erhoben sind, nur gerade Potenzen der Coordinaten enthalten, so liegt die Curve symmetrisch zu beiden Achsen, übereinstimmend mit § 3., III.

Ferner besitzt die Curve im Anfangspunkte einen Doppelpunkt, da in der Curvengleichung ausser dem absoluten Gliede auch noch die Glieder erster Dimension fehlen. Die Tangenten dieses Doppelpunktes findet man, indem man die Glieder zweiter Dimension $= 0$ setzt. Dies giebt:

$$\frac{x}{y} = \pm \frac{am}{bn}.$$



Da diese beiden Tangenten reell und verschieden sind, so ist der Anfangspunkt zugleich ein Knotenpunkt der Curve, in welchem 2 verschiedene Zweige derselben sich durchschneiden. Jede von diesen beiden Tangenten hat, da die Glieder dritter Dimension fehlen, drei benachbarte Punkte mit der Curve gemein. Die Tangenten sind also wieder Wendetangenten und der Anfangspunkt selbst ein Wendepunkt, wo beide Zweige der Curve den Sinn ihrer Krümmung ändern.

Das Gesammtresultat lautet jetzt folgendermaassen:

Die durch das System

$$x = a \sin mt, \qquad y = b \sin nt$$

dargestellte Curve ist algebraisch, so lange m und n keine irrationalen Werte annehmen, und zwar von der Ordnung m oder n, wenn diese beiden Zahlen ungerade sind, dagegen von der Ordnung $2m$ oder $2n$, wenn die eine Zahl gerade und die andere ungerade ist. Die Curve besitzt im Anfangspunkte stets einen Wendepunkt, welcher im letzteren Falle zugleich ein Doppelpunkt mit 2 reellen, nicht coincidirenden Tangenten ist.

Welchen Einfluss die Phasendifferenz auf die Ordnungszahl der Lissajous'schen Curven hat, erfährt man am einfachsten, wenn man dem φ nach und nach alle zwischen 0 und 2π liegenden Werte erteilt. Man erhält dann bei denselben m und n eine Reihe von Curven, welche, wie sich in § 2. herausgestellt hat, langsam in einander überzugehen scheinen. Diese Uebergänge finden nun in der Weise Statt, dass die einzelnen Windungen der Curve entweder einander näher rücken, bis schliesslich je zwei von ihnen zusammenfallen, oder umgekehrt sich dieselben von einander entfernen, bis zu einer gewissen durch das Amplituden-Rechteck vorgeschriebenen Grenze. Da nun die Ordnungszahl einer Curve offenbar nur von der Anzahl der Windungen abhängt, nicht aber von der Grösse des Abstandes zwischen je zweien derselben, so bleibt die Ordnung der Curve so lange unverändert, als die Windungen noch einen merklichen Abstand von einander haben. In dem Augenblicke aber, wo je 2 derselben zusammenfallen, wird die Ordnungszahl der Curve um die Hälfte kleiner, weil dann die Zahl der Schnittpunkte der Curve mit einer geraden Linie ebenfalls um die Hälfte kleiner wird, und diese Zahl die Ordnung einer Curve angiebt.

Wenn aber je zwei Windungen der Curve zusammenfallen, so durchläuft der oscillirende Punkt während der Zeit 2π die Curve in ihrer ganzen Ausdehnung 2 mal, und in diesem Falle geht er, wie sich aus frühern Untersuchungen ergiebt, durch eine Ecke des Am-

...tuden-Rechtecks. Da man nun schon weiss, für welche Werte von ... die Curve durch eine Ecke des Amplituden-Rechtecks hindurch ...ht, so hat man ein Kriterium gewonnen, nach welchem man in dem Falle die Ordnung einer Lissajous'schen Curve bestimmen kann, ...mlich:

„Die Curve ist von der $m$ten resp, $n$ten Ordnung, wenn dieselbe ...urch eine Ecke des Amplituden-Rechtecks hindurch geht, dagegen ...on der $2m$ten resp. $2n$ten Ordnung, wenn dies nicht der Fall ist".

§ 7.

Doppelpunkte.

Im vorigen § ergab sich, dass die Lissajous'sche Curve im Anfangspunkte einen Doppelpunkt besitzt, wenn eine von den Zahlen m und n gerade, und die Phasendifferenz $= 0$ ist. Daher liegt die Frage nahe, ob noch andere Doppelpunkte der Curve existiren.

Ist die Phasendifferenz $\varphi = 0$, so besitzt die Curve einen Doppelpunkt, wenn sich zwei Werte t und t' angeben lassen, für welche gleichzeitig

$$\sin mt = \sin mt'$$
$$\sin nt = \sin nt'$$

gilt. Aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich aber für t und t' folgende Bedingungsgleichungen:

$$mt + mt' = (2p-1)\pi$$
$$nt + nt' = (2p-1)\pi$$
$$mt - mt' = 2q\pi$$
$$nt - nt' = 2q\pi$$

wo p und q ganze Zahlen bedeuten. Von diesen Gleichungen können die erste und vierte oder auch die zweite und dritte zur Bestimmung der beiden Grössen t und t' dienen, während jede andere Combination je zweier von ihnen offenbar nicht zu diesem Zwecke ausreicht. Hierdurch erhält man entweder das System

$$t + t' = (2p-1)\frac{\pi}{m}$$
$$t - t' = 2q \cdot \frac{\pi}{n}$$

oder das System

$$t + t' = (2p-1)\frac{\pi}{n}$$
$$t - t' = 2q \cdot \frac{\pi}{m}$$

Das erste System liefert die Werte

$$t = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2p-1}{m} + \frac{2q}{n}\right), \qquad t' = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2p-1}{m} - \frac{2q}{n}\right)$$

das zweite

$$t = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2p-1}{n} + \frac{2q}{m}\right), \qquad t' = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2p-1}{n} - \frac{2q}{m}\right).$$

Betrachtet man z. B. die Curve $x = a \sin 2t$, $y = b \sin 3t$, so liefert das erste System für $p = 2$ und $q = 1$ die Werte $t = \frac{13}{12}\pi$, $t' = \frac{5}{12}\pi$, das zweite System für $p = 3$ und $q = 1$ die Werte $t = \frac{4}{3}\pi$, $t' = \frac{1}{3}\pi$ etc.

Will man auf diese Weise die Parameter aller Doppelpunkte berechnen, welche einer Lissajous'schen Curve zukommen, so muss man in die Ausdrücke für t und t' der Reihe nach alle ganzen Zahlen für p und q einsetzen.

Dabei wird es aber wegen der Periodicität der Function sinus geschehen, dass man für x und y wiederholt dieselben Werte erhält Es entsteht daher die Frage, welche Werte man den Zahlen p und q zu erteilen hat, um sämmtliche Doppelpunkte der Curve ausfindig zu machen.

Zunächst ist klar, dass in Betreff der Zahl q negative Werte und auch die Null ausgeschlossen werden können, weil im ersten Falle nur t und t' vertauscht würden, im zweiten Falle dagegen $t = t'$ wäre. Andererseits ist $t - t' < 2\pi$, da t sowol wie t' stets zwischen den Grenzen 0 und 2π liegen. Folglich beim ersten System

$$2q \cdot \frac{\pi}{n} < 2\pi, \quad \text{oder} \quad q < n$$

und im zweiten Systeme analog

$$2q \cdot \frac{\pi}{m} < 2\pi \quad \text{oder} \quad q < m.$$

Was ferner die Zahl p anbetrifft, so können ebenfalls negative Werte und die Null ausgeschlossen werden, weil sonst $t' < 0$; und aus demselben Grunde wie vorhin muss $t + t' < 4\pi$ genommen werden. Daraus folgt, dass im ersten Systeme

$$(2p-1)\frac{\pi}{m} < 4\pi \quad \text{oder} \quad p < \frac{4m+1}{2}$$

und im zweiten Systeme analog

$$(2p-1)\frac{\pi}{n} < 4\pi \quad \text{oder} \quad p < \frac{4n+1}{2}.$$

Fasst man jetzt Alles über p und q gesagte zusammen, so ergiebt sich Folgendes:

Wenn man im ersten System die Zahl p von $p = 1$ bis $p = 2m$ und die Zahl q von $q = 1$ bis $q = n - 1$ variiren lässt, dagegen im zweiten System die Zahl p von $p = 1$ bis $p = 2n$ und die Zahl q von $q = 1$ bis $q = m - 1$, so ist man sicher, durch Combination dieser Werte alle Doppelpunkte zu erhalten.

§ 8.

Noch ist die Frage zu entscheiden, ob die Doppelpunkte des einen Systems stets von denen des andern Systems verschieden sind oder nicht.

Setzt man die Parameter zweier Doppelpunkte der beiden Systeme einander gleich, so ergiebt sich

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{2p-1}{m} \pm \frac{2q}{n}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2p'-1}{n} \pm \frac{2q'}{m}\right)$$

oder einfacher

$$m(2p' \mp 2q' - 1) = n(2p \mp 2q' - 1)$$

wo zur Unterscheidung die Zahlen p und q des zweiten Systems durch Striche markirt sind. Nun sind wieder 2 Fälle zu unterscheiden.

Ist eine von den beiden Zahlen m und n gerade, die andere ungerade, so enthält vorstehende Gleichung einen Widerspruch, da die eine Seite dann das Product zweier ungeraden Zahlen ist, die andere Seite aber das Product einer ungeraden und einer geraden Zahl. Folglich ist es unmöglich, dass in diesem Falle ein Doppelpunkt des ersten Systems zusammenfalle mit einem Doppelpunkte des zweiten Systems.

Dieser Widerspruch hört auf, wenn man zweitens die Zahlen m und n beide als ungerade voraussetzt. In diesem Falle lässt sich zeigen, dass jeder Doppelpunkt des einen Systems zugleich ein Doppelpunkt des andern Systems ist.

Die Doppelpunkte beider Systeme fallen nämlich auch zusammen, wenn ihre Parameter sich um 2π unterscheiden, wenn also die Gleichung

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{2p-1}{m} + \frac{2q}{n}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2p'-1}{n} + \frac{2q'}{m}\right) + 2\pi$$

erfüllt ist. Giebt man dieser Gleichung die Form:

$$\frac{2p-1}{m}+\frac{2q}{n}=\frac{2q'+m}{m}+\frac{2p'+3n-1}{n}$$

so ist ersichtlich, dass sich über die Zahlen p, q oder p', q' derart verfügen lässt, dass man identisch hat

$$2p-1=2q'+m, \qquad 2q=2p'+3n-1$$

folglich:

$$p=\tfrac{1}{2}(2q'+m+1)$$
$$q=\tfrac{1}{2}(2p'+3n-1)$$

oder umgekehrt:

$$p'=\tfrac{1}{2}(2q-3n+1), \qquad q'=\tfrac{1}{2}(2p-m-1).$$

Folglich findet man, da die Klammergrössen gerade Zahlen sind, für jedes ganzzahlige p' und q' auch ein ganzzahliges p und q und umgekehrt. Damit ist aber die Richtigkeit der obigen Behauptung nachgewiesen.

§ 9.

Nach diesen Voruntersuchungen ist man jetzt in den Stand gesetzt, die Anzahl von Doppelpunkten zu bestimmen, welche einer Lissajous'schen Curve zukommen. Auch hier sind wieder 2 Fälle zu unterscheiden.

Ist eine von den Zahlen m und n gerade, die andere ungerade, so sind die Doppelpunkte des ersten System verschieden von denen des zweiten Systems. Nach den über p und q angegebenen Grenzen liefert das erste System

$$2m(n-1) \text{ Doppelpunkte}$$

und das zweite System:

$$2n(m-1) \text{ Doppelpunkte,}$$

beide Systeme zusammen also:

$$2m(n-1)+2n(m-1)=4mn-2(m+n).$$

Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, dass jeder Doppelpunkt 2mal gezählt ist, und demnach die wirkliche Anzahl der Doppelpunkte nur

$$2mn-(m+n)$$

beträgt, welches stets eine ungerade Zahl ist.

Danach hat z. B. die Curve

$$x=a\sin 2t, \qquad y=b\sin 3t$$

7 Doppelpunkte, während die Curve

$$x = a\sin t, \qquad y = b\sin 2t$$

nur einen Doppelpunkt hat, welcher in den Coordinatenanfangspunkt fällt.

Sind zweitens m und n beide ungerade, so ist nach § 3., III. zunächst zu berücksichtigen, dass jedes Mal, wo

$$t + t' = \pi \quad \text{oder} \quad t + t' = 3\pi$$

man keinen eigentlichen Doppelpunkt hat, in welchem sich 2 Zweige der Curve durchkreuzen. Folglich sind hier diejenigen Parameter nicht mitzuzählen, für welche im ersten Systeme

$$\frac{2p-1}{n} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{2p-1}{n} = 3.$$

Bei den für p aufgestellten Grenzen wird diese Bedingung in jedem Systeme für 2 Werte des p erfüllt, und folglich liefert jetzt das erste System nur

$$2(m-1)(n-1) \text{ Doppelpunkte}$$

und das zweite System ebenso viel: $2(n-1)(m-1)$. Da die Doppelpunkte des einen Systems nicht verschieden sind von denen des anderen Systems, und da ferner jeder Doppelpunkt 4 mal gerechnet ist, indem die Curve in ihrer ganzen Ausdehnung während der Zeit 2π 2 mal durchlaufen wird, so beträgt die wirkliche Anzahl der Doppelpunkte nur

$$\tfrac{1}{2}(m-1)(n-1)$$

welches stets eine gerade Zahl ist.

Danach hat z. B. die Curve

$$x = a\sin 3t, \qquad y = b\sin 5t$$

4 Doppelpunkte, während alle diejenigen Curven, für welche eine von den Zahlen m und n gleich 1 ist, überhaupt keine Doppelpunkte besitzen.

Den Einfluss der Phasendifferenz auf die vorigen Resultate findet man wieder am einfachsten, indem man untersucht, wie die Zahl der Doppelpunkte sich ändert, wenn die dem Werte φ entsprechende Curve in die dem benachbarten Werte φ' entsprechende Curve übergeht. Um einen bestimmten Fall in's Auge zu fassen, nehme man an, dass m oder n gerade und $\varphi = 0$. Dann ist die Anzahl der Doppelpunkte: $2mn - (m + n)$. Durch allmähliches Wachsen von φ rücken die Windungen der Curve einander näher, ohne dass dadurch jedoch die Anzahl der Doppelpunkte geändert wird. Erst in dem Augenblicke, wo φ so gross geworden ist, dass je zwei benachbarte

Windungen der Curve zusammenfallen, ändert sich auch die Zahl der Doppelpunkte und zwar wird dieselbe kleiner. Nimmt dann φ noch weiter zu, so spalten sich die zusammengefallenen Curvenbögen wieder, und die Zahl der Doppelpunkte ist dann wieder dieselbe wie Anfangs.

Geht man von dem Falle aus, wo m und n beide ungerade und $\varphi = 0$, so hat man eine Curve, bei welcher nach dem, was früher gezeigt wurde, je 2 benachbarte Windungen zusammen gefallen sind. Die Anzahl ihrer Doppelpunkte beträgt $\frac{1}{2}(m-1)(n-1)$. Wächst φ, so spalten sich zunächst die zusammen gefallenen Curvenbögen und die Zahl der Doppelpunkte wird grösser. So lange die Windungen der Curve sämmtlich von einander getrennt sind, bleibt die Zahl der Doppelpunkte unverändert; dieselbe sinkt aber wieder auf den Anfangswert herab, wenn φ so gross geworden ist, dass je 2 benachbarte Windungen der Curve wieder zusammen fallen.

In beiden Fällen wird also ein Wachsen der Anzahl von Doppelpunkten durch eine Spaltung, ein Abnehmen durch ein Zusammenfallen der Curvenbögen veranlasst. Wenn es also nur darauf ankommt, die Anzahl der Doppelpunkte zu bestimmen, welche einer durch die Gleichungen

$$x = a \sin(mt + \varphi)$$
$$y = b \sin nt$$

dargestellten Curve entsprechen, so untersuche man zunächst, ob die Windungen der Curve von einander getrennt sind, oder ob je 2 von ihnen zusammengefallen sind. Im ersten Falle hat man die grössere Zahl von Doppelpunkten, nämlich $2mn-(m+n)$, im zweiten Falle die kleinere Zahl, nämlich $\frac{1}{2}(m-1)(n-1)$.

Mit Benutzung eines früheren Satzes lässt sich Vorstehendes auch so aussprechen:

Eine Lissajous'sche Curve besitzt $\frac{1}{2}(m-1)(n-1)$ oder $2mn-(m+n)$ Doppelpunkte, je nachdem dieselbe durch eine Ecke des Amplitudenrechtecks hindurchgeht oder nicht.

Die Parameter der Doppelpunkte für den allgemeinen Fall, wo φ einen von 0 verschiedenen Wert hat, findet man noch auf dieselbe Weise wie früher; nämlich im ersten Systeme

$$t = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2p-1}{m} + \frac{2q}{n}\right) - \frac{\varphi}{m}$$

und im zweiten Systeme:

$$t = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2p-1}{n} + \frac{2q}{m}\right)$$

Es sind also die Parameter der Doppelpunkte des zweiten Systems von der Phasendifferenz unabhängig. Deshalb liefert das zweite System für alle Curven, welche denselben Schwingungszahlen m und n entsprechen, und nicht durch die Ecken des Amplitudenrechtecks hindurchgehen, stets $n(m-1)$ und somit das erste System stets $m(n-1)$ Doppelpunkte. Gehen die Curven jedoch durch eine Ecke des Amplitudenrechtecks, so ist nach § 5.

$$\varphi = \frac{m\pi}{2}\left(\frac{2p'+1}{m} - \frac{2q'+1}{n}\right)$$

zu setzen. Dann sind die Parameter der Doppelpunkte des ersten Systems von der Form

$$t = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2p-1}{m} + \frac{2q}{n}\right) - \frac{\pi}{2}\left(\frac{2p'+1}{m} - \frac{2q'+1}{n}\right)$$

und hieraus erkennt man, dass sie dann mit den Parametern der Doppelpunkte des zweiten Systems übereinstimmen.

§ 10.

Tangente der Curve.

Da die Phasendifferenz keinen wesentlichen Einfluss auf die Resultate dieses Paragraph ausübt, so möge dieselbe hier = 0 gesetzt werden, so dass die Gleichungen der Curve von der Form

$$x = a \sin mt, \qquad y = b \sin nt$$

sind. Dann ergiebt sich durch Differentiation dieser Gleichungen nach t

$$\frac{dx}{dt} = am \cos mt, \qquad \frac{dy}{dt} = bn \cos nt.$$

Demnach ist die Gleichung der Tangente im Punkte xy

[illegible]

wo t der dem Punkte xy [illegible] [illegible] fende Coordinaten sind. [illegible]

[illegible]

Soll die Tangente [illegible] werden [illegible] einer [illegible] Abschnitt [illegible]



$$\lambda = x - \frac{m}{n} \cdot y \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{b^2 - y^2}}$$

Um denselben zu construiren, zeichne man erst 2 rechtwinklige Dreiecke aus der Hypotenuse a resp. b und einer Kathete x resp. y. Die nicht gegebenen Katheten dieser Dreiecke seien u und v. Hierauf suche man zu den 3 Grössen y, u und v die vierte Proportionale z, so dass

$$\frac{u}{v} = \frac{z}{y}$$

Endlich construire man noch eine Strecke w, die sich zu z wie m zu n verhält. Die Differenz der beiden Linien x und w giebt alsdann den gesuchten Abschnitt, dessen Endpunkt man mit dem Curvenpunkte xy zu verbinden hat, um die Tangente desselben zu erhalten

Für den Wkl. Θ, welchen die Tangente mit der x Achse bildet, ergiebt sich der Ausdruck:

$$\tan \Theta = \frac{bn}{am} \cdot \frac{\cos nt}{\cos mt}$$

Hieraus ergeben sich mehrere Folgerungen.

Ist $\cos nt = 0$, so ist die Tangente der x Achse parallel. Der oscillirende Punkt befindet sich dann auf einer horizontalen Seite des Amplitudenrechtecks. Da dies $(n-1)$ mal Statt findet, wenn m und n beide ungerade, dagegen $2n$ mal, wenn eine dieser beiden Zahlen gerade ist, so folgt hieraus der Satz:

Jede horizontale Seite des Amplitudenrechtecks ist eine vielfache Tangente der Curve, und zwar von der Ordnung $\frac{1}{2}(n-1)$, wenn m und n beide ungerade, dagegen von der Ordnung n, wenn die eine Zahl gerade ist.

Durch Vertauschung von n mit m ergiebt sich der analoge Satz für die verticalen Seiten des Amplitudenrechtecks.

Ist gleichzeitig $\cos mt = 0$ und $\cos nt = 0$, also auch

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0,$$

so wird der Wkl. Θ und auch die Gleichung der Tangente unbestimmt. Der oscillirende Punkt befindet sich dann in einer Ecke des Amplitudenrechtecks. Die Gleichung der Tangente eines solchen Punktes ist bekanntlich:

$$(\xi - x) \frac{d^2y}{dt^2} - (\eta - y) \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

folglich für den vorliegenden Fall:

$$bn^2 \sin nt(\xi - x) - am^2 \sin mt(\eta - y) = 0$$

oder nach Elimination der Grösse t

$$n^2 y(\xi - x) - m^2 x(\eta - y) = 0$$

in welcher Gleichung dann $x = \pm a$, $y = \pm b$ zu setzen ist. Für die Tangente derjenigen Ecke, welche im ersten Quadranten liegt, ergiebt sich z. B.

$$bn^2 \xi - am^2 \eta + ab(m^2 - n^2) = 0$$

Diese Tangente bildet mit der x Achse einen Winkel Θ, für welchen

$$\tan \Theta = \frac{bn^2}{am^2}$$

Die Richtungswinkel der Tangenten eines Doppelpunktes des ersten Systems sind bestimmt durch

$$\tan \Theta = \frac{bn}{am} \cdot \frac{\cos \frac{n}{2} \pi \left(\frac{2p-1}{m} + \frac{2q}{n} \right)}{\cos \frac{m}{2} \pi \left(\frac{2p-1}{m} + \frac{2q}{n} \right)}$$

$$= -\frac{bn}{am} \cdot \frac{\cos q\pi \cos \frac{n}{m} (2p-1) \frac{\pi}{2}}{\sin (2p-1) \frac{\pi}{2} \sin \frac{m}{n} q\pi}$$

$$\tan \Theta' = \frac{bn}{am} \cdot \frac{\cos \frac{n}{2} \pi \left(\frac{2p-1}{m} - \frac{2q}{n} \right)}{\cos \frac{m}{2} \pi \left(\frac{2p-1}{m} - \frac{2q}{n} \right)}$$

$$= + \frac{bn}{am} \frac{\cos q\pi \cos \frac{n}{m} (2p-1) \frac{\pi}{2}}{\sin (2p-1) \frac{\pi}{2} \sin \frac{m}{n} q\pi}$$

und im zweiten Systeme

$$\tan \Theta = -\frac{bn}{am} \cdot \frac{\sin (2p-1) \frac{\pi}{2} \sin \frac{n}{m} q\pi}{\cos q\pi \cos \frac{m}{n} (2p-1) \frac{\pi}{2}}$$

$$\tan \Theta' = + \frac{bn}{am} \cdot \frac{\sin (2p-1) \frac{\pi}{2} \sin \frac{n}{m} q\pi}{\cos q\pi \cos \frac{m}{n} (2p-1) \frac{\pi}{2}}$$

Also besteht für beide Arten von Doppelpunkten die Relation

$$\tan \Theta + \tan \Theta' = 0$$

Daraus folgt, dass die beiden Tangenten eines Doppelpunktes ein gleichschenkliges Dreieck mit der x Achse bilden, oder anders ausgedrückt, dass die Halbirungslinien der Winkel, welche die beiden Tangenten eines Doppelpunktes mit einander bilden, den Coordinatenachsen parallel sind.

§ 11.

Geschwindigkeit des oscillirenden Punktes.

Die ersten Differentialquotienten

$$\frac{dx}{dt} = am \cos mt, \qquad \frac{dy}{dt} = bn \cos nt$$

geben bekanntlich die Projectionsgeschwindigkeiten des oscillirenden Punktes in den Achsen.

Die Geschwindigkeit in der x Achse erreicht ihren absolut grössten Wert

$$\frac{dx}{dt} = \pm am,$$

wenn $t = \frac{k}{m}\pi$, und ihren absolut kleinsten Wert

$$\frac{dx}{dt} = 0,$$

wenn $mt = (2k+1)\frac{\pi}{2}$. Im ersten Falle ist $x = 0$, im zweiten Falle $x = \pm a$. Daraus folgt der Satz:

Die Projectionsgeschwindigkeit in der x Achse ist am grössten, wenn der oscillirende Punkt die y Achse passirt, und am kleinsten, wenn derselbe seinen grössten Abstand von dieser Achse erreicht.

Für die Projectionsgeschwindigkeit in der y Achse ergiebt sich ein entsprechender Satz:

Aus beiden Projectionsgeschwindigkeiten setzt sich die Geschwindigkeit in der Bahn zusammen. Man findet letztere nach der allgemeinen Formel:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Dies giebt:

$$v = \sqrt{a^2 m^2 \cos^2 mt + b^2 n^2 \cos^2 nt}$$

Die Bahngeschwindigkeit hat ihren grössten Wert

$$v = \sqrt{a^2 m^2 + b^2 n^2},$$

wenn $\cos mt = \pm 1$ und $\cos nt = \pm 1$. Der oscillirende Punkt befindet sich dann immer im Coordinatenanfangspunkte.

Ihren kleinsten Wert $v = 0$ erreicht die Bahngeschwindigkeit, wenn $\cos mt = 0$ und $\cos nt = 0$. Der oscillirende Punkt befindet sich dann in einer Ecke des Amplitudenrechtecks. Hier findet also eine Umkehr der Bewegung Statt, wie sich schon früher bei der Construction der Curven ergab.

Wenn der oscillirende Punkt einen Doppelpunkt des ersten Systems passirt, so sind seine Projectionsgeschwindigkeiten entweder gleich oder entgegengesetzt gleich, denn für einen solchen Punkt ist:

$$\frac{dx}{dt} = \pm\, am \sin \frac{m}{n} q\pi,$$

$$\frac{dy}{dt} = bn \cos \frac{n}{m} (2p - 1) \frac{\pi}{2}$$

Dasselbe gilt für einen Doppelpunkt des zweiten Systems, für welchen man erhält:

$$\frac{dx}{dt} = am \cos \frac{m}{n} (2p - 1) \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \pm\, bn \sin \frac{n}{m} q\pi.$$

Daraus folgt weiter, dass der oscillirende Punkt beim ersten Durchgange durch einen Doppelpunkt dieselbe Bahngeschwindigkeit besitzt, wie beim zweiten Durchgange durch denselben.

Das Gesagte giebt ein Mittel an die Hand, um aus der Zeichnung der Curve zu erkennen, ob man es mit einem Doppelpunkte des ersten oder zweiten Systems zu tun hat. Man markire nämlich die Richtung der Bahngeschwindigkeit beide Mal, wo der oscillirende Punkt denselben Doppelpunkt passirt. Dann zerlege man diese Richtungen mit Hilfe des Satzes vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten in Componenten, welche den Achsen parallel laufen. Auf diese Weise findet man, dass zwei dieser Componenten dieselbe, und die beiden anderen entgegengesetzte Richtung haben. Gemäss der obigen Werte von $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ hat man also einen Doppelpunkt des ersten oder zweiten Systems, je nachdem die beiden Componenten in der x Achse oder die in der y Achse entgegengesetzte Richtung haben.

Dieses Kriterium verliert seine Anwendbarkeit, wenn für $\varphi = 0$ die beiden Grössen m und n beide ungerade sind. Denn in diesem Falle wird, wie früher gezeigt wurde, die Curve 2 Mal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Dann fallen aber auch, wie ebenfalls früher gezeigt wurde, beide Systeme von Doppelpunkten zusammen.

Ob und welchen Einfluss die Phasendifferenz auf die Resultate dieses § ausübt, ist leicht zu erkennen.

§ 12.

Krümmung der Curve.

Für den Krümmungshalbmesser einer Curve, deren Gleichungen einen Parameter t enthalten, existirt die Formel:

$$\varrho = \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}^3}{\frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2}}$$

Nun ist, unter der Voraussetzung $\varphi = 0$, auf welchen Fall die Untersuchung hier wieder beschränkt werden soll:

$$\frac{dx}{dt} = am\cos mt, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -am^2\sin mt$$

$$\frac{dy}{dt} = bn\cos nt, \qquad \frac{d^2y}{\partial t^2} = -bn^2\sin nt$$

Durch Einsetzen dieser Werte in obige Formel ergiebt sich:

$$\varrho = \frac{1}{ab\,mu} \cdot \frac{(a^2m^2\cos^2 mt + b^2n^2\cos^2 nt)^{\frac{3}{2}}}{m\sin mt\cos nt - n\sin nt\cos mt}$$

woraus durch Elimination von t folgt:

$$\varrho = \frac{1}{mn}\,\frac{[m^2(a^2 - x^2) + n^2(b^2 - y^2)]^{\frac{3}{2}}}{mx\sqrt{b^2 - y^2} - ny\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Demnach kann der Krümmungshalbmesser ϱ für einen beliebigen Punkt der Curve auf ähnliche Weise construirt werden, wie in § 10. die Tangente.

Als besondere Werte von ϱ sind folgende hervorzuheben:

Im Coordinatenanfangspunkte ($x = 0$, $y = 0$) ist der Krümmungshalbmesser unendlich gross; jener Punkt ist also ein Wendepunkt, wo die Curve den Sinn ihrer Krümmung ändert. Dies ist in Uebereinstimmung mit § 6.

Befindet sich der oscillirende Punkt auf den horizontalen Seiten des Amplitudenrechtecks ($y = \pm b$), so ist

$$\varrho = \frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{a^2 - x^2}{b},$$

speciell in den Schnittpunkten der y Achse ($y = \pm b$, $x = 0$)

$$\varrho = \frac{m^2}{n^2} \frac{a^2}{b}$$

und in den Ecken des Amplitudenrechtecks ($y = \pm b$, $x = \pm a$) ist $\varrho = 0$; dies letztere befindet sich in Uebereinstimmung mit dem, was früher bewiesen wurde, nämlich, dass der oscillirende Punkt, sobald er in eine jener Ecken gelangt ist, in seiner Bewegung umkehrt.

In Betreff der verticalen Seiten des Amplitudenrechtecks ergeben sich analoge Resultate.

Für die Krümmungsradien der beiden Curvenzweige, welche sich in einem Doppelpunkte des ersten Systems durchschneiden, ergiebt sich:

$$\varrho = \frac{1}{ab\,mn} \cdot \frac{\left[a^2 m^2 \left(\sin \frac{m}{n} q\pi\right)^2 + b^2 n^2 \left(\cos \frac{n}{m} \overline{2p-1} \frac{\pi}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{m \cos \frac{m}{n} q\pi \cos \frac{n}{m} (2p-1) \frac{\pi}{2} \pm n \sin \frac{m}{n} q\pi \sin \frac{n}{m} (2p-1) \frac{\pi}{2}}$$

Diese beiden Krümmungsradien sind im Allgemeinen von einander verschieden; sie werden aber ihrem absoluten Werte nach einander gleich, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1) $\cos \frac{m}{n} q\pi = 0$

2) $\cos \frac{n}{m} (2p-1) \frac{\pi}{2} = 0$

3) $\sin \frac{m}{n} q\pi = 0$

4) $\sin \frac{n}{m} (2p-1) \frac{\pi}{2} = 0$

Daraus ergeben sich für die Zahlen p und q die folgenden Bedingungsgleichungen:

1) $\frac{m}{n} q = \frac{1}{2}(2k+1)$

2) $\frac{n}{m} (2p-1) = 2k+1$

$$3)\qquad \frac{m}{n}q = k$$

$$4)\qquad \frac{n}{m}(2p-1) = 2k$$

wo k eine ganze Zahl bedeutet.

Die erste Gleichung erfordert ein gerades n; sie ist erfüllt für $q = \frac{1}{2}n$.

Die zweite Gleichung erfordert m und n beide ungerade; sie ist erfüllt für $p = \frac{1}{2}(m+1)$ und für $p = \frac{1}{2}(3m+1)$. In beiden Fällen hat man aber keinen eigentlichen Doppelpunkt (vergl. § 1.).

Was die dritte Gleichung anbetrifft, so kann von derselben überhaupt abgesehen werden, da q nur bis $n-1$ genommen wird, und m und n relative Primzahlen sind.

Die vierte Gleichung endlich erfordert wieder ein gerades n. Dieselbe ist erfüllt, wenn $p = \frac{1}{2}(m+1)$ oder $p = \frac{1}{2}(3m+1)$.

Das Gesammtresultat lautet jetzt folgendermassen:

Für einen Doppelpunkt des ersten Systems können die beiden Krümmungsradien nur dann einander gleich werden, wenn n eine gerade Zahl ist. Dann sind sie aber jedes Mal gleich, wenn eine der drei Bedingungen

$$q = \tfrac{1}{2}n, \qquad p = \tfrac{1}{2}(m+1), \qquad p = \tfrac{1}{2}(3m+1)$$

erfüllt ist.

Der Parameter t eines solchen Doppelpunktes ist also entweder

$$t = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2p-1}{m}+1\right)$$

oder

$$t = \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{2q}{n}\right)$$

oder

$$t = \frac{\pi}{2}\left(3+\frac{2q}{n}\right);$$

im ersten Falle ist $\sin(mt) = 0$, in den beiden andern Fällen $\sin nt = 0$.

Für die Doppelpunkte des zweiten Systems ergiebt sich auf dieselbe Weise das Resultat:

Die beiden Krümmungsradien eines Doppelpunktes im zweiten System können nur dann einander gleich werden, wenn m eine gerade Zahl ist. Dann sind sie aber jedes Mal gleich, wenn eine er dr[illegible]enden Bedingungen

$$p = \tfrac{1}{2}(n+1), \qquad p = \tfrac{1}{2}(3n+1), \qquad q = \tfrac{1}{2}m$$

erfüllt ist.

Der Parameter t ist dann entweder

$$t = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{2q}{m}\right)$$

oder

$$t = \frac{\pi}{2}\left(3 + \frac{2q}{m}\right)$$

oder

$$t = \frac{\pi}{2}\left(\frac{2p-1}{n} + 1\right)$$

Im letzten Falle ist $\sin nt = 0$, in den beiden andern Fällen aber $\sin mt = 0$.

Fasst man jetzt beide Resultate in eins zusammen, so ergeben sich folgende Sätze:

Die beiden Krümmungsradien eines Doppelpunktes können nur bei solchen Curven einander gleich sein, für welche eine der beiden Zahlen m und n gerade ist. Sind aber m und n gleichzeitig ungerade, so sind die beiden Krümmungsradien eines Doppelpunktes stets verschieden.

Und ferner:

Diejenigen Doppelpunkte, für welche die beiden Krümmungsradien gleich werden, liegen auf den Coordinatenachsen.

Letzteres ist in Uebereinstimmung mit der symmetrischen Lage der Curve zu beiden Achsen.

Vorstehende Resultate beziehen sich alle auf den Fall, wo die Phasendifferenz $\varphi = 0$ ist. Dieselben ändern sich in unerheblicher Weise, wenn φ einen von 0 verschiedenen Wert hat. Dann treten an Stelle derjenigen Curven, wo m und n beide ungerade sind, alle diejenigen Curven, welche durch eine Ecke des Amplitudenrechtecks hindurchgehen, und an Stelle derjenigen Curven, wo m oder n gerade, alle diejenigen, welche nicht durch eine solche Ecke hindurchgehen.

§ 13.

Quadratur und Rectification.

Was die Quadratur derjenigen Fläche anbetrifft, welche von einem Curvenbogen, der Abscissenachse und den beiden Endordinaten begrenzt wird, so ist dieselbe ohne Schwierigkeit, da man dabei auf ein Integral von der Form:

$$\int \sin nt \cos(mt + \varphi) dt$$

geführt wird, welches mit Benutzung der trigonometrischen Formel

$$\sin\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$$

leicht berechnet werden kann.

Beispielsweise erhält man für den Inhalt der ganzen von der Curve

$$x = a \sin t, \qquad y = b \sin 2t$$

eingeschlossenen Fläche den Wert: $F = \tfrac{8}{3}ab$. Dagegen führt die Rectification der Curve auf ein Integral von der Form

$$\int \sqrt{a^2m^2[\cos(mt+\varphi)]^2 + b^2n^2[\cos nt]^2}\, dt$$

welches im Allgemeinen durch die gewöhnlichen Methoden (d. h. mittelst Kreisbögen und Logarithmen) nicht ausführbar ist, so dass man zu Näherungsformeln seine Zuflucht nehmen muss. So erhält man z. B. nach der bekannten Simpson'schen Regel für die Bogenlänge der Curve

$$x = a \sin t, \qquad y = \tfrac{1}{4} a \sin 2t$$

den Wert:

$$s = 1{,}9408 \ldots a\pi.$$

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die Curve

$$x = a \sin t, \qquad y = \tfrac{1}{8} a \sqrt{2} \sin 2t$$

mittelst Kreisbögen rectificirt werden kann; man findet in diesem Falle:

$$s = a\pi\sqrt{2}.$$

Anmerkung.

Beim Anfertigen vorliegender Arbeit war ich durch die Ungunst der Verhältnisse leider nicht im Stande, die einschlagende Litteratur nachzusehen. Abgesehen von dem in der Einleitung angegebenen Bande der Annales de Chimie et de Physique stand mir kein den Gegenstand berührendes Werk zu Gebote. Erst nach Vollendung meiner Arbeit erhielt ich durch die Güte des Herrn Professor Stern in Göttingen Kenntniss von der Dissertation, betitelt: Die Singularitäten der Lissajous'schen Stimmgabelcurven, von Wilhelm Braun. Da beide Arbeiten denselben Gegenstand behandeln, so möge hier noch angeführt werden, in welchen Punkten sich dieselben berühren.

Im § 2. seiner Abhandlung leitet Herr Braun die Ordnungszahl der Lissajous'schen Curve ab, indem er mit Hilfe der bekannten Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\cos nt &= \tfrac{1}{2}\left(\lambda^n + \frac{1}{\lambda^n}\right) \\ \sin nt &= \frac{1}{2i}\left(\lambda^n - \frac{1}{\lambda^n}\right)\end{aligned}\right\} \quad \lambda^n = e^{ti}$$

die laufenden Coordinaten rational durch einen Parameter darstellt und hierauf die Zahl der Schnittpunkte mit einer Geraden bestimmt.

In § 3. wird sodann der Parameter λ nach der Bezout'schen Methode eliminirt und die Gleichung der Curve in Cartesischen Coordinaten hergestellt. Die hierbei gewonnenen Resultate sind in § 6. meiner Arbeit auf anderem Wege abgeleitet.

Im § 4. bestimmt Herr Braun die Zahl der Doppelpunkte, welche einer Lissajous'schen Curve zukommen, jedoch nur für den Fall, wo dieselbe nicht durch die Ecken des Amplitudenrechtecks hindurchgeht. Für den zweiten Fall, welchen er den der ausgearteten Curven nennt, wird das Resultat ohne specielle Ableitung angegeben.

Die hierauf bezüglichen Resultate sind auf ähnliche Weise in den §§ 7.—9. meiner Arbeit für beide Fälle abgeleitet.

Im Uebrigen behandeln beide Arbeiten verschiedene Themata



XXVII.

Geometrische Untersuchungen über kubische und höhere Curven und Gleichungen.

Von

Emil Oekinghaus.

Obgleich auf diesem Gebiet mehr wie auf jedem andern zahllose Untersuchungen angestellt worden sind, so ist der Gegenstand noch keineswegs erschöpft und liefert namentlich bei Anwendung geometrischer Methoden als Interpretation der Gleichungen manche brauchbare Ergebnisse.

Die nachfolgenden Betrachtungen über die kubischen Curven und Gleichungen; über das einfache Hyperboloid als geometrischen Ort der Wurzeln der ersteren; die Trisectionshyperbel mit ihren harmonischen Beziehungen nebst ihrer Bedeutung für den casus irreductibilis; die durch eine bestimmte Winkelfunction charakterisirten Curven 2ten bis $n$ten Grades und ihre specielle Anwendung auf Kegelschnitte und lemniskatische Linien mit ihren Focal-, Centri- und Scheitelwinkeln ergeben mehrere interessante Sätze und Relationen, wie dies stets der Fall ist, sobald ein mathematisches Problem aus analytisch-geometrischem Gesichtspunkte betrachtet wird.

I.

Es liege vor die kubische Gleichung

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0, \qquad 1)$$

deren Wurzeln aus der kubischen Curve

$$k^2 y = x^3 - ax^2 + bx - c \qquad 2)$$

für $y = 0$ hervorgehen. Der Einfachheit wegen setzen wir $k = 1$. Wir differentiiren 2) und bezeichnen $\frac{\partial y}{\partial x}$ mit $\operatorname{tg}\tau$, dann ist der Differentialquotient

$$\operatorname{tg}\tau = 3x^2 - 2ax + b. \qquad 3)$$

Die Resultante der Elimination von x aus 1) und 3) ist nun

$$\operatorname{tg}\tau^3 - (a^2 - 3b)\operatorname{tg}\tau^2 - (4a^3c - a^2b^2 - 18abc + 4b^3 + 27c^2) = 0$$

oder

$$\operatorname{tg}\tau^3 - (a^2 - 3b)\operatorname{tg}\tau^2 - D = 0,$$

wo D, die Discriminante der kubischen Gleichung bei reellen Wurzeln stets negativ ist. Der Ausdruck $a^2 - 3b$ ist die quadratische Variante.

Wir führen ein

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= u_3, \\ x_2 - x_3 &= u_1, \\ x_3 - x_1 &= u_2, \end{aligned} \qquad 5)$$

dann ist auch, wie bekannt

$$u^3 - (a^2 - 3b)u + \sqrt{-D} = 0, \qquad 6)$$

und weil

$$\cot\tau^3 - \frac{a^2 - 3b}{-D}\cot\tau + \frac{1}{-D} = 0,$$

so folgt

$$u_1 \operatorname{tg}\tau_1 = u_2 \operatorname{tg}\tau_2 = u_3 \operatorname{tg}\tau_3 = \sqrt{-D}. \qquad 7)$$

Die Ordinate des Durchschnittspunktes zweier Tangenten der kubischen Curve sei v, dann ergibt eine einfache Betrachtung

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{v_1} &= \cot\tau_3 - \cot\tau_2 = \frac{u_3 - u_2}{\sqrt{-D}}, \\ \frac{u_2}{v_2} &= \cot\tau_3 - \cot\tau_1, \\ \frac{u_3}{v_3} &= \cot\tau_2 - \cot\tau_1, \end{aligned} \qquad 8)$$

und weil

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0,$$

so resultirt aus 8)

$$\frac{u_2 + u_3}{v_1} = \frac{u_2 - u_3}{\sqrt{-D}}. \qquad 9)$$

Vermittelst der Substitution von

$$\frac{u_2}{u_3} = y$$

wird y durch eine reciproke Gleichung 6. Grades

$$y^6 + Ay^5 + By^4 + Cy^3 + By^2 + Ay + 1 = 0$$

bestimmt, in welcher

$$A = 3,$$

$$B = \frac{(a^2 - 3b)^3 + 6D}{D}, \tag{10}$$

$$C = \frac{2(a^2 - 3b)^3 + 7D}{D}$$

ist. Aus 9) folgt

$$y = \frac{1 + \frac{\sqrt{-D}}{v}}{1 - \frac{\sqrt{-D}}{v}}. \tag{11}$$

Wir wollen hier und für das Folgende bemerken, dass, wo die geometrischen Grössen u und v mit D in Verbindung treten, letztere durch $\frac{D}{k^4}$ eigentlich bezeichnet werden muss. Es ist bekanntlich

$$D = -(x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2$$

bei reellen Werten negativ.

Es sei nun

$$y + \frac{1}{y} = z$$

oder

$$\frac{z}{2} = \frac{\frac{v^2}{D} - 1}{\frac{v^2}{D} + 1}, \tag{12}$$

dann wird die Gleichung für z

$$z^3 + 3z^2 + \frac{(a^2 - 3b)^3 + 3D}{D} z + \frac{2(a^2 - 3b)^3 + D}{D} = 0, \tag{13}$$

aus welcher die Relation folgt:

$$\frac{v_1^2 - D}{v_1^2 + D} + \frac{v_2^2 - D}{v_2^2 + D} + \frac{v_3^2 - D}{v_3^2 + D} = -\tfrac{3}{2}.$$

Führen wir in 13)

$$z = \omega - 1 \tag{14}$$

ein, so ergibt die Vergleichung von

$$\omega^3 + \frac{(a^2-3b)^3}{D}\omega + \frac{(a^2-3b)^3}{D} = 0 \tag{15}$$

mit

$$\cot\tau^3 + \frac{a^2-3b}{D}\cot\tau + \frac{1}{-D} = 0$$

die Beziehung

$$\cot\tau = \frac{-\omega}{a^2-3b}, \qquad \omega = \frac{3v^2-D}{v^2+D}, \tag{16}$$

demnach ist

$$\operatorname{tg}\tau = -\frac{a^2-3b}{3v^2-D}(v^2+D) = \frac{\sqrt{-D}}{u}, \tag{17}$$

mithin

$$u\frac{v^2+D}{3v^2-D} = -\frac{\sqrt{-D}}{a^2-3b}. \tag{18}$$

Ersetzen wir hierin u durch

$$\frac{\sqrt{-D}}{a^2-3b-u^2}$$

so folgt die symmetrische Formel

$$\frac{4(a^2-3b)}{u^2} + \frac{D}{v^2} = 3. \tag{19}$$

Vermöge 18) finden sich noch die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \frac{3v_1^2-D}{v_1^2+D} + \frac{3v_2^2-D}{v_2^2+D} + \frac{3v_3^2-D}{v_3^2+D} &= 0, \\ \frac{v_1^2}{v_1^2+D} + \frac{v_2^2}{v_2^2+D} + \frac{v_3^2}{v_3^2+D} &= \tfrac{3}{4}, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

und andere, welche den Zusammenhang der Variabeln v mit der Discriminante zeigen. Diejenige Gattung kubischer Gleichungen, deren quadratische Variante und Discriminante, mithin auch ihre kubische Variante in allen Fällen constant ist, bestimmt vermöge 19) eine Curve

$$\frac{V}{u^2} + \frac{D}{v^2} = 3,$$

worin die zusammengehörigen 3 Paare u, v, etc. als Coordinaten auftreten.

Es lassen sich noch einige Formeln entwickeln, wenn wir die trigonometrischen Beziehungen

$$\cos 3\varepsilon = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{2(a^2 - 3b)\sqrt{a^2 - 3b}},$$

$$\sin 3\varepsilon = \frac{\sqrt{-27D}}{2(a^2 - 3b)^{\frac{3}{2}}}, \qquad 21)$$

$$\operatorname{tg} 3\varepsilon = \frac{3\sqrt{-3D}}{2a^3 - 9ab + 27c},$$

$$u = \sqrt{\tfrac{4}{3}(a^2 - 3b)}\,\sin\varepsilon, \quad \text{etc.}$$

in Verbindung bringen mit 18).

Aus

$$v^2 + D + (3v^2 - D)\frac{\sqrt{-D}}{(a^2 - 3b)}\cdot\frac{1}{u} = 0$$

folgt

$$v^2 + D + \left(v^2 - \frac{D}{3}\right)\frac{\sin 3\varepsilon}{\sin\varepsilon} = 0, \qquad 22)$$

oder nach einigen Entwickelungen

$$v_1 = \sqrt{\frac{-D}{3}}\operatorname{tg}\varepsilon,$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{-D}{3}}\operatorname{tg}(60^0 + \varepsilon), \qquad 23)$$

$$v_3 = -\sqrt{\frac{-D}{3}}\operatorname{tg}(60^0 - \varepsilon),$$

während

$$u_1 = \sqrt{\tfrac{4}{3}(a^2 - 3b)}\,\sin\varepsilon,$$

$$u_2 = -\sqrt{\tfrac{4}{3}(a^2 - 3b)}\,\sin(60^0 + \varepsilon), \qquad 24)$$

$$u_3 = \sqrt{\tfrac{4}{3}(a^2 - 3b)}\,\sin(60^0 - \varepsilon).$$

Das Dreieck, welches die 3 Tangenten der Curve in den Schnittpunkten mit der Achse einschliessen, hat den Inhalt

$$\varDelta = \tfrac{1}{2}(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) = \frac{2(a^2 - 3b)^2\sqrt{-D}}{2a^3 - 9ab + 27c}. \qquad 25)$$

Ferner ist

$$v_1v_2 + v_2v_3 + v_3v_1 = D. \qquad 26)$$

Die kubische Formel für v ist nämlich

$$v^3 + \frac{9D}{2a^3 - 9ab + 27c} v^2 + Dv + \frac{D^2}{2a^3 - 9ab + 27c} = 0, \qquad 27)$$

und hat die Reducente $\alpha\beta = 9\gamma$.

Demnach ist

$$(v_1 + v_2 + v_3)(v_1 v_2 + v_1 v_3 + v_2 v_3) = 9 v_1 v_2 v_3,$$
$$\frac{v_1 v_2 v_3}{v_1 + v_2 + v_3} = \frac{D}{9}. \qquad 28)$$

Aus 26) geht hervor, dass die Summe der Producte je zweier Höhen der drei durch die Tangenten gebildeten Dreiecke die Discriminante bildet.

Aus 7) und 24) resultirt noch

$$\operatorname{tg}\tau_1 = \sqrt{\frac{-3D}{4(a^2 - 3b)}}\,\frac{1}{\sin\varepsilon}, \quad \operatorname{tg}\tau_2 = -\sqrt{\frac{-3D}{4(a^2 - 3b)}}\cdot\frac{1}{\sin(60^0 + \varepsilon)},$$
$$\operatorname{tg}\tau_3 = \sqrt{\frac{-3D}{4(a^2 - 3b)}}\cdot\frac{1}{\sin(60^0 - \varepsilon)}.$$

Von diesen bis jetzt entwickelten Formeln werden wir zum Zwecke einer verallgemeinerten geometrischen Betrachtung sogleich Gebrauch machen.

II.

Betrachtet man die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$x^3 - ax^2 + bx - c = \Delta = 0,$$

welche wir jetzt mit x, y, z bezeichnen wollen, als Coordinaten eines Punktes im Raume, so entsteht die Frage, welchen Raumgebilden dieser Punkt entspricht. Wir wollen nachweisen, dass eine centrische Fläche zweiten Grades und zwar das einfache Hyperboloid den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Die Gleichung 4) geht wegen $\operatorname{tg}\tau = \frac{\partial\Delta}{\partial x}$ über in

$$\left(\frac{1}{\frac{\partial\Delta}{\partial x}}\right)^3 + \frac{a^2 - 3b}{D}\left(\frac{1}{\frac{\partial\Delta}{\partial x}}\right) - \frac{1}{D} = 0. \qquad 29)$$

Ferner besteht die reducirte Gleichung

$$\left(\frac{x}{\frac{\partial\Delta}{\partial x}}\right)^3 - \frac{b^2 - 3ac}{D}\left(\frac{x}{\frac{\partial\Delta}{\partial x}}\right) + \frac{c}{D} = 0. \qquad 30)$$

und endlich noch

$$\left(\frac{x^2}{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}\right)^3 - \left(\frac{x^2}{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}\right)^2 - \frac{b^3 + 9c^2}{D}\left(\frac{x^2}{\frac{\partial \Delta}{\partial x}}\right) + \frac{c^2}{D} = 0. \qquad 31)$$

Die Ableitung dieser Gleichungen hat keine Schwierigkeit.

Wir bezeichnen nun die Ausdrücke

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial x_3}, \quad \text{d. i.} \quad \operatorname{tg} \tau_1, \ \operatorname{tg} \tau_2, \ \operatorname{tg} \tau_3$$

in folgender Art:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x_1} = A^2, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial x_3} = B^2, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial x_2} = -C^2,$$

indem wir annehmen, dass $x_1 > x_2 > x_3$ ist.

Aus 30) und 31) folgen nun die Relationen

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} &= 1, \\ \frac{x}{A^2} + \frac{y}{B^2} - \frac{z}{C^2} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad 33)$$

ferner ist

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1.$$

Die erste dieser Gleichungen charakterisirt ein Hyperboloid, die zweite und dritte Ebenen.

Das einfache Hyperboloid hat zunächst die Eigenschaft

$$\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} = \frac{1}{C^2}, \qquad 34)$$

und ist deshalb ein gleichseitiges.

Die genannten Ebenen schneiden sich in einer Geraden, und diese bestimmt in einem ihrer Schnittpunkte mit der Fläche die Coordinaten xyz als Wurzeln der kubischen Gleichung. Diese Flächen stehen in eigentümlichen einfachen Beziehungen zu einander, welche wir mittelst der analytischen Geometrie des Raumes jetzt ableiten wollen.

Die Ebene

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} - \frac{z}{a} = 1$$

schneidet das Hyperboloid in einer Linie zweiten Grades, deren Horizontalprojection vermittelst Elimination von z gefunden wird. Die allgemeine Form ist

$$A_1x^2 + B_1y^2 + 2C_1xy + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0, \tag{35}$$

welche in unserm Falle übergeht in

$$\frac{x^2}{B^2} + \frac{y^2}{A^2} + \frac{2xy}{C^2} - \frac{2ax}{C^2} - \frac{2ay}{C^2} + \frac{a^2}{C^2} + 1 = 0. \tag{36}$$

Um zu entscheiden, welcher Gattung von Kegelschnitten diese Curve zugehört, bilden wir den Ausdruck

$$C_1^2 - A_1B_1 = \Delta,$$

derselbe ist wegen 34)

$$\frac{1}{A^4} + \frac{1}{A^2B^2} + \frac{1}{B^4},$$

also grösser als 0 und es bedeutet die Gleichung 36) eine Hyperbel, deren Mittelpunkt die Coordinaten

$$\frac{aA^2}{A^2 + B^2 - C^2}, \quad \frac{aB^2}{A^2 + B^2 - C^2} \tag{37}$$

hat. Gemäss der Bedeutung von A^2, B^2, C^2 sind dieselben auch

$$\frac{aA^2}{a^2 - 3b}, \quad \frac{aB^2}{a^2 - 3b}, \tag{38}$$

also reell, weil

$$A_1E_1^2 + B_1D_1^2 + (C_1^2 - A_1B_1)F_1 - 2C_1D_1E_1 = -\Gamma, \tag{39}$$

oder

$$\frac{-A^2 - B^2 + C^2 + a^2}{+A^2B^2C^2} = \frac{a^2 - (a^2 - 3b)}{+A^2B^2C^2} = \frac{3b}{-D} = +\Gamma, \tag{40}$$

von Null verschieden ist. Dabei kann $b \gtrless 0$ sein.

Wenn dagegen in der kubischen Gleichung

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

$b = 0$ ist, so geht die Hyperbel 36) in ihre Asymptoten über und ihr Durchschnittspunkt besitzt die Coordinaten

$$\frac{A^2}{a}, \quad \frac{B^2}{a}. \tag{41}$$

Betrachten wir nun den Schnitt der Ebene mit dem Hyperboloid, so sind die Mittelpunktscoordinaten der Hyperbel, worin die Ebene die Fläche schneidet, bezüglich

$$\frac{aA^2}{a^2-3b}, \quad \frac{aB^2}{a^2-3b}, \quad \frac{-aC^2}{c^2-3c} \qquad 42)$$

und dieser Punkt liegt, wenn b positiv ist, ausserhalb des von der Fläche umschlossenen Raumes, dagegen innerhalb, wenn b negativ ist, und für $b = 0$ liegt er auf der Fläche, in welchem Falle die Hyperbel zu zwei durch diesen Punkt gehende Geraden degenerirt.

Wir wollen den Hyperbelschnitt genauer untersuchen. Nach den Methoden der analytischen Geometrie bezeichnen wir mit ϑ den Neigungswinkel der Ebene

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} - \frac{z}{a} = 1$$

gegen die xy-Ebene und mit ψ den Winkel zwischen ihrer Horizontalspur und der x-Achse. $OA = a$ ist der Abschnitt, den sie mit der y-Achse einschliesst.

Demgemäss ist die Transformation der Coordinaten durch die Formeln

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\psi - y'\sin\psi\cos\vartheta, \\ y &= x'\sin\psi + y'\cos\psi\cos\vartheta + a, \\ z &= \phantom{x'\sin\psi + {}} y'\sin\vartheta, \end{aligned} \qquad 43)$$

definirt, die Horizontalspur ist die x_1-Achse, A der Anfangspunkt.

In der allgemeinen Gleichung

$$A'x^2 + B'y^2 + 2C'xy + 2D'x + 2E'y + F' = 0, \qquad 44)$$

welche durch Einsetzen der Ausdrücke 43) in 33)$_1$ hervorgeht, ist

$$A' = \frac{\cos\psi^2}{A^2} + \frac{\sin\psi^2}{B^2}, \quad B' = \left(\frac{\sin\psi^2}{A^2} + \frac{\cos\psi^2}{B^2}\right)\cos\vartheta^2 - \frac{\sin\vartheta^2}{C^2},$$

$$C' = \frac{(A^2 - B^2)}{A^2B^2}\sin\psi\cos\psi\cos\vartheta. \qquad 45)$$

Nehmen wir nun an, dass die Schnitte der Fläche gleichseitige Hyperbeln werden, so muss die Bedingung $A' + B' = 0$ erfüllt sein, und es wird jeder Schnitt den Asymptotenkegel in 2 Geraden schneiden. Setzen wir nun die Werte

$$\sin\psi^2 = \tfrac{1}{2}, \quad \cos\psi^2 = \tfrac{1}{2}, \quad \operatorname{tg}\vartheta^2 = 2$$

ein in die Bedingungsgleichung, so resultirt schliesslich aus dieser [illegible] der allgemeinen Formel

$$A^2(B^2 - C^2) + B^2(A^2 - C^2) = C^2(A^2 + B^2) \qquad 46)$$

infolge von 34) eine identische Gleichung, woraus also hervorgeht, dass in unserm Falle alle hyperbolischen Schnitte der Fläche gleichseitige Hyperbeln sind. Eine Untersuchung für den elliptischen Kegel hat dasselbe Resultat. Wir untersuchen ferner den Schnitt der Ebene

$$\frac{x}{A^2} + \frac{y}{B^2} - \frac{z}{C^2} = 0$$

und der Fläche. Die erstere geht durch den Anfangspunkt der Coordinaten. Der Ausdruck $C_1^2 - A_1 B_1$ geht für diesen Fall in Null über, und die Gleichung der Horizontalprojection wäre demnach für $\Gamma \gtrless 0$ eine Parabel.

Da aber Γ verschwindet, degenerirt die Parabel zu zwei parallelen Geraden, deren Gleichungen sich leicht nach dem Vorigen entwickeln lassen. Sie sind

$$x - y = \pm \frac{AB}{C}. \tag{47}$$

In Bezug auf den Schnitt der Ebene mit der Fläche sieht man sofort, dass die Ebene den Asymptotenkegel des Hyperboloids berührt, mithin der Schnitt selbst zu zwei parallelen Geraden degenerirt.

Um die Stellungswinkel der Ebene zu bestimmen, benutzen wir die Gleichungen

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{A^2}}{\sqrt{\frac{1}{A^4} + \frac{1}{B^4} + \frac{1}{C^4}}}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{1}{B^2}}{\sqrt{\frac{1}{A^4} + \frac{1}{B^4} + \frac{1}{C^4}}},$$

$$\cos\gamma = \frac{-\frac{1}{C^2}}{\sqrt{\frac{1}{A^4} + \frac{1}{B^4} + \frac{1}{C^4}}}. \tag{48}$$

Die Transformation dieser Ausdrücke ergibt

$$\cos\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\tau' \sqrt{2\frac{a^2-3b}{-D}}} = \frac{u_1}{u_1 \operatorname{tg}\tau_1 \sqrt{2\frac{a^2-3b}{-D}}} \tag{49}$$

Da nun wegen 7)

$$u_1 \operatorname{tg}\tau_1 = \sqrt{-D}$$

und nach 24)

$$u_1 = \sqrt{\tfrac{4}{3}(a^2-3b)}\sin\varepsilon$$

ist, so gibt die Substitution dieser Grössen in 49) nach einigen Reductionen die einfachen Relationen

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}\sin\varepsilon, \\ \cos\beta &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}\sin(60^0-\varepsilon), \\ \cos\gamma &= -\sqrt{\tfrac{2}{3}}\sin(60^0+\varepsilon). \end{aligned} \tag{50)}$$

Wir wollen ferner die Stellung der beiden Ebenen zu einander betrachten und erinnern daran, dass die Ebenen, deren Gleichungen

$$A\,x + B\,y + C\,z = D,$$
$$A_1 x + B_1 y + C_1 z = D,$$

charakterisirt sind, aufeinander senkrecht stehen, wenn die Bedingung

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$$

erfüllt ist. Dieser Bedingung aber genügen in Folge von 34) die Ebenen

$$\frac{x}{A^2} + \frac{y}{B^2} - \frac{z}{C^2} = 0,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1,$$

und diese stehen demnach auf einander senkrecht.

Schliesslich wollen wir noch die Richtungswinkel der Durchschnittslinie beider Ebenen berechnen.

Die Gleichungen ihrer Projectionen auf die Ebenen xy und xz sind

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{A^2}+\frac{1}{C^2}\right)x + \left(\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}\right)y &= \frac{a}{C^2}, \\ \left(\frac{1}{B^2}-\frac{1}{A^2}\right)x + \left(\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}\right)z &= \frac{a}{B^2}. \end{aligned} \tag{54)}$$

Nach bekannten Formeln erhält man hieraus

$$\cos\alpha' = \frac{\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}}{\sqrt{2\left(\frac{1}{A^4}+\frac{1}{B^4}+\frac{1}{C^4}-\frac{1}{A^2B^2}+\frac{1}{A^2C^2}+\frac{1}{B^2C^2}\right)}} \quad \text{etc.} \tag{55)}$$

oder nach Früherem:

$$\cos\alpha' = \frac{\cot\tau_3 - \cot\tau_2}{\sqrt{6\,\frac{(a^2-3a)}{-D}}}. \tag{56)}$$

Man bemerke, dass

$$\cot\tau_3 - \cot\tau_2 = \frac{u_1}{v_1},$$

worin $\frac{u_1}{v_1}$ durch 23) und 24) bestimmt ist, und das Resultat dieser Substitution ist schliesslich:

$$\begin{aligned}\cos\alpha' &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}\cos\varepsilon,\\ \cos\beta' &= \sqrt{\tfrac{2}{3}}\cos(60^0-\varepsilon),\\ \cos\gamma' &= -\sqrt{\tfrac{2}{3}}\cos(60^0+\varepsilon).\end{aligned} \tag{57}$$

Die Stellungs- und Richtungswinkel der genannten Ebenen und ihrer Durchschnittsgeraden stehen demnach in einfachem Verhältniss zu dem trigonometrischen Winkel ε der kubischen Gleichung.

Das Vorstehende zusammenfassend, bestimmt demnach die eine gegen die Coordinatenachsen symmetrische Ebene in ihrem Schnitt mit dem Hyperboloid eine gleichseitige Hyperbel als geometrischen Ort der gesuchten Coordinaten xyz; die andere, den Asymptotenkegel berührende Ebene, deren Spuren in der xz- und yz-Ebene durch $\frac{z}{x}=\frac{C^2}{A^2}$ und $\frac{z}{y}=\frac{C^2}{B^2}$ definirt sind, erzeugt auf der Fläche ein System von zwei parallelen Geraden, deren eine in ihrem Durchschnitt mit der Hyperbel die Wurzeln xyz liefert. Der Mittelpunkt dieser Hyperbel liegt, wenn a von Null verschieden ist, ausserhalb, auf oder innerhalb des Hyperboloids, je nachdem b positiv, Null oder negativ ist. Ist aber $a=0$, wird also die kubische Gleichung zu einer reducirten, so geht auch die erste Ebene durch die Spitze des elliptischen Kegels, und b ist dann <0. Für diesen Fall werden die Stellungswinkel der durch den Punkt xyz gelegten Tangentialebene des Hyperboloids durch folgende leicht abzuleitende Formeln ausgedrückt:

$$\sqrt{\tfrac{2}{3}}\sin 2\varepsilon,\quad \sqrt{\tfrac{2}{3}}\sin 2(60^0-\varepsilon),\quad \sqrt{\tfrac{2}{3}}\sin 2(60^0+\varepsilon), \tag{58}$$

und der betreffende Punkt hat vom Anfangspunkt die Entfernung $=\sqrt{a^2-2b}$.

Wenn nun auch die entwickelten Resultate die directe Auflösung der kubischen Gleichung nicht liefern, so haben sie doch insofern theoretisches Interesse, als die als Raumcoordinaten aufgefassten Wurzeln der Gleichung durch die eines Punktes eines einfachen Hyperboloids definirt werden können und dass die analytischen Eigentümlichkeiten der Gleichung durch die geometrischen Eigenschaften der Durchschnitte der durch die Gleichung bestimmten Ebenen mit der Fläche sich zwanglos deuten lassen.

Bezüglich der quadratischen Gleichung $x^2-ax+b=0$ bemerken wir noch, dass die Coordinaten des Durchschnitts der Geraden $x+y=a$ und der gleichseitigen Hyperbel $x^2-y^2=a\sqrt{a^2-4b}$ die Wurzeln der Gleichung darstellen.

III.

Um den Gegenstand weiter zu verfolgen, gehen wir zunächst wieder von Gleichung 2) aus. In der Ebene dieser Curve nehmen wir einen beliebigen Punkt u', v' an, verbinden ihn durch Gerade mit den Durchschnitten der Curve und der Abscissenachse und bezeichnen die Winkel derselben mit der Ordinate v' durch ε. Demnach ist (nach Weglassung der Accente)

$$x = u + v \operatorname{tg} \omega. \tag{59}$$

Setzen wir diesen Wert ein in

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0,$$

entwickeln nach Potenzen von $\operatorname{tg}\varepsilon$, so resultirt

$$\operatorname{tg}\omega^3 + \frac{(3u-a)}{v}\operatorname{tg}\omega^2 + \frac{3u^2-2au+b}{v^2}\operatorname{tg}\omega + \frac{u^3-au^2+bu-c}{v^3} = 0. \tag{60}$$

Nun besteht aber die Gleichung

$$\operatorname{tg}(\omega_1+\omega_2+\omega_3) = \frac{v^2(a-3u)+u^3-au^2+bu-c}{v(v^2-3u^2+2au-b)}, \tag{61}$$

welche für

$$\omega_1+\omega_2+\omega_3 = \pm 90^0 \tag{62}$$

die Bedingung

$$3u^2-2au+b-v^2 = 0 \tag{63}$$

verlangt. Dieselbe ist aber nichts anders als die Gleichung einer Hyperbel

$$\left(u-\frac{a}{3}\right)^2 - \frac{v^2}{3} = \frac{a^2-3b}{9} \tag{64}$$

mit den Achsen

$$A^2 = \frac{a^2-3b}{9}, \quad B^2 = 3A^2.$$

Bekanntlich ist

$$a^2-3b = \tfrac{1}{2}((x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2)$$

die quadratische Variante der kubischen Gleichungen.

Diese Hyperbel besitzt ausser andern allgemeinen Eigenschaften noch eine bemerkenswerte und für die kubischen Gleichungen wichtige Eigenschaft, welche wir aus dem Vorstehenden ableiten wollen.

Es liege $x_1 = x_2 = A$ rechts vom Anfangspunkt in der grossen Halbachse, und $x_3 = -2A = -C$ links davon in der Excentricität, wir verbinden die genannten Punkte mit einem beliebigen Punkte des ersten Astes durch Gerade, welche mit der x-Achse die Winkel λ. und λ_3 bilden, dann ist nach 62)

$$2\lambda_1 + \lambda_3 = 180^0. \tag{65}$$

Den einen Schenkel von λ_1 verlängern wir bis zum Durchschnitt mit der Asymptote, der Winkel zwischen beiden sei ε, dann ist, weil der Asymptotenwinkel 2.60^0 beträgt,

$$\lambda' = 60^0 + \varepsilon,$$

mithin

$$2\varepsilon = 60^0 - \lambda_3.$$

Der Winkel an der Spitze des durch die Brenn- und Scheitellinie mit der Achse gebildeten Dreiecks ist aber

$$\lambda_1 - \lambda_3 = 60^0 - \lambda_3 + \varepsilon = 3\varepsilon, \tag{66}$$

woraus hervorgeht, dass der durch die Scheitelgerade mit der Asymptote gebildete Winkel der dritte Teil ist des Winkels zwischen dieser Scheitelgeraden und dem Brennstrahl aus der andern Hälfte der Curve. Vermittelst der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$$

ist man also im Stande, die Trisection eines Winkels aufs einfachste zu lösen. Der Winkel λ' ist $= 60^0 + \varepsilon$. Um nun möglichst allgemeinere Resultate zu erlangen, wollen wir die gefundenen Eigenschaften in Verbindung bringen mit den reellen Wurzeln der kubischen Gleichung $x^3 - px - q = 0$, welche bekanntlich ausgedrückt werden durch

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\tfrac{4}{3}p}\,\sin\varepsilon, \\ x_2 &= \sqrt{\tfrac{4}{3}p}\,\sin(60^0 - \varepsilon), \\ x_3 &= \sqrt{\tfrac{4}{3}p}\,\sin(60^0 + \varepsilon), \\ \sin 3\varepsilon &= \frac{3q}{p\sqrt{\tfrac{4}{3}p}}. \end{aligned} \tag{67}$$

Das genannte Dreieck giebt

$$\frac{x_3}{3a} = \frac{\sin(60^0 + \varepsilon)}{\sin 3\varepsilon}, \tag{68}$$

die obigen Formeln geben

$$\frac{x_3}{3\frac{q}{p}} = \frac{\sin(60^0 + \varepsilon)}{\sin 3\varepsilon}, \tag{69}$$

demnach ist

$$a = \frac{q}{p}. \tag{70}$$

Der dem Dreieck umbeschriebene Kreis schneidet den zweiten Ast in noch zwei Punkten, deren Brennstrahlen OX_1 und OX_2, welche wir bezüglich mit x_1 und x_2 bezeichnen wollen, in nachstehender Art berechnet werden können. Zunächst ist bei Ansicht des Dreiecks OAX_1, worin Wkl. $O = 2\varepsilon$ und Wkl. $A = \varepsilon$,

$$3a = 2R\sin 3\varepsilon \qquad (R = \text{Radius des Kreises}) \tag{71}$$

oder wegen 70)

$$\frac{3q}{p} = 2R\sin 3\varepsilon. \tag{72}$$

Führen wir hierin $\sin 3\varepsilon$ aus 67) ein, so kommt

$$R = \sqrt{\frac{p}{3}} \tag{73}$$

Da der zu x_1 gehörige Peripheriewinkel $= \varepsilon$, so ist ferner

$$x_1 = 2R\sin\varepsilon = \sqrt{\tfrac{4}{3}p}\sin\varepsilon \tag{74}$$

und

$$x_2 = 2R\sin(60^0 - \varepsilon) = \sqrt{\tfrac{4}{3}p}\sin(60^0 - \varepsilon). \tag{75}$$

Das Resultat ist also, dass die Brennstrahlen $OX_1\, OX_2\, OX_3$ der Hyperbel die Wurzeln der kubischen Gleichung $x^3 - px + q = 0$ sind, die durch die Relationen 70) und 73), welche die grosse Achse und den Radius des Kreises bestimmen, leicht construirt werden können. Dreieck $X_1X_2X_3$ ist gleichseitig. Wir verlängern die OX_1 etc. bis zum andern Hyperbelast und bezeichnen diese neuen Brennstrahlen mit $OY_1 = y_1$, $OY_2 = y_2$, $OY_3 = y_3$.

Berücksichtigt man nun, dass Wkl. $X_3AY_3 = 90^0$, dass mithin auch $X_1AY_1 = 90^0$ sein muss, so gehen ohne Weiteres bei Betrachtung der entsprechenden Dreiecke noch die Formeln hervor:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{\tfrac{4}{3}p}\cos\varepsilon, \\ y_2 &= \sqrt{\tfrac{4}{3}p}\cos(60^0 - \varepsilon), \\ y_3 &= \sqrt{\tfrac{4}{3}p}\cos(60^0 + \varepsilon), \\ \cos 3\varepsilon &= \frac{3q}{p\sqrt{\tfrac{4}{3}p}}, \end{aligned} \tag{76}$$

die demnach mit den ersten geometrisch verknüpft sind.

Der durch den Scheitelpunkt, den andern Brennpunkt und durch Y_1 gehende Kreis geht auch durch Y_2 und Y_3. Die Kreiscentra haben die Abscissen $-\frac{a}{2}$.

Man bemerke noch die Verhältnisse

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}3\varepsilon}, \quad \frac{x_2}{y_2} = \frac{\operatorname{tg}(60^0-\varepsilon)}{\operatorname{tg}3\varepsilon}, \quad \frac{x_3}{y_3} = \frac{\operatorname{tg}(60^0+\varepsilon)}{\operatorname{tg}3\varepsilon}. \qquad 77)$$

Bezeichnet man die Sehnen der Hyperbelpunkte X und Y mit s, so folgt aus den letzten Relationen:

$$\frac{s}{x} = \frac{2\cos\varepsilon}{\cos 3\varepsilon} \quad \text{etc.}$$

und es ist

$$s_1 : s_2 : s_3 = \cos\varepsilon : \cos(60^0-\varepsilon) : \cos(60^0+\varepsilon), \qquad 78)$$

im Vergleich mit 23) besteht noch die Proportion

$$\frac{x_1}{y_1} : \frac{x_2}{y_2} : \frac{x_3}{y_3} = v_1 : v_3 : v_2. \qquad 79)$$

Die harmonischen Verhältnisse wollen wir noch zum Schlusse in Kürze berühren. Nennen wir den Durchschnitt einer der Brennstrahlen OX_1Y_1 mit der Ordinate des Kreiscentrums O_1, so ist die Strecke OO_1 in den Punkten X_1 und Y_1 harmonisch geteilt. Ebenso sind X_2Y_2 und X_3Y_3 bezüglich zu OO_2 und OO_3 zugeordnete harmonische Punkte. Diese Verhältnisse wollen wir indessen nicht weiter mehr erörtern. Man vergleiche über diesen Gegenstand eine frühere Abhandlung in dieser Zeitschrift, in welcher wir auch die übrigen Fälle der kubischen Gleichungen geometrisch discutirt haben.

Die soeben für den Fall einer kubischen Gleichung abgeleiteten Resultate können erweitert werden, wenn wir die Gleichung 4. Grades

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = y = 0 \qquad 80)$$

zu Grunde legen. In der Ebene dieser Curve verbinden wir den Punkt uv mit den Durchschnittspunkten derselben und der X-Achse. Dann ist wie früher $x = u + v\operatorname{tg}\omega$. Diese Substitution von x in 80) liefert eine Gleichung für $\operatorname{tg}\omega$ und es besteht die Formel

$$\operatorname{tg}(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4) = v\frac{v^2(a-4u)+4u^3-3au^2+2bu-c}{v^4-v^2(6u^2-3au+b)+u^4-au^3+bu^2-cu+d}. \qquad 81)$$

Es sei

$$\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4 = 180^0, \qquad 82)$$

dies bedingt

$$v^2 = \frac{-4u^3+3au^2-2bu+c}{a-4u}. \qquad 83)$$

Die Division ergibt, wenn wir die Reducente $a^3-4ab+8c=0$ einführen, als Resultat

$$u^2 - v^2 - \frac{a}{2}u - \tfrac{1}{8}(a^2 - 4b) = 0,$$

d. i.

$$\left(u - \frac{a}{4}\right)^2 - v^2 = \frac{3a^2 - 8b}{16}. \qquad 84)$$

mithin eine gleichseitige Hyperbel.

Der Reducente entspricht die Gleichung $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$. Setzen wir der Einfachheit wegen noch $x_1 = -x_2$ und $x_3 = -x_4$ voraus, so reducirt sich die letzte Gleichung auf

$$u^2 - v^2 = \frac{x_1^2 + x_3^2}{2} = A^2, \qquad 85)$$

für $\lambda_1 = 90 - \varepsilon$ hat man also mit dieser Curve

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 180^0, \qquad 86)$$

d. h.: Bestimmt man auf der X-Achse einer gleichseitigen Hyperbel $u^2 - v^2 = A^2$ vier zum Anfangspunkt der Coordinaten symmetrisch liegende Punkte $x_1 x_2$ und $-x_1 - x_2$ so, dass die Relation $x_1^2 + x_2^2 = 2A^2 = C^2$ (C = Excentricität) stattfindet, und zieht dann von einem Hyperbelpunkt nach diesen 4 Punkten Gerade, welche mit der X-Achse die Winkel λ_1, λ_2 etc. einschliessen, so ist $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 180^0$. Wir wollen hieraus einige Sätze ziehen, die vielleicht neu sein dürften.

Fallen zwei Punkte in den entsprechenden Brennpunkt, die beiden andern also in den Anfangspunkt, so bestehen für 2 Curvenpunkte die Relationen

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4 = 180^0,$$
$$L_1 + 2L_2 + L_4 = 180^0.$$

Ziehen wir die erste Gleichung von der zweiten ab, und führen die Focalwinkel f und f', sowie den entsprechenden Centriwinkel c ein, so ist wegen $L_1 - \lambda_1 = f$, $\lambda_4 - L_4 = f_1$, $\lambda_2 - L_2 = c$

$$f - f' = 2c, \qquad 87)$$

und man hat den Satz:

Der Centriwinkel einer gleichseitigen Hyperbel ist gleich der halben Differenz der Focalwinkel, welche mit ihm auf gleichem Bogen stehen.

Liegen endlich je zwei Punkte in den Scheitelpunkten der Hyperbel, so ist $\lambda_1 + \lambda_4 = 90^0$ und für einen zweiten Punkt $L_1 + L_4 = 90^0$. Die Differenz ergibt Scheitelwinkel. Damit haben wir den Satz:

Die beiden auf demselben Bogen stehenden Scheitelwinkel einer gleichseitigen Hyperbel sind einander gleich.

Dieser Satz lässt sich erweitern:

Ein Durchmesser $2r$ dieser Hyperbel schliesse mit der X-Achse den Winkel α ein, seine Endpunkte verbinden wir mit einem Punkte uv der Curve, und die betreffenden Geraden mögen mit der Achse die Winkel λ und λ_1 bilden, dann ist

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{v - r\sin\alpha}{u - r\cos\alpha}, \qquad \operatorname{tg}\lambda' = \frac{v + r\sin\alpha}{u + r\cos\alpha}.$$

soll nun $\lambda + \lambda' = 90^0$ sein, so verlangt dies

$$\operatorname{tg}\lambda\operatorname{tg}\lambda' = 1 = \frac{v^2 - r^2\sin\alpha^2}{u^2 - r^2\cos\alpha^2},$$

d. i.

$$u^2 - v^2 = r^2\cos 2\alpha = A^2. \tag{88}$$

Also: Die auf demselben Bogen stehenden Peripheriewinkel nach den Endpunkten eines Durchmessers einer gleichseitigen Hyperbel sind einander gleich.

Auch hier gilt der Satz, sofern er im richtigen Sinn genommen wird:

Der Winkel, den die Tangente der Hyperbel mit der Sehne macht, ist dem Winkel im gegenüberliegenden Hyperbelast gleich.

Hieraus folgt eine Construction der Curve.

Ferner folgt noch aus den Formeln 66) der Trisectionshyperbel, dass ein Focalwinkel des einen Astes doppelt so gross ist als der Scheitelwinkel des andern Astes, sofern dieselben auf gleichem Bogen stehen.

Die eben skizzirten Methoden lassen eine Verallgemeinerung zu für die Gleichung $n$ten Grades mit reellen Wurzeln

$$x^n - ax^{n-1} + b^{n-2} \ldots px + q = y = 0. \tag{89}$$

Wie vorhin verbinden wir die durch die Wurzeln bestimmten Punkte der X-Achse mit einem Punkte $R(\varphi)$ der Ebene xy und bezeichnen die Winkel zwischen diesen Geraden und R mit Θ, dann ist

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{x\sin\varphi}{R - x\cos\varphi}.$$

Den aus dieser Formel folgenden Wert von x setzen wir in die obige Gleichung ein, und es lässt sich aus der resultirenden Gleichung

$$\operatorname{tg}\Theta^n - A\operatorname{tg}\Theta^{n-1} + B\operatorname{tg}\Theta^{n-2} \ldots = 0$$

die Formel für die Tangentensumme

$$\operatorname{tg}(\Theta_1 + \Theta_2 \dots \Theta_n) = \frac{A - C + E \dots}{1 - B + D - T} \tag{90}$$

benutzen. Man findet schliesslich

$$\operatorname{tg}(\Theta_1 + \Theta_2 \dots \Theta_n) = \frac{R^{n-1} a \sin\varphi - R^{n-2} b \sin 2\varphi + R^{n-3} c \sin 3\varphi \dots}{R^n - R^{n-1} a \cos\varphi + R^{n-2} b \cos 2\varphi - R^{n-3} c \cos 3\varphi \dots} \tag{91}$$

Setzen wir

$$\Theta_1 + \Theta_2 \dots \Theta_n = U,$$

so ist auch

$$R^n \sin U - R^{n-1} a \sin(U + \varphi) + R^{n-2} b \sin(U + 2\varphi) \dots q \sin(U + n\varphi) = 0. \tag{92}$$

Man kann diese Polargleichungen nach Belieben modificiren, indem man über U oder die Constanten a, b etc. willkürliche Annahmen macht. Man findet dann einige neue Eigenschaften dieser Curven. Ist beispielsweise $U = 90^0$, so besteht die Bedingungsgleichung

$$R^n - R^{n-1} a \cos\varphi + R^{n-2} b \cos 2\varphi \dots = 0. \tag{93}$$

Für $U = 0$ oder 180^0 ist

$$R^{n-1} a \sin\varphi - R^{n-2} b \sin 2\varphi + R^{n-3} c \sin 3\varphi \dots = 0. \tag{94}$$

Die erste Gleichung wird für $n = 4$

$$R^4 - R^3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\cos\varphi + R^2(x_1x_2 + x_3x_4 \dots)\cos 2\varphi$$
$$- R(x_1x_2x_3 \dots)\cos 3\varphi + x_1x_2x_3x_4 \cos 4\varphi \tag{95}$$

und diese Curve hat wie überhaupt die meisten Curven dieser Art, eine schleifenähnliche Form, welche an die Lemniskaten, Conchoiden etc. erinnert. Anstatt die Strecken x_1x_2 auf der Abscissenachse allein abzutragen empfiehlt es sich auch die Ordinatenachse dazu zu benutzen. So möge die erste Achse zwei Punkte $+m$, $-m$, die andere die Punkte $+n$, $-n$ enthalten. Wir verbinden diese Punkte mit dem Punkte xy der Ebene durch Gerade, dann ist

$$\operatorname{tg}\Theta_1 = \frac{x-m}{y}, \quad \operatorname{tg}\Theta_2 = \frac{x+m}{y}, \quad \operatorname{tg}\Theta_3 = \frac{y-n}{x}, \quad \operatorname{tg}\Theta_4 = \frac{y+n}{x}$$

Die Formel für die Winkelsumme nimmt die Gestalt an

$$\operatorname{tg} U = \operatorname{tg}(-\Theta_1 + \Theta_2 - \Theta_3 + \Theta_4) = \frac{(m^2 + n^2) R^2 \sin 2\varphi}{R^4 - (m^2 - n^2) R^2 \cos 2\varphi - m^2 n^2} \tag{96}$$

Wir führen ein

$$\begin{aligned} k^2 \sin 2\alpha &= (m^2 + n^2) \cos U, \\ k^2 \cos 2\alpha &= (m^2 - n^2) \sin U. \end{aligned} \tag{97}$$

Demnach wird

$$R^4 - \frac{k^2}{\sin U} R^2 \cos 2(\varphi + \alpha) = m^2 n^2. \tag{98}$$

Soll diese Formel mit der Gleichung der Lemniskate (Cassinische Linie)

$$R^4 - 2c^2R^2\cos 2\psi + c^4 = q^4 \tag{99}$$

identisch werden, so muss sein

$$\begin{aligned} \varphi + \alpha &= \psi, \\ \cos U &= \frac{c^2}{q^2}\sin 2\alpha, \end{aligned} \tag{100}$$

und m und n sind jetzt zwei aufeinander senkrecht stehende Radienvectoren der Lemniskate, deren erster mit der X-Achse den Winkel α bildet. Diese Lemniskate ist ein geschlossenes Ganzes.

Nun ist

$$U = -\Theta_1 + \Theta_2 - \Theta_3 + \Theta_4. \tag{101}$$

Nennen wir die Complemente von Θ_1, Θ_2, etc. A, B, C, D, so ist für zwei Curvenpunkte

$$A - B + C - D = A' - B' + C' - D'.$$

Da aber $\alpha = A - A'$, etc. Peripheriewinkel des Bogens PP' in Bezug auf die Endpunkte der genannten Durchmesser sind, so ist

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta. \tag{102}$$

Hieraus resultirt der Satz:

Verbindet man die Endpunkte zweier senkrecht aufeinander stehenden Durchmesser einer aus einem geschlossenen Ganzen bestehenden Lemniskate mit den Endpunkten eines Bogens der letzteren, so ist die Summe der Peripheriewinkel dieses Bogens in Bezug auf die Durchschnittspunkte des einen Durchmessers gleich der Summe der entsprechenden Winkel des andern.

Der Satz gilt allgemein. Setzt man statt $\pm n$ ein $\pm n\sqrt{-1}$, wodurch diese Punkte von der Y-Achse zur X-Achse überspringen, so erhält man, wie sich auch aus

$$\operatorname{tg}\Theta_1 = \frac{x-m}{y}, \quad \operatorname{tg}\Theta_2 = \frac{x+m}{y}, \quad \operatorname{tg}\Theta_3 = -\frac{x-n}{y},$$

$$\operatorname{tg}\Theta_4 = -\frac{x+n}{y}$$

analog dem Vorhergehenden zeigen lässt, die Relation

$$\operatorname{tg} U = -\frac{R^2(m^2 - n^2)\sin 2\varphi}{R^4 - (m^2 + n^2)R^2\cos 2\varphi + m^2n^2} \tag{103}$$

und die übrigen entsprechenden Relationen, wie in 97).

Also haben wir auch hier:

Verbindet man die 4 Schnittpunkte eines Durchmessers einer aus getrennten Ovalen bestehenden Lemniskate mit den Endpunkten eines Bogens der Curve, so ist die Summe der Peripheriewinkel für den 1. und 4. Schnittpunkt gleich der für den 2. und 3.

Im Fall der einfachen durch den O Punkt gehenden Lemniskate vereinigen sich 2 Peripheriewinkel zu einem Centriwinkel, welcher demnach doppelt so gross ist, als die Summe der ihm entsprechenden Peripheriewinkel der Endpunkte eines Durchmessers, wofern sie mit ihm auf gleichem Bogen stehen.

Diese soeben angedeuteten Verhältnisse über Peripherie-, Centri- und Focalwinkel der besprochenen Curven werden wir in den folgenden Abhandlungen weiter untersuchen.

Die hier nur angedeuteten Verhältnisse zeigen, wie man auf diesem Wege zu neuen Sätzen gelangen kann.

IV.

Wir teilen im Nachfolgenden noch eine geometrische Auflösung der reducirten Gleichungen 4. und 3. Grades mit.

Durch den Mittelpunkt einer Ellipse oder Hyperbel gehe ein Kreis, dessen Durchmesser R mit den Radienvectoren nach den Schnittpunkten beider Curven die Winkel $u_1 u_2 u_3 u_4$ einschliessen. Der Winkel zwischen R und der X-Achse sei α.

Dann besteht die Gleichung

$$\operatorname{tg} u^4 + \left(2 - \frac{R^2}{a^2b^2}(a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2)\right)\operatorname{tg} u^2 + \frac{R^2c^2}{a^2b^2}\sin 2\varphi \operatorname{tg} u + 1$$
$$- \frac{R^2}{a^2b^2}(a^2\sin\varphi^2 + b^2\cos\varphi^2) = 0. \qquad 104)$$

Um nun diese Gleichung mit

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \qquad 105)$$

identisch zu machen, setzen wir

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{tg} u, \\ p &= 2 - \frac{R^2}{2a^2b^2}(a^2\cos\varphi^2 + b^2\sin\varphi^2), \\ q &= \frac{R^2c^2}{a^2b^2}\sin 2\varphi, \\ r &= 1 - \frac{R^2}{a^2b^2}(a^2 + b^2 - c^2\cos 2\varphi), \end{aligned} \qquad 106)$$

und hieraus findet sich

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{3-p-r-\sqrt{(1-p+r)^2+q^2}}{3-p-r+\sqrt{(1-p+r)^2+q^2}},$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{q}{1-p+r}, \tag{107}$$

$$\frac{R^2}{a^2} = \tfrac{1}{2}(3-p-r-\sqrt{(1-p+r)^2+q^2}).$$

Die erste dieser Relationen bestimmt aus den Constanten der Gleichung die Achsen des Kegelschnitts, die zweite und dritte die Lage des **Kreises**. Die Wurzeln der Gleichung sind dann durch $x = \operatorname{tg} u$ bekannt. Man kann $x = \varrho \operatorname{tg} u$ setzen und über ϱ so bestimmen, dass das Absolutglied r kleiner als die Einheit wird.

Es sei R' der dem Punkte $R(\varphi)$ entsprechende Halbmesser des Kegelschnitts, wir führen $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \varepsilon$ ein, und es ist für die Ellipse

$$\frac{R^2}{R'^2} = 1-r,$$

$$\cos 2\varphi = \frac{\sqrt{(1-p+r)^2+q^2}}{3-p-r},$$

$$\cos 2\varepsilon \cos 2\varphi = \frac{1-p+r}{3-p-r}, \tag{108}$$

$$\frac{R^2}{a^2} = 1-r-\frac{q}{2}\operatorname{tg}\varphi.$$

Für die Hyperbel

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

ist dagegen

$$\cos 2\varepsilon = \frac{3-p-r}{1-p+r}\cos 2\varphi,$$

$$\frac{R^2}{R'^2} = 1-r, \tag{109}$$

$$\frac{R^2}{a^2} = -1+r+\frac{q}{2}\operatorname{tg}\varphi.$$

Die vorstehenden Formeln finden für $R = R'$, $u_1 = 0$ Anwendung auf die reducirte kubische Gleichung

$$x^3+px+q=0. \text{*)} \tag{110}$$

Sie sind

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{q}{1-p},$$

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{3-p-\sqrt{(1-p)^2+q^2}}{3-p+\sqrt{(1-p)^2+q^2}} \tag{111}$$

$x = \operatorname{tg} u$, etc.

Die Ausdrücke unter dem Wurzelzeichen bleiben in allen Fällen positiv.

---

*) Sind die Wurzeln der Gleichung

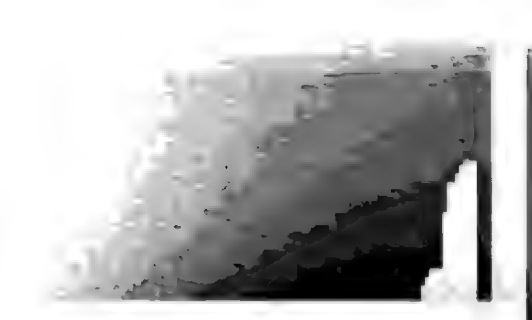
$$x^3-px-q=0$$

alle reell, so ist, wenn

$\left(\frac{p}{3}\right)^3 \overset{=}{<} q^2$, der Ausdruck $x = 0{,}36\frac{q}{p}+1{,}76\sqrt{\frac{p}{3}}$.

und für $\left(\frac{p}{3}\right)^3 > q^2$ der Ausdruck $x = 0{,}456\frac{q}{p}+\sqrt{p}$

ein erster Näherungswert einer Wurzel.



XXVIII.

Die n- und n+1-Teilung des Winkels und Kreises.

Von

Herrn **Alfons van der Grinten,**

Ingenieur in Chicago (Illinois).

Satz. Ist im Kreise A_0E (Fig. 1.) der Winkel $A_{n-2}OA_0$ gleich dem $n-2$fachen des Winkels A_1OA_0, so findet man das $n$fache dieses Winkels, A_1OA_0, sowie das $n+1$fache, $A_{n+1}OA_0$, indem man durch A_1 die Secante $A_{n-2}B_{n-2}$ zieht; die Strecke OB_{n-2} auf dem verlängerten Schenkel OA_1 von O aus gleich OC_{n-2} abträgt; mit A_0C_{n-2} um A_0 auf OC_{n-2} den Kreisbogen $C_{n-2}D_n$ beschreibt; durch D_n die Sehne A_0A_{n+1} zieht; mit OD_n um O auf A_0A_{n+1} den Kreisbogen D_nP_n beschreibt und die Schenkel OP_nA_n und OA_{n+1} zieht.

Beweis. Es ist

$$\text{Dreieck } A_1OB_{n-2} + A_1OA_{n-2} = A_{n-2}OB_{n-2},$$

also ist, wenn der Radius des Kreises mit r und Wkl. A_1OA_0 mit φ bezeichnet wird,

$$\frac{rOB_{n-2}\sin\varphi}{2} + \frac{r^2\sin(n-3)\varphi}{2} = \frac{rOB_{n-2}\sin(n-2)\varphi}{2}$$

oder

$$OB_{n-2} = r\,\frac{\sin(n-3)\varphi}{\sin(n-2)\varphi - \sin\varphi}.$$

Beschreibt man nun mit A_0O um A_0 den Kreis OF, welcher den verlängerten Schenkel OA_1 in G schneidet, so ist $OG = 2r\cos\varphi$; also ist, da nach der Construction [illegible] OC_{n-2} und $C_{n-2}G = OD_n$ ist, auch

$$OD_n = OG - OB_{n-2}$$

oder

$$\varrho_{n+1} = 2r\cos\varphi - r\frac{\sin(n-3)\varphi}{\sin(n-2)\varphi - \sin\varphi}.$$

Nun stelle ich zwei Recursionsformeln auf, mittelst deren $\sin n\varphi$ aus $\sin(n-1)\varphi$ und $\sin(n-2)\varphi$ hergeleitet werden kann, nämlich

$$1)\quad \sin n\varphi = 2\cos\varphi\sin(n-1)\varphi - \sin(n-2)\varphi$$

$$2)\quad \sin n\varphi = \frac{\sin^2(n-1)\varphi - \sin^2\varphi}{\sin(n-2)\varphi}.$$

Aus 1) ergibt sich

$$2\cos\varphi = \frac{\sin n\varphi + \sin(n-2)\varphi}{\sin(n-1)\varphi}$$

und aus 2)

$$\sin(n-1)\varphi = \frac{\sin^2(n-2)\varphi - \sin^2\varphi}{\sin(n-3)\varphi}$$

oder

$$\sin(n-3)\varphi = \frac{\sin^2(n-2)\varphi - \sin^2\varphi}{\sin(n-1)\varphi}.$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke für $2\cos\varphi$ und $\sin(n-3)\varphi$ in die Gleichung für ϱ_{n+1} ein, so lautet diese:

$$\text{I.}\qquad \varrho_{n+1} = r\frac{\sin n\varphi - \sin\varphi}{\sin(n-1)\varphi}.$$

Ferner ist, wenn OP_n mit ϱ_n und Wkl. P_nOD_n mit $\varkappa$ bezeichnet wird, zufolge

$$\text{Dreieck } D_nOA_0 + D_nOP_n = P_nOA_0:$$

$$\frac{r\varrho_{n+1}\sin\varphi}{2} + \frac{\varrho_n\varrho_{n+1}\sin\varkappa}{2} = \frac{r\varrho_n\sin(\varphi+\varkappa)}{2}$$

oder da nach der Construction $\varrho_n = \varrho_{n+1}$ ist

$$\varrho_{n+1} = r\frac{\sin(\varphi+\varkappa) - \sin\varphi}{\sin\varkappa}.$$

Diese Gleichung ist aber identisch mit I. für

$$\varkappa = (n-1)\varphi.$$

Mithin ist wirklich

$$\text{Wkl. } A_nOA_0 = nA_1OA_0;$$

und da

$$\text{Dreieck } A_{n+1}P_nA_n \quad \text{congruent} \quad A_0D_nA_1$$

ist, so ist auch

$$\text{Wkl. } A_{n+1}OA_0 = (n+1)A_1OA_0.$$

Von $n = 2$ oder $n = 3$ ausgehend, erhält man das Constructionsverfahren dargestellt resp. in Fig. 2. und Fig. 3.

Marquirt man nun die Punkte P_n (Fig. 1), welche successive für alle Werte, die man dem Winkel A_1OA_0 gibt, erhalten werden, so liefert die Reihenfolge dieser Punkte eine Curve, mittelst deren leicht jeder beliebige Winkel A_nOA_0 in n gleiche Teile geteilt werden kann, indem man durch den Schnittpunkt P_n des Schenkels A_nO und dieser Curve die Sehne $A_{n+1}A_0$ zieht und A_{n+1} mit O verbindet; alsdann ist

$$\text{Wkl. } A_{n+1}OA_n = \frac{1}{n} A_nOA_0.$$

Mittelst derselben Curve aber lässt sich jeder beliebige Winkel A_nOA_0 auch in $a+1$ gleiche Teile teilen, indem man durch den Schnittpunkt P_{n+1} der Sehne A_nA_0 und der Curve den Schenkel OA zieht; alsdann ist

$$\text{Wkl. } A_nOA = \frac{1}{n+1} A_nOA_0.$$

Beweis. Der Radiusvector $OP_n(=\varrho_n)$ ist gleich $OD_n(=\varrho_{n+1})$, also ist nach Gl. I, auch

$$\varrho_n = r\,\frac{\sin n\varphi - \sin\varphi}{\sin(n-1)\varphi}.$$

Da jedoch der zu ϱ_n gehörige Coordinatenwinkel $P_nOA_0(=\omega)$ das n fache dessen von ϱ_{n+1} beträgt, so lautet die Gleichung der Curve:

$$\text{II.} \qquad \varrho_n = r\,\frac{\sin\omega - \sin\frac{1}{n}\omega}{\sin\frac{n-1}{n}\omega}.$$

Bezeichnet man noch OP_{n+1} mit ϱ_n' und Wkl. $P_{n+1}OA$ mit ψ, so ist in den Dreiecken $P_{n+1}OA_0$ und $P_{n+1}OA_n$:

$$\frac{r\varrho_n'\sin(\omega-\psi)}{2} + \frac{r\varrho_n'\sin\psi}{2} = \frac{r^2\sin\omega}{2}$$

oder

$$\varrho_n' = r\,\frac{\sin\omega}{\sin(\omega-\psi)+\sin\psi}.$$

Nun ist, da ϱ_n' auch der Curve II. angehört, nach Gl. II. für den Coordinatenwinkel $\omega-\psi$:

$$\varrho_n' = r\,\frac{\sin(\omega-\psi) - \sin\frac{1}{n}(\omega-\psi).}{\sin\frac{n-1}{n}(\omega-\psi)}$$

Beide Gleichungen für ϱ_n' sind aber identisch für $\omega = (n+1)\psi$, also ist wirklich

$$n\varphi = (n+1)\psi\ ^{*)}.$$

Will man die Teilpunkte A_{n+1} und A resp. in A_1 und A' haben, so beshhreibe man auf den Sehnen $A_{n+1}A_0$ und A_nA_0 um O mit OP_n und OP_{n+1} die Kreisbogen P_nD_n und $P_{n+1}D_{n+1}$ und ziehe durch D_n und D_{n+1} die Schenkel OA_1 und OA'; alsdann ist nach obigem Satze arc $A_1A_0 = A_{n+1}A_n$ und arc $A'A_0 = A_nA$.

Ich verweise hier nach auf eine besondere Curve, mittelst deren gleichfalls jeder beliebige Winkel A_nOA_0 in $n+1$ gleiche Teile geteilt werden kann. Marquirt man nämlich auch die Punkte D_n, so liefert die Reihenfolge dieser Punkte eine solche Curve, indem der Schnittpunkt der Sehne A_nA_0 und dieser Curve mit D_{n+1} zusammenfällt.

Beweis. Wird ND_{n+1} mit ϱ'_{n+1} und Wkl. $D_{n+1}OA_0$ mit χ bezeichnet, so ist in den Dreiecken

$$D_{n+1}OA_0 \quad \text{und} \quad D_{n+1}OA_n:$$

$$\frac{r\varrho'_{n+1}\sin\chi}{2} + \frac{r\varrho'_{n+1}\sin(\omega-\chi)}{2} = \frac{r^2\sin\omega}{2}$$

oder

$$\varrho'_{n+1} = r\frac{\sin\omega}{\sin(\omega-\chi)+\sin\chi}.$$

Setzt man hierin $\omega = (n+1)\chi$, so wird

$$\varrho'_{n+1} = r\frac{\sin(n+1)\chi}{\sin n\chi + \sin\chi}$$

---

*) Denn setzt man in der ersteren Gleichung für ϱ_n':

$$\omega = (n+1)\psi,$$

so lautet diese:

$$\varrho' = r\frac{\sin(n+1)\psi}{\sin n\psi + \sin\psi}$$

oder zufolge

$$\sin(n+1)\psi = \frac{\sin^2 n\psi - \sin^2\psi}{\sin(n-1)\psi}$$

nach 1):

$$\varrho_n' = r\frac{\sin n\psi - \sin\psi}{\sin(n-1)\psi}.$$

Die nämliche Form erhält aber die zweite Gleichung für ϱ_n', wenn man

$$\omega = (n+1)\psi$$

setzt; also . . .

oder zufolge

$$\sin(n+1)\chi = \frac{\sin^2 n\chi - \sin^2\chi}{\sin(n-1)\chi}$$

nach 1.):

$$\varrho'_{n+1} = r\,\frac{\sin n\chi - \sin\chi}{\sin(n-1)\chi}.$$

Nach I. ist aber

$$\varrho_{n+1} = r\,\frac{\sin n\varphi - \sin\varphi}{\sin(n-1)\varphi}.$$

Also gehören die Radienvectoren ϱ_{n+1} und ϱ'_{n+1} ein- und derselben Curve an.

Vertauscht man in der letzten Gl. n mit $m-1$, so lautet dieselbe:

$$\varrho_m = r\,\frac{\sin(m-1)\varphi - \sin\varphi}{\sin(m-2)\varphi},$$

oder zufolge

$$\sin(m-\varphi) = \frac{\sin^2(m-1)\varphi - \sin^2\varphi}{\sin m\varphi}$$

nach 1.):

III. $$\varrho_m = r\,\frac{\sin m\varphi}{\sin(m-1)\varphi + \sin\varphi}.$$

Diese Curve ist identisch mit derjenigen, die man erhält, wenn man den Bogen A_1A_0 des Winkels A_1OA_0 auf der Periepherie des Teilkreises um O bis A_{n+1} nach einander m mal abträgt; die Sehne $A_{n+1}A_0$ mit OA_1 in D_n zum Schnitte bringt und die Reihenfolge dieser Schnittpunkte marquirt. Denn, wenn OD_n mit ϱ_m bezeichnet wird, so ist in den Dreiecken D_nOA_0 und D_nOA_{n+1}:

$$\frac{r\varrho_m \sin\varphi}{2} + \frac{r\varrho_m \sin(m-1)\varphi}{2} = \frac{r^2 \sin m\varphi}{2}$$

oder

$$\varrho_m = r\,\frac{\sin m\varphi}{\sin(m-1)\varphi + \sin\varphi}.$$

Ist m eine Paarzahl gleich $2n$, so lautet die Gleichung einfacher:

IV. $$\varrho_{2n}\,\frac{\cos n\varphi}{\cos(n-1)\varphi}$$

Aus Allem geht hervor, dass man auf folgende sehr einfache Weise die Curven D_n und P_n praktisch construiren kann, nämlich: Trage den Bogen A_1A_0 auf der Periepherie des Teilkreises $n+1$ mal auf, so liefern die Schnittpunkte D_n und P_n der Sehne $A_{n+1}A_0$ resp. mit den Schenkeln A_1O und A_nO in ihrer ganzen Reihenfolge jene Curven.

In Fig. 4. habe ich beispielsweise ein Paar einander entsprechende Curven in ihrem weiteren Verlaufe construirt, die die einfachsten Fälle der Polysection des Winkels, die Bi- und Trisection auf mehrfache Weise zur Darstellung bringen. Wie schon allgemein nachgewiesen, liefern die Schnittpunkte P_2 und P_3, sowie D_2 und D_3 in A_3 und A resp. A_1 und A' die Zwei- und Dreiteilpunkte des Bogens A_2A_1. Die Punkte A_1 und A' können aber auch dadurch gefunden werden, dass man A_2O bis nach A_3' und P_2' verlängert, durch A_0 die Geraden $P_2'D_2'$ und $A_3'D_3'$ zieht und D_2' und D_3' mit O verbindet. Die Verbindungslinie $D'O$ bewirkt zugleich die Vierteilung des Winkels A_2OA_0.

Ferner kann auch A_0 statt O als Coordinatenanfangspunkt und Winkelcentrum benutzt werden. Will man z. B. den Winkel BA_0O bi- und triseciren, so verlängere man BA_0 bis in C; lege durch O die Gerade CEE' und ziehe $E'A_0$ und EA_0; alsdann ist

$$\text{Wkl. } E'A_0O = \tfrac{1}{2}BA_0O$$

und

$$\text{Wkl. } EA_0O = \tfrac{1}{3}BA_0O.$$

Die Curve D_2D_2' hat nämlich die Eigentümlichkeit einerseits, durch Verschieben ihres Radiusvectors um das doppelte seines Coordinatenwinkels und Auftragen desselben in positiver, bzhw. in negativer Richtung die Curve P_2P_2' zu erzeugen; andererseits aber wird sie selbst dadurch hervorgebracht, dass man den Radiusvector A_0G des Kreises A_0F um das Dreifache seines Coordinatenwinkels verschiebt und in negativer Richtung aufträgt, also A_0G um A_0 nach A_0G' dreht. Die Curve P_2P_2' entsteht hinwiederum auch dadurch, dass A_0E um E nach PE geschwenkt wird.

Hieraus resultirt also ein weiteres, höchst elegantes Verfahren, mittelst Schwenkung einer Kreissehne A_0E um ihre beiden Endpunkte bis zum Schnitte des beiderseitig verlängerten Radius OE beide Curven gleichzeitig zu construiren.

Setzt man $n = 2$ in Gl. I., so lautet die Gl. der Curve D_2D_2':

$$\varrho_3 = r(2\cos\varphi(\pm)).$$

Mithin ist diese Curve identisch mit einer Conchoide kreisförmiger Basis, deren Pol in der Peripherie der Basis liegt, und deren beiderseitig von der Peripherie aus auf der durch den Pol gehenden Secante abgetragene Constante gleich dem Radius der Basis ist. Sie lässt sich also auch leicht so construiren, dass man auf der verlängerten Kreissehne OD von D aus $DD_3 = DD_3' = DA_0$ abträgt. Ihre Gleichung in Parallelcoordinaten lautet:

$$y^4 + y^2(2x^2 - r^2 - 4rx) - 4rx^3 + 3r^2x^2 + x^4 = 0$$

sowie ihrer Polargleichung in Bezug auf den Punkt A_0:

$$\varrho^3 - 3r^2\varrho + 2r^3\cos\varphi = 0,$$

deren Wurzeln sind

$$\varrho_1 = -2r\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$\left.\begin{matrix}\varrho_2\\ \varrho_3\end{matrix}\right\} = r\left(\cos\frac{\varphi}{3} \pm \sqrt{3}\sin\frac{\varphi}{3}\right)$$

Ich will hier nur noch bemerken, dass die Polargleichung der Curve III. in Bezug auf den Pol A_0 vom $m$ten Grade ist, wenn m eine Unpaarzahl bezeichnet, also die Form hat:

$$\varrho^m + a\varrho^{m-1} + b\varrho^{m-2} + \ldots + w = 0,$$

wo a, b, c ... Functionen von r und φ sind, und dass man eine Wurzel derselben dadurch findet, dass man in der Gleichung

$$r\varrho\sin\frac{1}{m}\varphi + \varrho\varrho_1\sin\frac{m-1}{m}\varphi = r\varrho_1\sin\varphi$$

$$\varrho = 2r\cos\frac{1}{m}\varphi$$

setzt; alsdann lautet die Wurzel:

$$\varrho_1 = r\frac{\sin\frac{2}{m}\varphi}{\sin\varphi - 2\cos\frac{1}{m}\varphi\sin\frac{m-1}{m}\varphi}.$$

So liefert z. B. $m = 3$:

$$\varrho_1 = -2r\cos\frac{\varphi}{3}$$

(cf. Trisection des Winkels BA_0O).

Die Conchoide

$$\varrho = r(2\cos\varphi \pm 1),$$

welche sowohl an und für sich, als auch in Verbindung mit der aus ihr entspringenden Curve

$$\varrho' = r\left(2\cos\frac{\varphi}{2} \pm 1\right)$$

zufolge des Obigen als eine Trisectionscurve κατ' ἐξοχήν erscheinen dürfte, ist schliesslich wol identisch mit der von dem Mathematiker Azemar erfundenen, deren Eigenschaften von Garnier in einem weitläufigen analytischen Werke: „Trisection de l'angle par L. P. V. A. Azemar, suivie de recherches analytiques sur le même sujet, par J. G. Garnier à l'Ecole polytechnique Paris 1809" näher untersucht worden ist.

Frasseltberg bei Cleve, August 1881.

XXIX.

Verallgemeinerung einer Relation der Jacobi'schen Functionen.

Von

R. Hoppe.

Durch Multiplication der Reihen für zwei Θ Functionen von gleichem Modul und beliebigen Argumenten erhält man in bekannter Weise einen Ausdruck des Products in Θ Functionen vom doppelten Modul. Das Verfahren besteht in der Transformation des in Bezug auf die Reihenindices quadratischen Exponenten durch Einführung neuer Indices, mit der Bedingung dass sich der Exponent in zwei Addenden zerlegt, die einzeln nur von je einem Index abhangen. Unter weiteren Bedingungen zerfällt dann die resultirende Doppelreihensumme in die Summe einer begrenzten Anzahl von Producten je zweier Factoren, deren jeder, wofern nur die Substitution linear war, eine Θ Reihe darstellt. Hiervon wird jedoch gewöhnlich bloss die einfachste specielle Anwendung gemacht, weil man nur den Zweck verfolgt solche Grundrelationen der Θ Functionen zu gewinnen, aus welchen sich die Reduction der elliptischen Functionen aller Gattungen auf Θ Functionen herleiten lässt. Im folgenden soll nun, ohne Rücksicht auf derart Verwendung, die Relation, zu welcher die Methode unmittelbar führt, in voller Allgemeinheit entwickelt werden. Sei

$$\varphi(x,\tau) = \Theta(ix + \mathrm{R}, \tau) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} e^{-m^2\tau + 2mx}$$

also

$$\varphi(x,\tau)\varphi(y,\sigma) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} e^{-m^2\tau - n^2\sigma \quad \ldots \quad 2ny}$$

Es handelt sich darum, den Exponenten

$$M = -m^2\tau - n^2\sigma + 2mx + 2ny \qquad (1)$$

durch die Substitutionen

$$m = \alpha\mu + \beta\nu + \lambda; \qquad n = \gamma\mu + \delta\nu \qquad (2)$$

in einen Ausdruck gleicher Form in Bezug auf die neuen Indices μ, ν zu verwandeln und zu untersuchen, wie μ, ν zu variiren haben, damit m, n unabhängig alle Zahlen durchlaufen.

Nach Einführung der Werte (2) in Gl. (1) wird

$$M = -\mu^2(\alpha^2\tau + \gamma^2\sigma) - 2\mu\nu(\alpha\beta\tau + \gamma\delta\sigma) - \nu^2(\beta^2\tau + \delta^2\sigma)$$
$$+ 2\mu\{\alpha(x - \lambda\tau) + \gamma y\} - 2\nu\{\beta(x - \lambda\tau) + \delta y\}$$
$$+ 2\lambda x - \lambda^2\tau$$

Der Ausdruck hat die verlangte Form, wenn

$$\alpha\beta\tau + \gamma\delta\sigma = 0 \qquad (3)$$

ist.

Zunächst lässt sich folgendes beobachten. Damit m, n für irgend zwei consecutive μ und ν ganze Zahlen sein können, müssen α, β, γ, δ, λ ganze Zahlen sein. Ferner können γ und δ keinen Factor gemein haben, damit n alle Zahlen durchläuft. Gl. (3) zeigt, dass dann $\sigma : \tau$ rational sein muss.

Setzt man

$$\mu = \mu' - k\delta; \qquad \nu = \nu' + k\gamma; \qquad \varepsilon = \beta\gamma - \alpha\delta$$

so wird

$$m = \alpha\mu' + \beta\nu' + k\varepsilon + \lambda; \qquad n = \gamma\mu' + \delta\nu'$$

Variirt nun μ' von $-\infty$ bis ∞, und ν' von 0 bis abs. $\gamma - 1$, so durchläuft n, weil γ, δ relative Primzahlen sind, einmal alle Zahlen. Daher entpricht jedem n nur ein bestimmtes μ' und ein bestimmtes ν'. Für constantes n ist also $\alpha\mu' + \beta\nu'$ constant, und m ist allein Function von k und λ, von denen n nicht abhängt. Lässt man dann k von $-\infty$ bis ∞ und λ von N bis $N +$ abs. $\varepsilon - 1$ variiren, so durchläuft m alle Zahlen bei constantem n.

Während aber ν' von 0 bis abs. $\gamma - 1$ und k von $-\infty$ bis ∞ variirt, durchläuft ν alle Zahlen, und für jedes constante ν, also auch constante k durchläuft μ zugleich mit μ' alle Zahlen.

Folglich durchlaufen m und n unabhängig alle Zahlen, wenn μ und ν unabhängig von $-\infty$ bis ∞, und unabhängig λ von N bis $N +$ abs. $\varepsilon - 1$ variirt. Demnach ist, wenn der absolute Wert die __ Σ die Anzahl der Werte von λ bezeichnet,

$$\varphi(x,\tau)\,\varphi(y,\sigma) = \overset{\epsilon}{\Sigma}\, e^{2\lambda x - \lambda^2\tau} \times$$
$$\varphi\{\alpha(x-\lambda\tau)+\gamma y,\ \alpha^2\tau+\gamma^2\sigma\}\,\varphi\{\beta(x-\lambda\tau)+\delta y,\ \beta^2\tau+\delta^2\sigma\}$$

Es bleibt noch Gl. (3) durch die allgemeinsten Ausdrücke der 6 darin enthaltenen Grössen zu erfüllen. Sei

$$\frac{\sigma}{\tau} = \frac{q}{p}$$

wo p, q relative Primzahlen. Dann hat man:

$$\tau = p\varrho; \qquad \sigma = q\varrho \tag{4}$$

$$\alpha\beta = qr; \qquad \gamma\delta = -pr \tag{5}$$

Sei

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = a\alpha'; & \beta = k\beta' \\ q = aq'; & r = kr' \end{array}\right\} \tag{6}$$

wo α' mit q' und β' mit r' relativ prim; dann geht die erste Gl. (5) über in

$$\alpha'\beta' = q'r'$$

und lässt sich nur lösen durch

$$\alpha' = r' = l; \qquad \beta' = q' = b$$

woraus die Werte (6):

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = al; & \beta = bk \\ q = ab; & r = kl \end{array}\right\} \tag{7}$$

Die zweite Gl. (5) gibt analog:

$$\left.\begin{array}{ll} \gamma = ct; & \delta = -ds \\ p = cd; & r = st \end{array}\right\} \tag{8}$$

Der Doppelwert von r verlangt die Gleichheit:

$$kl = st$$

deren analoge Lösung ist:

$$\begin{array}{ll} k = ef; & l = gh \\ s = eg; & t = fh \end{array}$$

Nach Einführung in Gl. (7) (8) und (4) findet man:

$$\begin{array}{llll} \alpha = & agh & \qquad & \tau = cd\varrho \\ \beta = & bef & & \sigma = ab\varrho \\ \gamma = & cfh & & \\ \delta = & -\,deg & & \end{array}$$

Die sonst willkürlichen, positiven oder negativen ganzen Zahlen a, b, c, d, e, f, g, h sind nur den Beschränkungen unterworfen, dass

1) c, f, h relativ prim zu d, e, g
2) a, b relativ prim zu c, d
3) ab und cd positiv

sind; dagegen ist ϱ eine beliebige positive Grösse. Die zweite Bedingung lässt sich entbehren, da man einen gemeinsamen Factor von ab und cd in ϱ aufnehmen kann.

Die resultirende Formel lautet nun:

$$\varphi(x, cd\varrho)\varphi(y, ab\varrho) = \sum^{ehx} e^{2\lambda x - \lambda^2 cd\varrho} \times$$
$$\varphi\{h[ag(x - \lambda c d\varrho) + cfy],\ ach^2\varkappa\varrho\} \times$$
$$\varphi\{e[bf(x - \lambda c d\varrho) - dgy],\ bde^2\varkappa\varrho\} \tag{9}$$

wo zur Abkürzung

$$\varkappa = bcf^2 + adg^2$$

gesetzt ist.

Die linke Seite hängt nicht ab von e, f, g, h; es lassen sich also laut dieser Formel vierfach unendliche Reihen von Transformationen des Products zweier beliebigen Θ Functionen, deren Moduln ein rationales Verhältniss haben, angeben.

Sind die gegebenen Moduln einander gleich, also

$$a = b = c = d = 1$$

so lautet die Formel:

$$\varphi(x, \varrho)\varphi(y, \varrho) = \sum^{ehx} e^{2\lambda x - \lambda^2\varrho} \times$$
$$\varphi\{h[g(x - \lambda\varrho) + fy],\ h^2\varkappa\varrho\}\varphi\{e[f(x - \lambda\varrho) - gy],\ e^2\varkappa\varrho\}$$

$$\varkappa = f^2 + g^2$$

und geht für

$$e = f = g = h = 1$$

in die für die Principien der Theorie der elliptischen Functionen ausreichende Grundformel über.

Ausser den genannten 4 Zahlen ist der Anfang der λ willkürlich. Verändert man diesen aus N in $N+1$, so tritt statt des Wertes N der Wert $N + eh\varkappa$ ein, während die übrigen Werte dieselben bleiben. Dadurch vermindern sich die Argumente um die zugehörigen Moduln, d. i. um 1 Periodenlänge, und die Functionen bleiben unverändert. Diese Veränderung liefert mithin keine neue Transformation.

Die auf dem bezeichneten Wege erhaltene Formel ist im wesentlichen identisch mit einem Resultate der Untersuchung von H. Schröter in seiner Habilitationsschrift, welche von der Entwickelung der $n$ten Potenz einer Θ Reihe ausgeht. Obgleich sie hiernach nicht neu ist, hielt ich es nicht für unwert, sie auf kürzerm und mehr directem Wege herzuleiten und zu zeigen, dass sie schon durch eine längst vorher bekannte Methode, die man nur zu verfolgen brauchte, gegeben war.

XXX.

Einfaches Pendel im Raume bei Anziehung von einem Punkte in endlicher Entfernung.

Von

R. Hoppe.

Einleitung.

Die Berechnung der Bewegung eines Punkts, der auf einer gegebenen Rotationsfläche zu bleiben genötigt ist, und auf den nur Kräfte unabhängig vom Azimut wirken, lässt sich, wie wol als bekannt angesehen werden darf, leicht auf Quadraturen zurückführen.

Die Fläche sei bestimmt durch

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi; \quad z = \text{Function von } r$$

und τ der Winkel zwischen der Tangente des Meridians und dem Radius r, so dass

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \operatorname{tg}\tau$$

Das Potential der auf den Punkt von der Masse m wirkenden Kraft sei $= mV$, und V gegebene Function von r und z, unabhängig von φ. Dann ist die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$\frac{\partial r^2}{\cos^2\tau} + r^2\partial\varphi^2 = 2V\partial t^2$$

und die der constanten Projection der Flächengeschwindigkeit:

$$r^2\partial\varphi = c\partial t$$

woraus:

$$t = \int \frac{r\,\partial r}{\cos\tau\sqrt{2Vr^2 - c^2}} \tag{2}$$

$$\varphi = \int \frac{c\,\partial r}{r\cos\tau\sqrt{2Vr^2 - c^2}} \tag{3}$$

Hiervon bildet das Pendel für Central-Anziehung den Specialfall, wo die Fläche eine Kugel

$$r^2 + z^2 = a^2$$

und, wenn $z = e$ das Anziehungs-Centrum auf der z Axe bestimmt, u dessen Abstand vom Punkte m bezeichnet,

$$V = b\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{k}\right)$$

ist. Man hat dann:

$$r = a\sin\tau; \quad z = -a\cos\tau$$

$$\frac{r\,\partial r}{\cos\tau} = a\,\partial z = \frac{au\,\partial u}{e}$$

$$r^2 = \frac{1}{4e^2}(e+a+u)(e+a-u)(u+e-a)(u-e+a)$$

Stellt man also die Integrale (2) (3) in u dar, so erhält man:

$$t = a\sqrt{\frac{2k}{b}}\int\frac{u^2\,\partial u}{\sqrt{U}} \tag{4}$$

$$\varphi = \frac{4ace^2\sqrt{2k}}{\sqrt{b}}\int\frac{u^2\,\partial u}{(e+a+u)(e+a-u)(u+e-a)(u-e+a)\sqrt{U}} \tag{5}$$

$$U = u(k-u)(e+a+u)(e+a-u)(u+e-a)(u-e+a) - \frac{2c^2e^2ku^2}{b}$$

In T. LXI. N. XVIII. S. 264. habe ich für parallele Schwerkraft gezeigt, dass bei unendlich kleiner Elongation die nahezu ebene Bahn eine langsam rotirende Ellipse ist, und dass die Geschwindigkeit dieser Rotation sich als proportional dem Inhalt der Ellipse darstellt. Das gleiche auch für Central-Anziehung nachzuweisen und den unterscheidenden constanten Factor zu ermitteln, ist die gegenwärtige Aufgabe.

Bahn des Pendels bei kleiner Elongation.

Sowol für das Maximum von u, bezeichnet durch u_0, als für das Minimum $u = u_1$ muss nach Gl. (3) U verschwinden. Sie entsprechen

zugleich dem Maximum und Minimum von r und bestimmen dadurch die Scheitel der Bahn. Demnach hat U die Form:

$$U = u(u_0 - u)(u - u_1)(-u^3 + a_1 u^2 - a_2 u + a_3)$$

Da für kleine Elongation u stets wenig $> e - a$ ist, so sei

$$u_0 = (e-a)(1+\varepsilon_0); \quad u_1 = (e-a)(1+\varepsilon_1)$$

$$u = (e-a)(1+\varepsilon)$$

$$k = (e-a)(1+\varkappa); \quad \frac{2c^2e^2}{b} = (e-a)^3\gamma^2 \tag{6}$$

dann wird

$$U = (e-a)^6(1+\varepsilon)\left\{(\varkappa-\varepsilon)\left(\frac{2e}{e-a}+\varepsilon\right)\left(\frac{2a}{e-a}-\varepsilon\right)(2+\varepsilon)\varepsilon - \gamma^2(1+\varkappa)(1+\varepsilon)\right\}$$

$$= (e-a)^6(1+\varepsilon)\left\{(\varepsilon_0-\varepsilon)(\varepsilon-\varepsilon_1)\left[-(1+\varepsilon)^3 + b_1(1+\varepsilon)^2 - b_2(1+\varepsilon) + b_3\right]\right\}$$

Setzt man $\varepsilon = \varepsilon_0$, dann $= \varepsilon_1$, so kommt:

$$\gamma^2(1+\varkappa) = \frac{\varkappa - \varepsilon_0}{1+\varepsilon_0}\left(\frac{2e}{e-a}+\varepsilon_0\right)\left(\frac{2a}{e-a}-\varepsilon_0\right)(2+\varepsilon_0)\varepsilon_0$$

$$= \frac{\varkappa - \varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}\left(\frac{2e}{e-a}+\varepsilon_1\right)\left(\frac{2a}{e-a}-\varepsilon_1\right)(2+\varepsilon_1)\varepsilon_1$$

woraus mit Vernachlässigung höherer Potenzen von ε_0, ε_1:

$$\varkappa = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \frac{e^2 - ae + a^2}{2ae}\varepsilon_0\varepsilon_1 \tag{7}$$

$$\gamma^2 = \frac{8ae}{(e-a)^2}\varepsilon_0\varepsilon_1(1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_1) \tag{8}$$

Dies in den ersten der 2 Ausdrücke von U eingeführt giebt bis auf 3. Ordnung:

$$U = 4(e-a)^4(1+\varepsilon)(\varepsilon_0-\varepsilon)(\varepsilon-\varepsilon_1)\{2ae - (e^2 - 3ae + a^2)\varepsilon\}$$

$$= 4(e-a)^4(\varepsilon_0-\varepsilon)(\varepsilon-\varepsilon_1)\{2ae - (e^2 - 5ae + a^2)\varepsilon\}$$

Zur Berechnung der Bahn hat man nach Zerlegung in Partialbrüche aus Gl. (5):

$$\varphi = \frac{ce\sqrt{k}}{\sqrt{2b}}\int\left(\frac{e+a}{e+a+u} + \frac{e+a}{e+a-u} - \frac{e-a}{u+e-a} + \frac{e-a}{u-e+a}\right)\frac{\partial u}{\sqrt{U}}$$

$$= \frac{ce\sqrt{k}}{\sqrt{2b}}\int\left\{\frac{e+a}{2e+(e-a)\varepsilon} + \frac{e+a}{2a-(e-a)\varepsilon} - \frac{1}{2+\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\right\}\frac{\partial u}{\sqrt{U}}$$

In den 3 ersten Termen der Klammer ist ε zu vernachlässigen, weil

es neben dem unendlich grossen letzten Term, gemäss dem Grade der Approximation in Bestimmung von U nicht in Rechnung kommen kann. Daher hat man:

$$\varphi = \frac{ce\sqrt{k}}{\sqrt{2b}} \int \left(\frac{e^2 + ae + a^2}{2ae} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{\partial u}{\sqrt{U}} \tag{9}$$

Zur Integration sei

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \cos^2\vartheta + \varepsilon_0 \sin^2\vartheta$$

dann wird

$$\frac{\partial u}{\sqrt{U}} = \frac{\partial u}{2(e-a)^2\sqrt{2ae}} \, \frac{1 + \frac{e^2 - 5ae + a^2}{4ae}\varepsilon}{\sqrt{(\varepsilon_0 - \varepsilon)(\varepsilon - \varepsilon_1)}}$$

$$= \frac{\partial\vartheta}{(e-a)\sqrt{2ae}} \left(1 + \frac{e^2 - 5ae + a^2}{4ae} \varepsilon \right)$$

und nach Einführung

$$\varphi = \int \frac{c\,\partial\vartheta}{2(e-a)} \sqrt{\frac{kc}{ab}} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 3\frac{e^2 - ae + a^2}{4ae} \right)$$

Nun ist nach Gl. (6) (7) (8)

$$\frac{2c^2e^2k}{b} = (e-a)^4\gamma^2(1+\varkappa) = 8ae(e-a)^2\varepsilon_0\varepsilon_1$$

also

$$\frac{c^2kc}{ab} = 4(e-a)^2\varepsilon_0\varepsilon_1$$

und Gl. (9) wird:

$$\varphi = \int \partial\vartheta \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_1} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 3\frac{e^2 - ae + a^2}{4ae} \right)$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}} \operatorname{tg}\vartheta \right) + \tfrac{3}{4}\vartheta \frac{e^2 - ae + a^2}{ae} \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_1}$$

Lässt man ϑ von 0 bis 4R variiren, so variirt ε zweimal von ε_1 bis ε_0 und zurück, das Pendel steigt zweimal vom tiefsten Stand zum höchsten und sinkt auf den tiefsten zurück. Diesem Intervall entspreche das Azimut $\varphi = \Phi$; dann wird

$$\Phi = 4\mathrm{R} + 3\mathrm{R}\frac{e^2 - ae + a^2}{ae} \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_1}$$

Das Pendel vollendet also nach 2 Schwingungen nahezu einen horizontalen Umlauf; der zweite Term drückt aus, wieviel es jedesmal voreilt. Seine geometrische Bedeutung lässt sich wie im erwähnten analogen Falle aufstellen.

Die Scheitel der Bahn entsprechen den Maximis und Minimis von r, also auch von ε, d. i. $\varepsilon = \varepsilon_0$ und $\varepsilon = \varepsilon_1$, deren Azimute um $\frac{1}{4}\Phi$, d. i. nach Abzug der proportionalen Voreilung um einen Rechten successive von einander abstehen.

Nun ist bis auf 1. Ordnung

$$r^2 = \frac{1}{4e^2}\{2e + (e-a)\varepsilon\}\{2a - (e-a)\varepsilon\}(e-a)^2(2+\varepsilon)\varepsilon$$
$$= \frac{2a}{e}(e-a)^2(\varepsilon_1 \cos^2\vartheta + \varepsilon_0 \sin^2\vartheta)$$

und, die Voreilung ungerechnet,

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}}\operatorname{tg}\vartheta$$

woraus:

$$x = r\cos\varphi = (e-a)\sqrt{\frac{2a\varepsilon_1}{e}}\cos\vartheta$$

$$y = r\sin\varphi = (e-a)\sqrt{\frac{2a\varepsilon_0}{e}}\sin\vartheta$$

Demnach ist die Bahn die Ellipse:

$$\frac{ex^2}{2a(e-a)^2\varepsilon_1} + \frac{ey^2}{2a(e-a)^2\varepsilon_0} = 1$$

relativ zu einem Axensystem, das mit einer Geschwindigkeit

$$= 3\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\,\frac{e^2 - ae + a^2}{4ae}\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_1}$$

um den Mittelpunkt rotirt. Der Flächeninhalt dieser Ellipse ist

$$E = 4\mathrm{R}\frac{a}{e}(e-a)^2\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_1}$$

folglich die Voreilung bei jedem Umlauf

$$\Phi - 4\mathrm{R} = 3E\frac{e^2 - ae + a^2}{4a^2(e-a)^2} \tag{10}$$

Für parallele Schwerkraft ist $e = \infty$. Hier wird der Factor

$$\frac{e^2 - ae + a^2}{(e-a)^2} = 1$$

Dieser ist es, der bei Anziehung aus endlicher Entfernung hinzukommt. Er ist stets >1 und wächst bei Annäherung des Anziehungscentrums an die Kugel ins [illegible] Liegt es auf der Kugel, so

wird die Einführung der ε unzulässig, die fernere Rechnung mithin ungültig.

Für diesen Fall, $e=a$, hat man:

$$\frac{U^2}{ku^2}=u\left(1-\frac{u}{k}\right)(4a^2-u^2)-\frac{2a^2c^2}{b}$$

$$=(u_0-u)(u-u_1)(-u^2+a_1u-a_2)$$

und findet durch Substitution $u=u_0$, $u=u_1$ zwei Gleichungen, aus denen die Werte hervorgehen:

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{u_0+u_1}\left(1-\frac{u_0u_1}{4a^2-u_0^{\,2}-u_1^{\,2}}\right) \tag{11}$$

$$\frac{2a^2c^2}{b}=u_0u_1\frac{(4a^2-u_0^{\,2})(4a^2-u_1^{\,2})}{(u_0+u_1)(4a^2-u_0^{\,2}-u_1^{\,2})} \tag{12}$$

Nach deren Einsetzung ergiebt sich:

$$U=u^2(u_0-u)(u-u_1)\left\{4a^2-u^2+u_0u_1\frac{(u+u_0)(u+u_1)}{4a^2-u_0^{\,2}-u_1^{\,2}}\right\}$$

$$:\left(1-\frac{u_0u_1}{4a^2-u_0^{\,2}-u_1^{\,2}}\right)$$

Hier sind die u selbst unendlich klein. Rechnet man die Klammer bis auf 2. Ordnung, so kommt:

$$U=u^2(u_0-u)(u-u_1)(4a^2+u_0u_1-u^2)$$

$$U^{-\frac{1}{2}}=\frac{1-\dfrac{u_0u_1-u^2}{8a^2}}{2au\sqrt{(u_0-u)(u-u_1)}}$$

Dies nebst dem aus Gl. (11) (12) hervorgehenden Werte

$$\frac{2c^2k}{b}=4u_0u_1\left(1+\frac{u_0u_1}{4a^2}\right)$$

eingeführt in Gl. (5) giebt:

$$\varphi=\sqrt{u_0u_1}\int\frac{\partial u}{u\sqrt{(u_0-u)(u-u_1)}}\left(1+\tfrac{3}{8}\frac{u^2}{a^2}\right)$$

oder, wenn

$$u=u_1\cos^2\eta+u_0\sin^2\eta$$

$$\varphi=2\sqrt{u_0u_1}\int\left(\frac{1}{u_1\cos^2\eta+u_0\sin^2\eta}+\tfrac{3}{8}\frac{u_1\cos^2\eta+u_0\sin^2\eta}{a^2}\right)\partial\eta$$

$$=2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{u_0}{u_1}}\,\mathrm{tg}\,\eta\right)+\tfrac{3}{8}\frac{(u_0+u_1)\eta-(u_0-u_1)\sin\eta\cos\eta}{a^2}\sqrt{u_0u_1}$$

Variirt η von 0 bis 2R, also u von u_1 bis u_0 und zurück, gleichzeitig φ von 0 bis Φ, so ist

$$\Phi = 4\mathrm{R} + \tfrac{3}{4}\mathrm{R}\,\frac{u_0 + u_1}{a^2}\sqrt{u_0 u_1}$$

Bringt man von φ und von

$$r^2 = u^2 - \frac{u^4}{4a^2}$$

nur den ersten Term in Rechnung, so ergiebt sich:

$$x = u_1 \cos^2\eta - u_0 \sin^2\eta; \quad y = 2\sqrt{u_0 u_1}\sin\eta\cos\eta$$

und nach Elimination von η:

$$\frac{(2x + u_0 - u_1)^2}{(u_0 + u_1)^2} + \frac{y^2}{u_0 u_1} = 1 \tag{13}$$

Diese Ellipse durchläuft der Endpunkt des Pendels bei jeder Schwingung, so dass der tiefste und höchste Punkt an den Enden der grossen Axe stehen, und zwar rotirt sie gleichzeitig mit einer Geschwindigkeit

$$= \tfrac{3}{16}\varphi'\,\frac{u_0 + u_1}{a^2}\sqrt{u_0 u_1}$$

um die z Axe, welche durch ihren Brennpunkt geht.

Hiernach folgt das Pendel, wenn man stets nur die Hauptwerte in Rechnung bringt, den keplerschen Gesetzen. Das dritte ist durch Gl. (1) erfüllt, das erste durch die unendlich kleine Elongation bedingt, das zweite drückt Gl. (13) aus. Das vierte geht aus Gl. (4) hervor, welche ergiebt:

$$t = \sqrt{2}\sqrt{\frac{u_0 + u_1}{b}}\int(u_1\cos^2\eta + u_0\sin^2\eta)\partial\eta$$

$$= \sqrt{\frac{u_0 + u_1}{2b}}\{(u_0 + u_1)\eta - (u_0 - u_1)\sin\eta\cos\eta\}$$

Dies von $\eta = 0$ bis $\eta = 2\mathrm{R}$ genommen giebt die Umlaufszeit

$$T = 2\mathrm{R}\,\frac{(u_0 + u_1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2b}} = \frac{4\mathrm{R}}{\sqrt{b}}\left(\frac{u_0 + u_1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

und zwar ist $\frac{u_0 + u_1}{2}$ die grosse Halbaxe der Bahn.

Dass die Bewegung der eines freien Punktes unter Centralanziehung entspricht, ist ein beiläufiges Resultat, das sich [illegible]

verstand, und hier höchstens eine Controle der Rechnung liefert. Folgende Ergebnisse dagegen sind neu.

1) Die elliptische Bahn rotirt langsam um ihren Brennpunkt, durch den die Verticale geht.

2) Sie ist, als besonderer Fall $e = a$, wesentlich verschieden von der Bahn für $e > a$, welche um ihren Mittelpunkt rotirt und die Verticale in diesem hat.

Ein stetiger Uebergang zum Fall $e = a$ ist nicht wol denkbar; denn, wenn $e - a$ verschwindet, muss auch die Elongation gleichzeitig verschwinden, damit ε klein bleibt, so dass beim Uebergang die Bahn in einen Punkt degenerirt.

XXXI.

Geschichte der Factorentafeln.

Von

P. Seelhoff.

Seitdem Eratosthenes sein für uns leider verloren gegangenes Zahlensieb (*κυκίνον*) bekannt gemacht hatte, waren fast 2 Jahrtausende vergangen, ehe wieder Aehnliches auftauchte, ich meine das Verzeichniss der Primzahlen der ersten zehn Tausende, welches Fr. v. Schooten in seinen Exercitationes Mathematicae mitteilte (1657). Die Veranlassung hierzu lag in der lebhaften Beschäftigung der damaligen Zeit mit den Eigenschaften und Gesetzen der Zahlen, die sich insbesondere auch den Fragen über die Teiler und Divisoren der Zahlen zuwandte. Seine einleitenden Worte bekunden dies deutlich: „Cum ad solutionem Quaestionum de partibus aliquotis et divisoribus primos numeros in promptu habere valde opportunum sit atque his illarum praxis in omnino facilis reddatur: haud inconveniens fore duximus, si, in ipsis hic, tanquam in abaco, exponendis, prout eos ab unitate usque ad 10000 summa accuratione investigavimus, Sectionem hanc insumeremus."

Die erste Erweiterung dem Umfange nach und zugleich die sachlich notwendige Ergänzung dieses Verzeichnisses haben wir Dr. Pell (1668) zu verdanken, welcher in Brankers translation of Rhonius's Algebra eine wirkliche Factorentabelle einfügte, in welcher die kleinsten Primfactoren mit Ausnahme von 2 und 5 für sämmtliche Zahlen bis zu 100000 angegeben sind. Denn wenn auch die Kenntniss der Primzahlen für viele Untersuchungen nicht zu umgehen ist, so erscheint doch als das wichtigere Moment die Angabe der Primfactoren, aus welchen die zusammengesetzten Zahlen bestehen, wie sie eben durch eine solche Tabelle ermöglicht ist.

Was den Nutzen solcher Tabellen überhaupt anbelangt, so äussert sich Lambert in den „Beyträgen zum Gebrauche der Mathematik" ganz zutreffend dahin, dass „unstreitig die Tabellen von den Teilen der Zahlen eben so gemein seyn sollten, als es die trigonometrischen und logarithmischen sind. Denn wer diese zu gebrauchen weiss," so fügt L. hinzu, „wird ganz gewiss auch jene brauchbar finden." Und um auch die Meinung eines zeitgenössischen Mathematikers zu hören, führe ich die Worte des Prof. J. W. L. Glaisher in Cambridge an: „Assuring the necessity for occasionally requiring the factors of a large number, it will be seen that the existence of a factor table of considerable extent is a very important matter; for the process of determining, without a table, the factors of a number, is excessively laborious. Thus to determine for example whether the number 8559091 is or not a prime would require a long day's work."

Nach dieser kurzen Unterbrechung wende ich mich der Aufzählung der nach und nach erschienenen Factorentafeln wieder zu. Nach Deutschland waren die Pell'schen Tafeln wohl kaum gedrungen, und auch die Tafeln von Rahn oder Rhonius, die dieser 1659 herausgab und welche bis 24000 gingen, scheinen wenig Verbreitung gefunden zu haben, und so fand sich denn Joh. Mich. Poëtius, obgleich ihm bekannt war, dass die ersteren existirten, bewogen, selbständig eine solche auszuarbeiten. Sie bildet einen Teil resp. Anhang von dessen „Anleitung zur arithmetischen Wissenschaft vermittelst einer parallelen Algebra. Frankfurt und Leipzig 1728" und ist betitelt Anatomia numerorum. Dieselbe Tabelle findet sich auch später abgedruckt in dem „Vollständigen Math. Lexikon, Leipzig 1742 bei Richter" und zwar im II. Teil. Sie umfasst das Zahlengebiet von 1 bis 10000.

Eine andere Tabelle, von Dodson zusammengestellt, hatte denselben Umfang; sie erschien 1745.

Ein Jahr später, 1746, erschien von Joh. Gottl. Krüger, Prof. der Arzneygelehrsamkeit zu Halle, ein Werk „Gedanken von der Algebra nebst den Primzahlen von 1 — 1000000" (Verdruckt statt 100000). Diese Primzahlen waren von Peter Jäger, Rossschreiber und Quartiermeister zu Nürnberg, berechnet, welcher im weiteren Verlaufe auch eine vollständige Anatomia numerorum herzustellen versuchte.

In den Memoiren der Pariser Akademie, 5 ter Band 1768, findet sich dann eine Tabelle, die nur bis 500 geht und alle Factoren, auch 2 und 5 enthält; sie bildet den Anhang zu einem Memoire: „Methode facile pour decouvrir tous les Nombres premiers contenus dans un cours illimité de la suite des Impairs et tout d'un temps les Di-

viseurs simples de ceux qui ne le sont pas," welches Rallier des Ourmes der Akademie überreichte.

Die Tabelle von Du Tour, corresp. Mitgliede der Pariser Akademie, in „Histoire de l'Académie des Sciences 1764" beschrieben, welche ich von Grüson ebenfalls als Factorentabelle angegeben finde, verdient diesen Namen wol nicht. Sie enthält 1666 Zeilen mit 49 Spalten, die Spalten sind mit 3, 5 bis 99 überschrieben, am linken Rande finden sich die ungeraden Zahlen von 3 bis 3333, und in den Spalten abwärts gehend sind die entsprechenden Producte, jedesmal mit dem Quadrate der Zahl am Rande beginnend, eingetragen.

Erwähnt finde ich dann noch die Factorentafel von Pigri (1 — 10000) vom Jahre 1767. In demselben Jahre erschien auch zu Leyden die Factorentafel von Anjema nach des Verfassers Tod. Dies umständliche Werk umfasst, obgleich es nur bis 10000 geht, 302 Quartseiten, da es sämmtliche Divisoren bei jeder Zahl angiebt.

1770 folgte dann in Deutschland Lambert, welcher in den „Beiträgen" zunächst eine Tafel bis 10200 und in den Zusätzen zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen kurz darauf 102000 gab. Betitelt ist sie „Tafel der Primzahlen und der Factoren von denen Zahlen, die nicht durch 2, 3, 5 theilbar sind." Hier findet man zuerst die Einrichtung, wie sie später von Burckhardt, Dase und J. Glaisher befolgt worden ist, und auf welche ich weiter unten zurückkommen werde.

Erwähne ich noch das Primzahlenverzeichniss von Adolf Frid. Marci Amsterdam 1772, welches die Zahlen bis 400000 befasst, und die Abhandlung von L. Euler in Nov. Comm. Petrop. T. XIX, 1774, über die Einrichtung einer Factorentafel bis zu 1 Million gehend, welcher eine Hülfstafel mit den Primzahlen bis 1000 beigefügt ist, so gelange ich zu den Namen, an welche sich das Bestreben anknüpft, die Factorentafeln viel weiter auszudehnen und zwar bis zu 2, 5 und 10 Million, und endlich sogar bis 100 Million; es sind dies Oberreit, Ober-Finanzbuchhalter, v. Stamford, Ingenieur-Hauptmann, und Rosenthal, Bergcommissarius, einerseits und Felkel, Lehrer in Wien, andererseits; ausserdem Professor Hindenburg in Halle. Oberreit hatte 1774 Factorentafeln bis zu 72000 und von 100000 bis 504000, welche gleichsam als Fortsetzung der Pell'schen zu betrachten sind, an Lambert eingesandt, da ihm die Musse fehlte, seine Arbeit fortzusetzen. v. Stamford übernahm dann auf Ersuchen von Lambert die Vollendung bis zu 100000 und hatte 1775 zunächst die Lücke von 72000 bis 100000 ausgefüllt. Dann trat Rosenthal, v. St. vorgeschlagen, hinzu, und man einigte sich dahin, dass

dieser den Zahlenraum von 504000—750000, jener von 750000 bis 1000001 übernehmen sollte.

Da v. St. seine Absicht nicht ausführte, so übernahm R. nach Vollendung seines Anteiles auch die Ausarbeitung des Restes (1776). Mittlerweile war Felkel auch beigetreten und sollte die 2te Million übernehmen. Er hatte nach seiner Angabe 1768 die Algebra von Euler gelesen, worin dieser die Schwierigkeit, grössere Zahlen in ihre Factoren zu zerlegen, auseinandersetzte, und in Folge dessen die Idee gefasst, Factorentafeln anzufertigen. Eine von ihm zu diesem Zwecke erfundene Maschine machte ihn, wie er sagt, victorem omnium difficultatum et Computatorum quotcunque aemulantium. Dass bei einer Voreingenommenheit, wie sie diese Auslassung bekundet, mit ihm nicht leicht zusammenzuarbeiten war, lässt sich denken. Es kam noch hinzu, dass Hindenburg Factorentafeln von 1 bis 5 Millionen anzeigte und dass dieser einen Apparatus erfunden hatte, welcher zur leichteren Herstellung derselben dienen sollte und hierdurch F. zu beschleunigterem Vorgehen veranlasste. Nach einer längeren Correspondenz der Beteiligten, die sich auf Lambert concentrirte und die in „Joh. Heinrichs Lamberts deutscher gelehrter Briefwechsel, herausgegeben von Joh. Bernoulli, Berlin 1785," abgedruckt ist, stellte sich die Sache schliesslich so, dass auf Anraten Lamberts die Arbeit von Rosenthal aufgegeben wurde, dass von Felkel eine Tafel bis zu 144000 Wien 1876 erschien, und dass von dem Manuscripte, welches bis 2 Million ging, weitere Tafeln bis 408000 bereits gedruckt waren, dass endlich mit dem Drucke von Hindenburgs Tafeln 1784 in Leipzig begonnen wurde.

Das Manuscript von Oberreit kam in den Besitz von Prof. Schulze in Berlin, wie von Gauss erwähnt wird (G. Werke 2ter Teil). Die Tafeln von Felkel, welche auf Kosten des K. K. Aerariums gedruckt wurden, wurden soweit sie fertig waren, also bis 408000 als Maculatur zur Anfertigung von Patronen in dem letzten Türkenkriege des vorigen Jahrhunderts benutzt, an welchem sich bekanntlich auch Oestreich beteiligte, und das Manuscript wurde zurück behalten. (Nach der Angabe Glaisher's besitzt die Royal Society in London einen Abdruck: I. Teil. Enthaltend die Zahlen von 1 bis 144000 und Graves Bibliothek an dem Universtty College, London einen solchen: I. Teil, die Zahlen bis 144000. II. Teil, die Zahlen von 144000—336000. III. Teil, die Zahlen von 336000—408000. Einen dritten Abdruck, der bis 336000 geht, hat, wie Gauss mitteilt, die Universitätsbibliothek zu Göttingen im Besitz). Felkel unternahm daher die Arbeit von neuem und führte sie bis 2856000. Er nannte sie Tabulae factorum redivivae; zum Drucke sind sie nie gelangt. In den Jahren 1793—1794 fertigte er dann noch zu Lissabon, wo er



derzeit lebte, sogenannte bases an, mit deren Hilfe man die Zahlen bis 24 resp. bis 100 Million in Factoren auflösen könne. Die Zahl dieser bases betrug 15 resp. 65. Der grösste Factor, welchen man mit ihnen bestimmen konnte, war jedoch nur 397. Der Druck von Hindenburgs Tafeln wurde bald eingestellt, da keine Mittel zur Weiterführung bereit waren; über ihr ferneres Schicksal kann ich nichts beibringen, nur sei erwähnt, dass Grüson in seiner Ausgabe von Euler's Algebra (1796) bedauert, Herr Prof. Hindenburg habe bis jetzt nicht Gelegenheit gefunden, seine Tafeln durch den Druck noch bekannter zu machen.

1785 erschien eine Factorentafel von Neumann in Dessau und 1794 eine solche von Maseres in England; beide enthalten die kleinsten Factoren der Zahlen bis 100000, und letztere ist nur ein Abdruck aus dem oben erwähnten Werke von Branker. 1797 gab G. Vega neben seinen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln unter anderen auch eine Factorentafel heraus. Diese enthält die Primfactoren (2, 3 und 5 ausgenommen) der Zahlen bis 102000, ihr schliesst sich ein Verzeichniss der Primzahlen des darauf folgenden Zahlenraumes bis 400000 an. In der ersten Auflage dieses Werkes von 1783 fehlen die beiden Tafeln noch. Es folgten die Tafel der Factoren bis 10500 von Grüson (1798); ferner „Neue und bequeme Art die Factorentafeln einzurichten", Giessen und Darmstadt 1800, von Snell: dies Buch enthält auch eine Factorentafel, welche bis zu 30000 geht, und endlich eine Factorentafel bis 100000 von Krause (1804). Mit dem Eingange in das 19te Jahrhundert war man also in den wirklich zum Abschlusse und zur Verbreitung gelangten Factorentabellen nicht wesentlich über 100000 hinausgekommen. Für das neue Jahrhundert nahmen L. Chernac zu Deventer, J. Ch. Burckhardt in Paris, A. L. Crelle in Berlin, Z. Dase in Hamburg nebst H. Rosenberg daselbst und J. Glaisher in Cambridge die Arbeit wieder auf und erweiterten sie bis dahin, dass binnen kurzer Zeit die Factorentafeln den Zahlenraum bis 9000000 ohne Unterbrechung umfassen werden, während die zehnte Million wenigstens im Manuscripte auch vollendet ist.

Die Tafel von Chernac enthält sämmtliche Factoren bis 1020000, sie erschien 1811 unter dem Titel: Cribrum arithmeticum sive tabula continens numeros primos a compositis segregatos. Numeris compositis, per 2, 3, 5 non divisilibus adscripti sunt divisores simplices, non minimi tantum. Daventriae. Das Jahr 1814 brachte die Tables des diviseurs pour tous les nombres depuis 1020000 jusqu' à 2028000 avec les nombres premiers, qui s'y trouvent, von Burckhardt, es folgten 1816 das Intervall von 2028000 bis 3036000 und 1817 dasjenige von 1 bis 1020000; die 3 Millionen wurden in einem Bande



von 350 Seiten in 4⁰ unter dem Titel: Table des diviseurs pour tous les nombres du 1er, 2e, 3e million. Paris 1817 herausgegeben. Für die erste Million hatte B. eine Factorentafel (1 bis 1—1002000) von Schenmark, Prof. in Lund, benutzt, die er mit Chernac's Tafel verglichen hatte. In den 40er Jahren überreichte Crelle seine Factorentafeln der 4ten, 5ten und 6ten Million der Akademie zu Berlin. Bereits 1850 hatte Gauss den durch sein rechnerisches Talent bekannt gewordenen Dase zu bestimmen gesucht, die folgenden 4 Millionen von der 7ten an zu berechnen, und 1860 unternahm Letzterer die Arbeit, materiell unterstützt durch das Comite der Dase-Stiftung, an dessen Spitze C. A. F. Peters stand. 1862 erschienen dann „die Factorentafeln für alle Zahlen der 7ten Million von 6000000 bis 7002000 mit den darin vorkommenden Primzahlen“, Hamburg. Dase selbst war bereits 1861 gestorben; er hinterliess noch die fast vollendete 8te Million, und hatte auch schon einen grossen Teil der Factoren für die 9te und 10te Million bestimmt. Dr. H. Rosenberg in Hamburg übernahm die Vollendung, und so wurde denn noch die 8te Million 7002000—8010000 im Jahre 1863 und die 9te Million 8010000—9000000 im Jahre 1865 mit dem Zusatze „von Z. Dase, ergänzt von Dr. H. Rosenberg“ veröffentlicht. Burckhardt's und Dase's Tafeln geben nur den jedesmaligen kleinsten Factor an. Die im Manuscripte bereits fertige 10te Million gelangte nicht mehr zum Drucke; das Manuscript wurde im Jahre 1878 von der Witwe des auch bereits verstorbenen Dr. Rosenberg der Berliner Akademie angeboten. Im Jahre 1877 hatte man sich von England aus nach Berlin gewandt, um in Erfahrung zu bringen, ob die Akademie das in ihrem Besitze befindliche Manuscript der 4ten bis 6ten Million zu veröffentlichen gedenke, und da von dort die Antwort erteilt wurde, man sehe davon ab wegen der in dem Manuscripte enthaltenen Ungenauigkeiten, so übernahm noch in demselben Jahre J. Glaisher die Arbeit, um die vorhandene Lücke auszufüllen. Unterstützt wird er hierbei von der British-Association for the Advancement of Sciences, welche zu dem Ende ein Comite unter dem Vorsitze des Prof. Cayley niedergesetzt hat. An der Arbeit selbst nehmen noch zwei Rechner Teil. Erschienen ist bereits: James Glaisher, table of the fourth million London 1879. Taylor & Francis. Die Vorarbeiten für die beiden anderen Millionen sind jetzt wol auch nahezu vollendet; dieselben werden im Zusammenhange bearbeitet.

Ich wende mich nun der Einrichtung von Factorentafeln zu und zwar vorzugsweise der bis jetzt bekannten Tafeln, hierbei schien mir aber wie auch in dem über die Herstellung Beigebrachten eine bloss referirende Behandlung der Sache nicht angemessen. So bitte ich denn die einzelnen kritischen Bemerkungen mir zu gestatten, sowie

auch den hypothetischen Excurs, welcher sich an die Beschreibung der Gitterauflegung für Tafeln nach der Einrichtung von B. anschliesst; ich glaubte in diesem, welcher sich auf die analoge Benutzung des Gitters für die F.'sche Einrichtung bezieht, angeben zu sollen, wie F. mutmasslich zu Werke gegangen ist. Bei dem calculatorischen Teile der Herstellung konnte ich nur kurz auf gewisse Rechenvorteile, die von J. Glaisher benutzt wurden und werden, hinweisen; B. war im Allgemeinen ähnlich verfahren, es ist aber aus seinen Angaben nicht zu ersehen, dass er sich dieselben Vorteile zu Nutz gemacht hat. Die Mitteilung gegen das Ende hin über Restetabellen erschien mir, abgesehen von dem an dortiger Stelle Gesagten, schon darum am Platze zu sein, weil sehr wahrscheinlich die früher erwähnten Bases von Felkel damit übereinstimmen. Es bleiben hier einerseits die Primzahlenverzeichnisse ausser Betracht, da sie zu wesentlichen Bemerkungen keine Veranlassung bieten; andererseits sei gleich vorweggenommen, dass nicht nur, wie es Rahn und Pell taten, die Factoren 2 und 5, deren Existenz ja schon durch die Endziffer bekundet wird, sondern auch der Factor 3, welchen die leicht zu bildende Ziffernsumme kenntlich macht, ganz ausgeschieden werden. Dann sind es hauptsächlich zwei Fragen, deren verschiedene Beantwortung eine Verschiedenheit in der Einrichtung der Tafeln bedingen. Die eine bezieht sich auf die Anzahl der Factoren, welche aufgenommen werden und zwar vorzugsweise darauf, ob nach dem Vorgange der Tafeln von Lambert, Burckhardt, Dase und Glaisher nur der jedesmalige kleinste Factor oder ob sämmtliche einfache Factoren, resp. deren Potenzen angegeben werden sollen, wie dies unter Anderen von Vega und Chernac geschehen ist. Die Idee, wie sie durch Anjema allerdings für einen verhältnissmässig kleinen Zahlenraum zur Ausführung gekommen ist, sämmtliche Divisoren, die einfachen und zusammengesetzten, aufzuzählen, wird wol schwerlich Nachahmer finden; in der Tat ist eine solche Zusammenhäufung mehr dazu geeignet, die Uebersicht zu erschweren, als dass sie irgend einen wesentlichen Nutzen böte. Die Notwendigkeit einer möglichst compendiösen Einrichtung, für welche auch der Kostenpunkt spricht, weist darauf hin, sich mit der Angabe des kleinsten Factors zu begnügen, durch welche man in den Stand gesetzt ist, mit einem geringen Aufwande einfacher Divisionen und mehrmaligem Nachschlagen sämmtliche Factoren zu ermitteln. Ein Mittelweg, welcher dies Verfahren beträchtlich abkürzen würde, wäre der, für den ersten Zahlenraum bis 100000 sämmtliche Factoren, und von da an nur noch den kleinsten Factor anzugeben, wofür sich auch J. W. L. Glaisher ausspricht. Wenn derselbe jedoch weiterhin erklärt, dass die Aufnahme sämmtlicher Factoren **überhaupt** nur geringe Mühe mehr verursache, so will ich doch darauf aufmerksam machen, dass man dann schon bei der ersten

Million von vornherein statt der Primzahlen bis 997 diese bis 142841 berücksichtigen müsste, und dass man mit dem calculatorischen Teile auch nicht mehr in der angegebenen Weise ausreichen würde. Ferner übersieht er, dass nach dem ganzen Verfahren die Potenzen über die zweite hinaus sich nicht ausprägen. Die zweite Frage betrifft die Anordnung der Argumente. Die ungraden Zahlen nach einander hinzuschreiben und im gegebenen Falle die durch Abzählen ermittelten einfachen Factoren beizufügen, wie dies wahrscheinlich von Eratosthenes geschehen ist, oder die Anordnung speciell so zu treffen, dass man die Zahlen in horizontalen Reihen niederschreibt, und soviel Zwischenraum zwischen diesen Zahlen lässt, um über den einzelnen die zugehörigen Primfactoren anzubringen nach dem Vorschlage von Rallier des Ourmes, davon kann füglich keine Rede mehr sein; es bleiben vielmehr zwei Hauptformen für die Zahlen, welche, jenachdem man die eine oder andere wählt, entscheidend sind für die Verschiedenheit der Anordnung. Bezeichnet man nämlich irgend eine Primzahl mit p und den Rest, welchen man bei der Division der gegebenen Zahl N durch 10 resp. 100 erhält, mit a resp. b, so ist zunächst

$$N = n.10 + a$$

oder

$$N = n.100 + b.$$

Im ersten Falle fasst man je einen Zahlenraum von 30, im anderen Falle von 300 zusammen, wie die S. 448 folgenden Schemata zeigen, in welchen a die 4 Werte 1, 3, 7, 9 haben kann, und zwar, wenn $n = 3m$ ist, die Werte 1 und 7, wenn $n = 3m + 1$ ist, die Werte 1, 3, 7, 9 und wenn $n = 3m + 2$ ist, die Werte 3 und 9, während im zweiten Schema für b bezüglich 26, 28 und 26 Werte auftreten, jenachdem die Anzahl der Hunderte sich durch $3m$, $3m + 1$ oder $3m + 2$ darstellen lässt. Im ersten Falle nimmt der Zahlenraum 30 eine horizontale Zeile mit 11 Feldern ein, von welchen 3 für die Zehner der Zahlen bestimmt sind, während die übrigen 8 zur Aufnahme des Primfactors dienen. Die Einer befinden sich am Kopfe der acht Factorenspalten. Nach der zweiten Anordnung erfordert der Zahlenraum 300 eine senkrechte Spalte mit 80 Feldern für die Factoren, eine am linken Rande herabgehende Spalte für die Zehner und Einer und drei Querzeilen für die drei vorangehenden Stellen der Zahl, von rechts nach links gedacht, während die noch übrigen Stellen im Eingange angebracht sind. Als Repräsentantin für die erste Art der Anordnung dient diejenige, welche Felkel seinen Tafeln gegeben hat, die zweite findet sich in den Tafeln von Lambert, Burckhardt, Dase und Glaisher. Ich stehe keinen Augenblick an, mich für die zuerst geschilderte Einrichtung auszusprechen, da sie viel übersichtlicher ist für manche Fälle der Untersuchungen, als die andere. Ich will nur

darauf hinweisen, dass die Zahlen von derselben Form bei ihr senkrecht herablaufen und sich leichter in ihrem Zusammenhange verfolgen lassen, als bei jener, wo man die gleichgeformte Querzeile auf jedem neuen Blatte erst aufsuchen muss. Wenn Herr W. J. L. Glaisher für letztere die Autorität von Gauss ins Feld führt, welcher sich Dase gegenüber dahin aussprach, dass er die Einrichtung der Burckhardt'schen Tafel für die beste halte, so ist bei diesem Ausspruche zu beachten, dass Gauss wol kaum noch eine anders eingerichtete Tafel benutzen konnte, es sei denn diejenige von Chernac, über welche er sich ja in den Göttinger Gel. Anzeigen (1812 März) anerkennend genug ausspricht und von welcher Legendre sagt: Les amateurs de l'analyse ont donc le choix entre deux recueils qui peuvent leur être également utiles, l'un par un maniement plus facile (Chernac) l'autre par une plus grande étendue. (Théorie des nombres 3. Auflage. I. S. 6.)

Ich muss der Vollständigkeit halber hier noch anführen, dass Vega, der auch die zweite Einrichtung hat, den Zahlenraum 300 auf 2 Seiten links und rechts verteilt hat, so dass man jede Spalte auf beiden Seiten erst durchgehen muss, bevor man zur nächsten übergeht. Das macht sich aber leicht, und es ist mir nicht verständlich, wenn Herr J. W. L. Glaisher sagt, es sei nicht leicht, dies in Kürze auseinanderzusetzen. Die besondere Einrichtung, welche Felkel seinen Taleln noch dadurch gab, dass er in den Factorenfeldern die Primzahlen nicht selbst angab, sondern Buchstabencombinationen benutzte, um sie zu bezeichnen, die in einer besonderen Tafel ihre Erklärung fanden, hat nur nebensächliches Interesse, so dass ich es vorziehe, nicht näher darauf einzugehen, umsoweniger, als er ja später von dieser Bezeichnung abkam, die seiner Meinung nach weniger Raum beanspruchen sollte, nachdem Lambert ihm nachgewiesen hatte, dass wenn er Ziffern wählte, der Raum nicht grösser zu sein brauchte.

Der zweifache Modus der Anordnung bringt in der Art der Herstellung keine wesentliche Aenderung hervor. Diese zerfällt nämlich nach der Grösse der Primfactoren in zwei gesonderte Acte. Für die kleineren Primzahlen bis zu einer Grenze, die sowol von der Grenze, bis zu welcher die Tafeln gehen sollen, als von den besonderen Umständen, unter denen man arbeitet, abhängt, bedient man sich eines Netzes mit ausgeschnittenen Feldern, wie es gleich unten an einem Beispiele gezeigt werden soll, eine Vorrichtung, welcher ohne Zweifel auch der von Prof. Hindenburg gebrauchte apparatus bis auf geringe Modificationen entsprach. Ueber die Grenze hinaus geht man ausschliesslich calculatorisch zu Werke. Es sei nun z. B. die Primzahl 13 an den Stellen einzutragen, wo sie als kleinster Factor auftritt, und zu Grunde sei die Lambert-Burckhardt'sche Form der

Tafel gelegt; dann ist das Verfahren, wie es Gauss wol nach den eigenen Angaben Burckhardt's in der Einleitung zu dem 1814 erschienenen Teile seiner Tafeln auseinandersetzt (s. Gauss Werke. 2. Bd. S. 183) folgendes: B. liess ein Netz in Kupfer stechen, wo durch 81 horizontale und 78 verticale Linien 80.77 Felder gebildet sind und die nötige Anzahl von Abdrücken machen. Die 80 Werte an der linken Seite konnten sogleich mitgestochen werden, die Ziffern der 3 Querzeilen und die Hauptziffern am Eingange wurden geschrieben, da sie sich von Blatt zu Blatt ändern; dann nahm B. von einem überzähligen Blatte der Breite nach nur 13 Spalten (allgemein p Spalten), und indem er diesen Streifen als den Anfang seiner Tafel behandelte, schnitt er alle Felder, welche den Factor 13 enthalten mussten, aus; die betreffenden 80 Felder waren durch Rechnung ermittelt. Er brauchte jetzt dieses Gitter nur auf die 13 ersten Spalten des ersten Blattes zu legen, dann auf die 13 folgenden u. s. w., um sogleich alle Plätze zu sehen, die noch leer d. h. nicht mit 7 oder 11 ausgefüllt waren, um sie mit 13 auszufüllen. Für die grösseren Zahlen, wie 79, 83 u. s. w. wurde dann wol der Rahmen aus 2 oder mehreren Bogen zusammengesetzt. Dasselbe Verfahren beobachtete auch J. Glaisher, nur setzte er bei grösseren Zahlen die Bogen nicht zusammen, sondern versah sie mit fortlaufenden Nummern, um sie der Reihe nach aufzulegen und nach vollendetem Turnus wieder mit dem ersten zu beginnen. B. ging hierbei bis zu 499, Gl. für die 4te Million bis zu 307. Diese Art, ein Sieb zu benutzen, kann man ebensogut, ja sogar noch mit einer beträchtlichen Vereinfachung anwenden, wenn man die erste Form der Einrichtung, wie sie das Schema I. giebt, zu Grunde legt. Man denke sich den Streifen soweit verlängert, dass er 77 Zeilen enthält, und von diesen Streifen 10 nebeneinanderliegend, so dass sie ein ungetrenntes Ganze, eine einzige Form bilden. Man hat dann 30 Spalten zur Aufnahme für die Zehner und 80 für die Factorenfelder. An den ersten Streifen, welcher in der ersten Zehnerreihe mit 0 beginnt und bis zu 228 geht, schliesst sich aber der nächste nach rechts mit seiner Nummerirung nicht unmittelbar an, sondern setzt voraus, dass man gleich zum 11ten Streifen übergegangen ist, dann zum 21ten u. s. w. bis 91ten, die Anfangszahlen in der ersten Zehnerreihe sind dann 2310, 4620 u. s. f., die zugehörigen übrigen Zahlen ergeben sich von selbst. Der erste Bogen würde also entsprechend diesen Streifen nummerirt, der zweite hätte die Nummerirung der 2ten, 12ten bis zum 92ten, der zehnte Bogen die Nummern für den 10ten, 20ten bis 100ten Streifen und die letzte Anzahl der Zehner wäre 23099 mit den Einern 3 und 9, man hätte die Zahlen bis 231000 absolvirt. Um nun das Auflegegitter zu construiren, sei wieder die Zahl 13 als Beispiel angenommen. Man bilde sich dann einen Streifen von der ganzen Breite des Bogens, der aber

nur 13 Querreihen enthält, ausserdem aber einen kleinen Hülfscarton, welcher ebenfalls diese 13 Querreihen, aber nur die Breite eines einzigen Streifens hat. Auf diesem schneide man die 8 Felder aus, welche in den 8 Spalten den durch 13 teilbaren Zahlen entsprechen und in der beistehenden Figur durch Kreuze angedeutet sind. Diesen Carton legt man auf den ersten Streifen im Gitter und markirt die Stellen, welche den ausgeschnittenen Feldern entsprechen, dann dividire man 770:13 und erhält —10 als Rest, d. h. wenn man das Gitter nach und nach auf 10 aneinanderstossende Streifen von je 77 Querreihen gelegt hätte, so würde es den nächsten oder 11ten mit 10 Querreihen überdecken. In dem Auflegegitter hat man also mit dem Hülfscarton so zu verfahren, dass man dessen unterste zehn Reihen zuerst auf den zweiten Streifen auflegt; ferner hat man für den 3ten Streifen —10.2:13 Rest —7, u. s. f. Statt also 80 Ausgangspunkte für das Gitter bei jeder Primzahl berechnen zu müssen, wenn man die B.'sche Anordnung befolgt, hat man es hier von vornherein nur mit 8 solchen Punkten zu tun. Das Gitter wird dann von Bogen zu Bogen in verticaler Richtung weiter geführt. Sind die 10 ersten Bogen vollendet, so bildet man sich mit leichter Mühe für die nächsten zehn vermöge des Cartons ein neues Gitter und gebraucht es wie eben; jede 10 Bogen umfassen den vollen Zahlenraum von 231000. Indes wird es ja vorläufig mit den ersten 10 Million in der Anfertigung von Factorentafeln sein Ende haben und da diese alle nach der ursprünglichen Einrichtung von Lambert angelegt sind, so würde eine andere Anordnung auch für die Zukunft nicht zu erstreben sein. Die Maschine von Felkel, welche aus 8 Stäben zusammengesetzt war, denen man verschiedene Längen geben konnte, scheint etwa dem Hülfscarton zu entsprechen. Die 77 senkrechten Spalten bei B., oder die 77 Querreihen nach der andern Anordnung haben den Zweck, dass die Felder mit 7 und 11 gleich in der Hauptform durch den Druck eingetragen werden können. Was nun den calculatorischen Teil der Eintragungen betrifft, so bestimmt man die Kubikwurzel aus der oberen Grenzzahl der Tafel und dieser entsprechend die grösste Primzahl, welche noch 3 mal als Factor vorkommt; von hier an aufwärts hat man jede Primzahl nur mit sich selbst und jeder folgenden bis zur Tafelgrenze hin zu multipliciren, und die Producte unter den Zahlen der Tafel aufzusuchen, um in das entsprechende Feld, welches noch nicht besetzt sein kann, den kleinern Factor einzutragen. Dass man sich hier einige Bequemlichkeiten für das Rechnen schaffen kann, zeigt insbesondere das Verfahren von J. Glaisher.

Ich kann am Schlusse meiner Auseinandersetzungen nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, dass während man sich in England d[illegible]

beschäftigt, die 4te bis 6te Million zum Abschlusse zu bringen, die Factorentafeln der übrigen Millionen immer schwerer zugänglich werden und dass der Kostenpunkt, wenn man einen grösseren oder den ganzen Zahlenraum umfassen will, zu bedeutend ist. Gerade hierin liegt auch wol ein Hauptgrund, dass die nicht nur grossen Reiz, sondern auch mannichfachen Nutzen gewährende Beschäftigung mit den Zahlen und ihren Gesetzen nicht so weit Platz greift, wie es wol zu wünschen wäre. Wenn ich daher noch ein Verfahren mitteile, welches den Gebrauch vollständiger Tafeln in gewissem Sinne entbehrlich macht, ein Verfahren, für welches ich alle vorbereitenden Rechnungen abgeschlossen habe, so glaube ich, ist diese Mitteilung durch das zuletzt Gesagte hinreichend motivirt.

Zunächst sei bemerkt, dass hierfür die Einrichtung des Schema I. erforderlich ist, und dass man eine Factorentafel nach dieser Anordnung bis 100000 mit allen Factoren nötig hat. Man findet dann leicht, dass in irgend einer Factorenspalte z. B. von einem Felde mit 13 bis zum nächsten 13 Reihen Zwischenraum sind, oder dass man in der Zehnerspalte 13.3, in Wirklichkeit als um 13.30 weitergegangen ist. Mit anderen Worten, ist

$$N = n.10 + a \text{ ein Vielfaches von } p,$$

und

$$N' = n'.10 + a \text{ das nächste derselben Primzahl,}$$

so ist

$$n' - n = 3.p.$$

Ist mir nun eine Zahl gegeben, wie z. B. 3572791, so setze ich diese $= 357279.10 + 1 = (35.10000 + 7279).10 + 1$. Dividire ich nun $350000 : 3p$ und erhalte r als Rest, so muss $(r + 7279).10 + 1$ ein Vielfaches von p sein, wenn 3572791 ein solches ist und umgekehrt. Kenne ich demnach für jedes p bis zur $\sqrt{3572791}$ den Rest, welchen 35.10000 durch $3p$ giebt, ordne ich diese Reste nach ihrer Grösse, addire sie nach und nach zu 7279 und sehe in der Factorentabelle, welche ja die Zehner bis 9999 enthält, nach, ob sich einmal in der Factorenspalte mit 1 an der Spitze derselbe Factor findet, wie die zu dem Reste gehörige Primzahl, so weiss ich, dass diese Primzahl auch in 3572791 aufgeht.

Ist vorauszusehen, dass man bei der Addition der Reste über 9999 hinauskommen würde, so kann man für $(350000 + 7279).10 + 1$ auch setzen

$$\{360000 + (-10000 + 7279)\}.10 + 1 = (360000 - 2721).10 + 1$$

und mit -2721 ebenso verfahren, wie vorher mit 7279, nur dass die Reste von $360000 : 3p$ zu nehmen sind.

Es sind also für den Zahlenraum bis etwa 6000000 erforderlich 1) eine Factorentabelle bis 100000 mit allen Factoren; 2) 60 resp. 61 kleine Tabellen, welche die Reste von 1.10000 bis 61.10000:$3p$ der Grösse nach und mit jedes Mal beigeschriebenem p enthalten. Mit diesen einfachen Hülfsmitteln ist es mir leicht geworden, die Zerlegung grösserer Zahlen in ihre Primfactoren auszuführen und zwar durchgängig in ganz kurzer Zeit.

Was die Wiedergabe durch den Druck betrifft, so enthalten die Tafeln von B. beispielsweise auf jeder Quartseite einen Zahlenraum von 9000, da er 31 senkrechte Spalten und 80 horizontale Reihen darauf anbrachte. Man würde bei der anderen Anordnung unter Beibehaltung desselben Formates und derselben Schriftgrösse und unter Hinzunahme von zwei senkrechten Spalten, während die Zahl der Querreihen dieselbe bliebe, freilich nur den Zahlenraum 7200 auf jeder Seite umfassen, aber beim Gebrauche hätte man den grossen Vorteil, dass jedesmal Zahl und zugehöriger Factor fast unmittelbar neben einanderstehen, während man dort eine Anzahl von Spalten bis zu 30 durchgehen muss, um zu dem betreffenden Factorenfelde zu gelangen.

Als Quellen für die Geschichte der Factorentafeln, resp. ihre Einrichtung und Herstellung dienen füglich:

Fr. v. Schooten, Exercitationes Mathematicae.

J. H. Lambert, Beyträge zum Gebrauche der Mathematik.

Memoiren der Akademie der Wissenschaften zu Paris. 5. Band.

Histoire de l'Academie des Sciences. S. 88.

Lamberts deutscher gelehrter Briefwechsel von Joh. Bernoulli.

L. Eulers Algebra von Joh. Ph. Grüson. 1. Th. S. 22 u. 24.

Cribrum arithmeticum von Chernac. Einleitung.

Table des diviseurs pour tous les nombres du deuxième million. Von Burckhardt. Einleitung.

Z. Dase, Factorentafel 7te Million. Einleitung.

J. W. L. Glaisher, On factor tables with an account of the mode of formation of the factor table for the fourt million Proc. of the Cambr. Ph. Soc. Febr. 1878.

Bremen im October 1883.

Nachtrag.

Meine Mitteilungen über die Geschichte der Factorentafeln habe ich noch durch die Notiz zu ergänzen, dass im Jahre 1863 der

Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien aus dem Nachlass des verstorbenen Professors Kulik in Prag ein Manuscript, enthaltend Factorentafeln, übergeben wurde. Nach dem Berichte, welchen Prof. Petzval hierüber 1866 der Akademie vorlegte, umfassen diese in 6 grossen Foliobänden den Zahlenraum von 3 bis 100000000 (hundert Million) und geben den kleinsten Primfactor, mit Ausnahme von 2, 3 und 5 an. Die Primfactoren sind durch die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets und durch Combinationen derselben bezeichnet, deren Bedeutung einer Hülfstafel zu entnehmen sind. Also ähnlich wie bei Felkel, nur dass dieser seine Combinationen aus je einem Buchstaben des grossen und kleinen lateinischen und deutschen Alphabets mit je einem Buchstaben des griechischen bis χ bildete. (Sitzungsber. der Mathem.-Naturw. Kl. der K. Ak. d. W. zu Wien LIII. II. Abth.).

Eine andere nachträgliche Notiz betrifft die Einrichtung von Factorentafeln. Im 51. Bande des Crelle'schen Journals befindet sich nämlich ein Artikel des Herausgebers: „Wie eine Tafel der unteilbaren Factoren der Zahlen bis zu beliebiger Höhe möglichst leicht und sicher aufzustellen sei.“ Crelle verlangt, dass die Tafeln, abgesehen von 2, 3 und 5 die übrigen Factoren sämmtlich geben müssten. Zu ihrer Herstellung bis zu einer weiteren Grenze setzt er eine bereits vorhandene Tafel mit allen Factoren in einem kleineren Umfang, aber von 7 beginnend, voraus und ausserdem eine Productentafel. Bezeichnet man eine Zahl der vorhandenen Tafel mit E, eine Primzahl mit p, die obere Grenze der neuen Tafel mit B, so werden alle p bis $\sqrt{B}$ mit allen E bis $\frac{B}{\sqrt{B}}$ multiplicirt und zwar werden für jedes Product einzelne Teile besonders gebildet und in besondere Productentafeln eingetragen. Die erhaltenen Producte bilden die Zahlen der neuen Tafel, die übrigen Zahlen sind Primzahlen. Die vorkommenden Wiederholungen dienen als Probe. Nach seiner Absicht soll dann aus der Chernac'schen Tafel eine neue bis 7000000 und aus dieser eine solche bis 49000000 hervorgehen. Für die Bearbeitung hatte er Dase ins Auge gefasst und die Zeit bis zur Vollendung auf ca. 16 Jahre berechnet. Es findet sich in dem Artikel auch eine Berechnung sämmtlicher Kosten, nur geht der Berechner dabei nicht mit in Rechnung, da dieser von einer wissenschaftlichen Gesellschaft oder der Regierung unterhalten werden sollte. (Crelle's Journal LI.).

Schliesslich kann ich noch die Nachricht hinzufügen, dass inzwischen die Tafel der 5. und 6. Million von Glaisher erschienen ist.

XXXII.

Die Umkehrung des Grundgedankens von Hindenburg's combinatorischer Analysis.

Von

Herrn **Friedrich Roth**,

ord. Lehrer am Realprogymnasium zu Buxtehude.

---

a) Die gemeinen Combinationen und Variationen *).

(Combin. und Variationen ohne und mit unbeschränkter Wiederholung.)

In dem letzten Jahrhundert hat die Mathematik von mehreren Versuchen zu berichten, durch neue Auffassung schon bekannter räumlicher Verhältnisse oder durch Erfindung irgend welcher noch nicht behandelter Beziehungen zwischen arithmetischen Grössen der Wissenschaft neue Werkzeuge zu schaffen und ihr neue Bahnen zu weisen, auf denen sie die Schwierigkeiten der ihr gestellten Aufgaben leichter als mit den bisherigen Hülfsmitteln überwinden könne. Zu diesen Versuchen gehört auch die Schaffung der „combinatorischen Analysis“, die, am Ende des vorigen Jahrhunderts von dem Leipziger

---

*) Diese Abhandlung bildete ursprünglich den zweiten Teil des Aufsatzes, den ich in Hoffmanns Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht, Heft 3. des XIV. Jahrganges S. 250—259 veröffentlicht habe.

In jenem ersten Teile habe ich bei der Berichterstattung über die Ableitung, die Reidt in Schlömilch's Handbuch der Mathematik zur Formel für die Anzahl der Combinationen m. W. gegeben hat, die Worte hinzugefügt: „Ob diese Beweisführung so recht durchschlagend ist, . . . , scheint mir noch eine offene Frage. Auch vermisst man die Angabe darüber, ob der Verfasser den

Professor Hindenburg eingeführt, von einer grossen Zahl seiner Schüler und Anhänger verteidigt und vermehrt wurde, um schliesslich fast ganz der Vergessenheit anheimzufallen, ein Schicksal, das wohl die meisten dieser Neuerungen teilen werden, sobald es ihnen nicht gelingt, durch wirkliche Lösung der Jahrhunderte alten Aufgaben unserer Wissenschaft die menschliche Erkenntniss wirklich zu fördern.

Doch war die Schöpfung Hindenburgs nicht ohne Wert. Er war dabei von einem richtigen Gefühl geleitet und hat eine Wahrheit herausgefunden, die für die Mathematik reiche Früchte zu tragen verspricht, wenn sie nur in anderer Weise, als er selbst es getan, benutzt wird. Diese Wahrheit aber ist die innige Beziehung zwischen der Multiplication mehrstelliger Grössen und der Combinationslehre. Von der Tatsache ausgehend, dass bei der Ausrechnung eines Productes von mehreren Polynomen alle möglichen Zusammenstellungen ihrer Summanden vorkommen, sucht die „combinatorische Analysis" zunächst für die Combinationslehre die Gesetze und Formeln festzustellen und durch neue Bezeichnungen übersichtlich zu machen, um diese dann vermittelst des polynomischen Satzes auf die Theorie der Reihen anzuwenden. Daher nennt Hindenburg den letzteren „das wichtigste Theorem der ganzen Analysis", und deshalb sagt einer seiner Anhänger von demselben Satze: „Dieser ist gleichsam ein

---

Beweis selbst gefunden, oder ob er ihn einem anderen Werke entnommen hat". Darauf hin schreibt mir Herr Reidt, dass er den Grundgedanken seines Beweises, den er schon 1868 in seinen „Elementen der Mathematik" mitgeteilt, anderwärts vorgefunden habe, sich jedoch nicht mehr bestimmt erinnere, in welchem Buche er ihn zuerst gelesen habe. Die Quellenangabe bei jedem einzelnen Satze hält er für untunlich. Uebrigens finde sich dieselbe Ableitung jener Formel auch in den Elementen der Mathematik von Gallenkamp (2. Aufl. 1860) und in der Elementar-Mathematik von Helmes (2. Aufl. 1874). Dass er gerade diesen Beweis gewählt habe, liege in dessen Kürze und Brauchbarkeit für den Unterricht. Die wissenschaftliche Strenge der Entwickelung sei unbestreitbar, die Beweisführung also vollständig „durchschlagend", doch könne man bei dem mündlichen Vortrage den Gedankengang etwas mehr ausführen als es die erforderliche Knappheit der schriftlichen Darstellung gestatte.

Wie aus dem Zusammenhange deutlich hervorgeht, habe ich in dem fraglichen Aufsatze mit dem Ausdrucke „durchschlagend" nichts anderes bezeichnen wollen als diejenige Eigenschaft des Vortrages, die im Stande ist, auch mittelmässig begabte Schüler zu überzeugen und fortzureissen. Im Uebrigen aber kann ich nicht von der Ueberzeugung lassen, dass die Geringfügigkeit der Quellenangabe und des Litteraturnachweises einen Mangel des Schlömilch'schen Handbuches bildet, das doch in erster Linie nur zum Nachschlagen für den Lehrer bestimmt sein kann.

hoher Standort, von welchem man die Gefilde der Analysis übersehen kann". In Wirklichkeit war er den Vertretern der combinatorischen Analysis die Brücke, über welche sie aus dem Gebiete der Combinationslehre in dasjenige der algebraischen Operationen herüberdrangen, um die auf jener Seite geschmiedeten Waffen zur Ueberwindung der Schwierigkeiten zu benutzen, die sich dem Mathematiker diesseits entgegenstellen.

In dieser Abhandlung stellen wir uns nun die Aufgabe, die Formeln der Combinationslehre sämmtlich in einheitlicher Weise auf eine neue Art herzuleiten. Da es sich dabei im Gegensatze zu dem Unternehmen Hindenburg's darum handelt, für die Ausführung der Zusammenstellungen von gegebenen Elementen die entsprechende Rechenoperation aufzufinden, so wird uns der Gedanke nahe gelegt, einmal den Weg, den jener eingeschlagen, umgekehrt zu gehen und vermittelst des polynomischen Satzes die bekannten Regeln der Algebra auf das in unsrer Aufgabe zum Teil noch als unbekannt vorausgesetzte Gebiet der Combinatorik anzuwenden.

Zerlegen wir die Potenz des $n$gliedrigen Polynoms

$$(a+b+c+\ldots+l)^m$$

in ihre m Factoren und führen die Multiplication dieser so aus, dass wir den Summanden (a, b ...) eines jeden der polynomischen Factoren immer hinter den Summanden des vorhergehenden Factors setzen, so geben die Teilproducte, welche die Glieder der entstehenden polynomischen Reihe bilden, die Variationen mit Wiederholungen von n Elementen zur $m$ten Classe, solange wir ein jedes derjenigen Glieder, in denen dieselben Buchstaben, aber in anderer Reihenfolge vorkommen — wie dies bei der Multiplication in der Tat geschieht — besonders zählen. Nun wird eine jede Summe zur Anzahl ihrer Summanden, wenn wir jeden dieser letzteren gleich eins setzen. Da nun alle Glieder der entstandenen polynomischen Reihe sich als Producte der unbestimmten Zahlen a, b u. s. f. darstellen, so erhalten wir die Anzahl der fraglichen Variationen, wenn wir für jeden Buchstaben 1 schreiben. Dann aber ist die gesuchte Anzahl der Variationen mit Wiederholungen von n Elementen zur $m$ten Classe:

$$(\overbrace{1+1+1+\ldots+1}^{n \text{ mal}})^m = n^m.$$

Wäre es möglich, während der Multiplication alle diejenigen Glieder zu entfernen, die Wiederholungen enthalten, so würde man die entsprechenden Variationen ohne Wiederholungen erhalten. Schreibt

man dagegen das Hauptproduct in der gewöhnlichen Weise, d. h. die einzelnen Teile desselben als Producte von Potenzen, wie $a^{m-2}b^2$, $a^{m-k}b^3c^{k-3}$ u. a., so stellen diese die Abkürzungen für alle möglichen Combinationen mit Wiederholungen vor, die Anzahl der Glieder des Endproductes also die Anzahl der Formen der letzteren bei n Elementenund in der m ten Classe.

Könnten nun die einzelnen Factoren in allen Teilproducten gleich oft mal umgestellt werden, so würde man nur nötig haben, die Zahl der Variationen m. W. durch die zugehörige Versetzungszahl zu dividiren, um die Zahl der Complexionen der in Rede stehenden Combinationen zu erhalten. Dies geht aber deshalb nicht, weil in den einzelnen Producten nicht überall dieselbe Menge gleicher Elemente vorhanden ist. Es käme also nur darauf an, ein Verfahren zu ersinnen, durch welches die Ungleichheit der Permutationszahl beseitigt würde. Ein solches liegt in Folgendem:

Es werde die $m$te Potenz des Polynoms $a+b+c+\ldots+t$ durch $\overline{m-1}$ malige Multiplication ausgerechnet, wobei wir die später kommenden einstelligen Einzelfactoren in derselben Weise wie oben an die früheren anfügen und zur leichtern Uebersicht die mehrstelligen Hauptfactoren als wagerechte Reihen unter einander schreiben, wie in dem nachstehenden Schema, das bei der Ausführung der Multiplication von oben nach unten durchlaufen werde.

Nun leuchtet sofort ein, dass bei der Bildung der Einzelproducte je zwei verschiedene Buchstaben (z. B. a und b) aus zwei verschiedenen wagerechten Reihen auf zwei Weisen verbunden werden können (nämlich erstens das a der oberen mit dem b der unteren Reihe, oder das b der oberen Reihe mit dem a der unteren); zwei gleiche Buchstaben dagegen können nur auf eine Weise zusammengestellt werden. Nun setzen wir zu den tiefer stehenden Polynomen immer einen Summanden (α_k) mit positivem oder negativem Vorzeichen hinzu, der die Eigenschaft hat, die Gestalt derjenigen Buchstaben einer oberen Reihe anzunehmen, mit denen er multiplicirt wird, so zu den Gesammtfactoren vom zweiten abwärts ein α_1, das sich stets in diejenigen Elemente der ersten Reihe verwandelt, an die es angefügt wird, dann von der 3ten Reihe abwärts ein Glied α_2, das die Gestalt der Buchstaben des zweiten Hauptfactors annimmt, u. s. f. für jede tiefer stehende wagerechte Reihe ein Glied mehr bis zur $m$ten, wo α_{m-1} denjenigen Summanden bezeichnet, welcher die Gestalt der Glieder des $\overline{m-1}$ten Polynoms einschliesslich der angefügten α annimmt, sodass wir folgendes Schema erhielten:

	$1 \quad 2 \quad 3 \qquad n-1 \quad n$
1. Reihe:	$a+b+c+ \dots +s+t$
2 „	$a+b+c+ \dots +s+t\pm\alpha_1$
3. „	$a+b+c+ \dots +s+t\pm\alpha_1\pm\alpha_2$
4. „	$a+b+c+ \dots +s+t\pm\alpha_1\pm\alpha_2\pm\alpha_3$
	$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$
k „	$a+b+c+ \dots +s+t\pm\alpha_1\pm\alpha_2\pm\alpha_3\pm \dots \alpha_{k-1}$
$\vdots$	
letzte m „	$a+b+c+ \dots +s+t\pm\alpha_1\pm\alpha_2\pm\alpha_3\pm \dots \pm\alpha_{k-1}\pm \dots \pm\alpha_{m-1}$

Jetzt habe ich immer zwei Wege, um irgend einen Buchstaben der einen Reihe mit einem beliebigen Buchstaben einer anderen, tiefer stehenden zu verbinden, einerlei ob dabei zwei gleiche oder zwei unter sich verschiedene Elemente verknüpft werden. Denn in dem ersten Falle führt der eine Weg zu dem wirklich gleichen Zeichen, der andere zu demjenigen $+\alpha$, das sich in das gleiche Zeichen verwandelt. Die Anzahl der möglichen Versetzungen ist also überall dieselbe. Es sind dieselben aber auch vollständig vorhanden. Denn die Permutationen sind dann alle ausgeführt, wenn die Vertauschung zweier an beliebigen Stellen stehenden Elemente keine neuen Formen mehr ergiebt, oder anders ausgedrückt, wenn alle Paare der Elemente der Reihe nach unter sich ihre Plätze gewechselt haben. Dieser Bedingung entspricht aber unser Verfahren, weil sie den Grundgedanken desselben bildet.

Wähle ich bei den verwandelbaren Gliedern das negative Vorzeichen, so fallen alle Wiederholungen weg. Denn es kommt ein jeder Summand einer wagerechten Reihe bei dem Multipliciren mit einer tiefer stehenden sowohl mit dem ihm gleichen Buchstaben zusammen als auch mit demjenigen negativen α, das sich in diesen verwandelt. Die wiederholte Multiplication des Minuszeichens stört diesen Schluss nicht, da derselbe für jede beliebige Auswahl der Glieder aus den übrigen polynomischen Factoren in Gültigkeit bleibt. An jedes Einzelproduct der Summanden der oberen Polynome ist in dem nächsten nach unten folgenden Polynom derselbe Buchstabe, wenn er in jenem Producte schon enthalten war, zweimal anzufügen, und zwar das eine Mal positiv, auf dem gewöhnlichen Wege, das andere Mal negativ, bei Benutzung des α.

Wenn wir nun mit Hülfe des oben schon einmal gebrauchten Kunstgriffes die durch das Ausmultipliciren entstehende Summe in die Anzahl ihrer Glieder verwandeln, so können wir die verwandelbaren Einzelfactoren ebenso wie die anderen behandeln; denn auf

das Vorhandensein eines Productes überhaupt hat es keinen Einfluss, welche Gestalt seine Factoren besitzen. Da ausserdem die Anzahl der zu permutirenden verschiedenen Elemente m ist, und die gleichen Elemente sich wie diese verhalten, so bekommt man:

1) (Var. o. W.) $\underset{m}{V}(n) = n(n-1)(n-2) \ldots (n-m+2)(n-m+1)$

2) (Comb. o. W.) $$\underset{m}{C}(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+2)(n-m+1)}{1.2.3\ldots(m-1)m} = \binom{n}{m}$$

3) (Comb. m. W.) $${}^{w}\underset{m}{C}(n) = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-2)(n+m-1)}{1.2.3\ldots(m-1)m} = \binom{n+m-1}{m}$$

Wie man sieht, hat diese Ableitung den Vorzug, dass sie die Combinationen mit und die ohne Wiederholungen unter einem Gesichtspunkt vereinigt, während die bisherigen Beweisarten den ersteren eine abgesonderte Stellung zuweisen, die ihnen zum Nachteil des Lernenden den Anschein besonderer Schwierigkeit geben.

Es sei uns wieder die n gliedrige polynomische Reihe $a+b+c+\ldots s+t$ gegeben; man füge dazu den Summanden $+u$ und erhebe die entstandene $\overline{n+1}$ stellige Summe in der Weise auf die $m$te Potenz, dass man die ersten n Summanden als einzige Grösse auffasst, d. h. man entwickele nach dem binomischen Lehrsatze

$$[(a+b+c+\ldots+s+t)+u]^m,$$

wodurch man man bekanntlich $m+1$ Glieder erhält. Um aber alle einzelnen Summanden derjenigen Reihe zu bekommen, die durch wirkliche Ausführung der $m$ten Potenz der $\overline{n+1}$ gliedrigen Summe $a+b+\ldots+u$ entsteht, muss ich in jener Binomialreihe die Potenzen des durch die runde Klammer zusammengefassten ersten Gliedes ausrechnen. Eine jede dieser Potenzen giebt aber soviel einzelne Producte der Buchstaben $a, b \ldots t$, als sich n Elemente zur Classe des jedesmaligen Potenzexponenten mit Wiederholungen combiniren lassen; und da die Potenzen von u immer nur eine Stelle haben, so bekommen wir den Satz:

$${}^{w}\underset{m}{C}(n) + {}^{w}\underset{m-1}{C}(n) + {}^{w}\underset{m-2}{C}(n) + \ldots + {}^{w}\underset{2}{C}(n) + {}^{w}\underset{1}{C}(n) + 1 = {}^{w}\underset{m}{C}(n+1) = \binom{n+m}{m}.$$

Es ist das dieselbe Gleichung, wie sie Stammer schon 1881 im zwölften Jahrgange von Hoffmanns Zeitschrift S. 191 und 192 aus der Natur der Combinationen abgeleitet hat. Unsere Entwickelung besitzt ausser dem Vorzug der Kürze noch den, dass sie durch Erweiterung eine eigentümliche Beziehung zwischen den Binomialcoefficienten aufdeckt. Wenn man nämlich bei der Ausrechnung von $(a+b+c+\ldots s+t)^m$ je $n-r$ und je r Elemente als Teile eines Binoms zusammenfasst, so erhält man dem Obigen entsprechend

$$4)\quad {}^{w}\underset{m}{C}(r) = {}^{w}\underset{m}{C}(n-r) + {}^{w}\underset{m-1}{C}(n-r)\,{}^{w}\underset{1}{C}(r) + {}^{w}\underset{m-2}{C}(n-r)\,{}^{w}\underset{2}{C}(r) + \ldots$$
$$+ {}^{w}\underset{m-k}{C}(n-r)\,{}^{w}\underset{k}{C}(r) + \ldots + {}^{w}\underset{1}{C}(n-r)\,{}^{w}\underset{m-1}{C}(r) + {}^{w}\underset{m}{C}(r)$$

eine Gleichung, welche das Gegenstück zu dem Satze bildet, den Baltzer in seinen Elementen der Math., II. Teil, § 25 für die Combinationen o. W. dadurch herleitet, dass er $u+v$ Elemente in je u und je v zerlegt.

Die linke Seite der ersten, einfacheren Gleichung enthält die um 1 vermehrte Summe aller Combinationen mit Wiederholungen von n Elementen durch alle Classen von der ersten bis zur $m$ten, sodass wir für die Anzahl der Formen der in dieser Weise ausgeführten Combinationen bekämen:

$$5)\quad \underset{1 \text{ bis } m}{\Sigma^{w}C(n)} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+m-1)(n+m)}{1.2.3\ldots(m-1)m} - 1 = \binom{n+m}{m} - 1$$

Dies ist die Formel, die sich, soweit meine Kenntniss reicht, zuerst in der *ars conjectandi* von Jac. Bernoulli vorfindet, wo sie aus den Eigenschaften der Zahlen gefolgert wird, welche die Anzahl der Combin. m. W. angeben, und die in einer Tabelle, nach Classen und Elementen fortschreitend, jedoch nur innerhalb enger Grenzen, übersichtlich zusammengestellt sind.

Ganz ebenso können wir den Grundgedanken unserer Abhandlung dann anwenden, wenn uns die Aufgabe gestellt wird, die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen durch alle Classen von der ersten bis zur höchstmöglichen zu bestimmen, eine Aufgabe, die von Hindenburg durch die Eigenschaften der Binomialcoefficienten, von Bernoulli dagegen durch die Bildungsweise dieser Art der Combinationen und die Gesetze der mit dem Exponenten 2 fortschreitenden geometrischen Reihe (progressio geom. dupla) gelöst worden ist.

Denken wir uns die Multiplication der n zweigliedrigen Factoren

$$\overline{1+a}\,.\,\overline{1+b}\,.\,\overline{1+c}\,\ldots\,\overline{1+k}\,\ldots\,\overline{1+s}\,.\,\overline{1+t}$$

ausgeführt, so enthält jedes der entstehenden Einzelproducte n einstellige Factoren, die unbestimmte Zahlen und Einsen sein können. Da nach den Regeln der Multiplication keins der Binome übergangen werden darf, so müssen in den entstehenden Einzelproducten alle möglichen Auswahlen der n Buchstaben vorkommen; das erste besteht aus 1^n, die folgenden aus $n-1$ Einsen und je einem Buchstaben, dann giebt es solche aus $n-2$ Einsen und zwei Buchstaben u. s. f., d. h. wir haben ausser 1 noch alle möglichen Combinationen der n Elemente $a, b \ldots t$ durch alle Classen bis zur $n$ten. Um nun aus der das Gesammtproduct bildenden Reihe die Anzahl der Glieder zu erhalten, setzen wir ein jedes derselben gleich 1, und dies erreichen wir, indem wir für jedes einzelne Element $a, b, c \ldots$ eins setzen. Da auf diese Weise das Gesammtproduct gleich $(1+1)^n$ wird, so ist das Gesuchte:

$$\sum_{1 \text{ bis } n} C(n) = 2^n - 1.$$

XXXIII.

Anwendung der Eigenschaften des einmanteligen Rotationshyperboloides zur Lösung einiger Aufgaben über die Hyperbel.

Von

Herrn **W. J. Hübner,**

Professor an der Oberrealschule in Rakonitz.

---

a) Es sei die Hyperbel H_2 durch ihre reelle Axe $a_{1,2}\ b_{1,2}$ und einen Punkt m_2 (Fig. 1.) gegeben. Man soll nun in diesem Punkte die Tangente und die beiden Asymptoten derselben construiren.

Die Ebene der Hyperbel H_2 sei die zweite Projectionsebene N, die durch die reelle Axe senkrecht zu N gelegte Ebene die erste Projectionsebene M, (die Projectionsaxe X vereinigt sich mit der reellen Axe). Durch die Umdrehung einer gegebenen Hyperbel um die imaginäre Axe entsteht bekanntlich die Fläche eines einmanteligen Rotationshyperboloides, welche die einzige Rotationsfläche und zugleich windschiefe Fläche ist.

Der zweite Umriss dieser Fläche ist nun die Hyperbel H_2, der erste Umriss aber die über der reellen Axe $a_{1,2}\ b_{1,2}$ umschriebene Kreislinie k_1. Den gegebenen Punkt m_2 betrachten wir für das zweite Bild des Punktes $m (m_2 \equiv m)$, dessen erstes Bild m_1 auf der Axe $X_{1,2}$ ist; die von dem Punkte m_1 zu der Kreislinie k_1 geführten Tangenten A_1, B_1 sind die ersten Bilder der Erzeugungslinien des Hyperboloides und gehören dem Punkte m *) an; die zweiten Bilder sind,

---

*) Das einmantelige Rotationshyperboloid hat bekanntlich zwei Systeme geradliniger Erzeugungslinien; durch einen jeden Punkt der Fläche gehen zwei solche Geraden, von denen jede einem anderen Systeme angehört.

wie ersichtlich, in einer einzigen Geraden ($A_2 \equiv B_2$), welche zugleich die Tangente der Hyperbel H_2 in dem Punkte m_2 ist. Dreht man die Geraden A, B um ihre Umdrehungsaxe (imaginäre Axe), bis

A in die Lage $M \parallel N$ oder auch: A in die Lage $N \parallel N$
B „ „ „ ${}^1M \parallel N$ B „ „ „ ${}^1N \parallel N$*)

daher

m in die Lage n, ${}^1n$

kommt, so dass

$$M_1 \equiv {}^1M_1 \parallel X_{1,2} - (N_1 \equiv {}^1N_1 \parallel X_{1,2})$$

so sind die zweiten Bilder der Geraden M, ${}^1M$(N, ${}^1N$) die gesuchten Asymptoten der Hyperbel H_2.

Zusatz. Bedeuten ξ', η' die Coordinaten des Punktes m_2, so ist die Gleichung der Geraden $A_2 \equiv B_2$:

$$\eta - \eta' = A(\xi - \xi'),$$

wo A die Constante dieser Geraden bedeutet. Bezeichnet man:

$$\overline{m_1 t_1} = \sigma, \quad \overline{m_1 t_1} = \tau, \quad \overline{t_1 t_2} = \varphi, \quad \overline{a_{1,2} b_{1,2}} = \alpha, \quad \overline{0_{1,2} t_2} = \omega$$

und

$$\overline{b_{1,2} k_2} = \beta (b_{1,2} k_2 \text{ senkrecht auf } X_{1,2}) \text{**)},$$

dann ist

$$A = \frac{\eta'}{\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

und

$$\tau^2 = \xi'^2 - \alpha^5$$
$$\tau^2 = \sigma^2 + \varphi^2$$
$$\tau^2 = \sigma^2 + \alpha^2 - \omega^2$$

und da

$$\omega = \xi' - \sigma,$$

so ist

$$\xi'^2 - \alpha^2 = \alpha^2 - \xi'^2 + 2\xi'\sigma$$

daher

$$\sigma = \frac{\xi'^2 - \alpha^2}{\xi'}$$

Durch Substitution dieses Wertes in die Gleichung 1) ergiebt sich:

$$A = \frac{\eta'\xi'}{\xi'^2 - \alpha^2}.$$

---

*) D. i. in die parallele Lage mit der zweiten Projectionsebene N.

**) Wie ersichtlich, sind t, ${}^1t_1$ die Berührungspunkte der Geraden A_1: B_1 und $0_{1,2}$ ist der Mittelpunkt der Hyperbel H_2.

Aus der Aehnlichkeit der geradwinkligen Dreiecke [illegible] $m_1 m_2 t_2$ (Dreieck $m_1 m_2 t_2$ ist in seiner wahren Form durch die Katheten η', τ bestimmt), folgt:

$$\beta : \alpha = \eta' : \tau$$

mithin:

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{\eta'^2}{\tau^2} = \frac{\eta'^2}{\xi'^2 - \alpha^2}$$

Durch Anwendung dieser Gleichung erhalten wir:

$$A = \frac{\eta'^2}{\xi'^2 - \alpha^2} \cdot \frac{\xi'}{\eta'}$$

$$A = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{\xi'}{\eta'},$$

woraus wir erkennen, dass die Gerade $A_2 = B_2$ die Tangente der Hyperbel H_2 in dem Punkte m_2 ist, und β die Länge der imaginären Halbaxe, d. h. die Geraden M_2, ${}^1M_2$ sind die Asymptoten.

Daraus folgt für die Lösung der Aufgabe a) nachstehende Construction:

Man mache $m_2 m_1$ senkrecht auf $X_{1,2}$ und umschreibe [illegible] der reellen Axe die Kreislinie k_1; construirt man aus dem Punkte m_1 die Tangenten A_1, B_1 zu der Kreislinie k_1 und verbindet die Berührungspunkte t_1, ${}^1t_1$: so wird die Gerade [illegible] der Geraden $t_1 {}^1t_1$ mit $X_{1,2}$ die gesuchte Tangente [illegible] man nun im Mittelpunkte [illegible] ($r_1 s_1$ senkrecht [illegible] und durch den Punkt [illegible] Tangente $\| X_{1,2}$; umschreibt man weiter aus dem Mittelpunkte [illegible] dem Halbmesser [illegible] den Punkt m_2 und zieht endlich [illegible] auf $X_{1,2}$: so sind die die Punkte [illegible] bindenden Geraden die gesuchten Asymptoten [illegible] sind die Durchschnittspunkte [illegible]

b) Es sei die Hyperbel [illegible] durch ihre Tangente [illegible] Asymptoten derselben [illegible] construiren.

Die Lage [illegible] Tangente A_2 [illegible] boloid liegenden Geraden [illegible]



die Kreislinie k_1 in dem Punkte t_1 (B_1 in ${}^1t_1$) *) berührt; stellen wir den Durchschnittspunkt der Geraden A mit der zweiten Projectionsebene dar, so wird der Punkt m_2 der gesuchte Berührungspunkt sein. Bei der Darstellung der Asymptoten ist gerade so wie in der vorhergehenden Aufgabe vorzugehen.

Zusatz. Wenn ξ', η' die Coordinaten des Punkes m_2 wie früher bedeuten, so folgt, wie man aus dem Vorhergehenden leicht sieht:

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{\eta'^2}{\xi'^2 - \alpha^2} \text{ oder } \beta^2\xi'^2 - \alpha^2\eta'^2 = \alpha^2\beta^2,$$

woraus hervorgeht, dass der Punkt m_2 der Hyperbel H_2 angehört.

Daraus folgt für die Lösung der Aufgabe b) nachstehende Construction:

Man umschreibe über der reellen Axe die Kreislinie k_1, führe t_1t_2 senkrecht auf $X_{1,2}$ und construire im Punke t_1 die Tangente A_1, und ausserdem noch im Punkte m_1 (dem Durchschnittspunkte A_1 mit $X_{1,2}$) m_1m_2 senkrecht auf $X_{1,2}$, so ist der Punkt m_2 der gesuchte Berührungspunkt. Wie sich aus Fig. 1. ergiebt, kann man bei der Construction auch die Tangente B_1 anwenden.

c) Es sei die Hyperbel durch die Asymptoten M_2, ${}^1M_2$ und einen Punkte m_2 (Fig. 1.) gegeben. Man soll nun die reelle Axe und nach a) auch die Tangente im gegebenen Punkte construiren.

Die den Winkel (M_2N_2) halbirende Gerade sei die Projectionsaxe (die Projectionsaxe bezeichnet da auch die Lage der reellen Axe); die gegenseitige Lage beider Projectionsebenen sei wie in a). Die gegebenen Asymptoten M_2, ${}^1M_2$ betrachte man für die zweiten Bilder der auf dem Hyperboloid liegenden Geraden M, ${}^1M$ und ebenso den Punkt m_2 für das zweite Bild des Punktes $m (m_2 \equiv m)$.

Stellt man nun den dem Punkte m angehörenden Parallelkreis L dar und leitet aus den zweiten Bildern M_2, ${}^1M_2$ die ersten Bilder $M_1 \equiv {}^1M_1$ ab: so ist $\overline{0_{1,2}r_1}$ (= der Entfernung der Geraden M_1 von der Axe $X_{1,2}$) die Länge der reellen Halbaxe.

Welche Construction geht nun für c) hervor?

---

*) t_2, t_1 sind evident die Bilder der Durchschnittspunkte der Geraden A mit der ersten Projectionsebene.

XXXIV.

Miscellen.

1.

Ueber eine Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Am Schlusse des zweiten Heftes vom 70. Bande des Archivs giebt Herr Sanio eine kurze Notiz über eine combinatorische Entstehung der Zahl e, von der er vermutet, dass sie neu sei. Dieselbe steht indes bereits bei Laplace, Théorie analytique des probabilités. Laplace behandelt dort p. 217 der 3. Auflage (1820) die Aufgabe: Concevons dans une urne, r boules marquées du n⁰ 1, r boules marquées du n⁰ 2, r boules marquées du n⁰ 3, et ainsi de suite jusqu'au n⁰ n. Ces boules étant bien mêlées dans l'urne, on les tire toutes successivement; on demande la probabilité qu'il sortira au moins une de ces boules, au rang indiqué par son numéro, ou qu'il en sortira au moins deux, ou au moins trois, etc. Auf Seite 223 findet er einen Ausdruck, der für ein sehr grosses n sich auf $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ reducirt, und über den er schreibt: C'est donc l'expression fort approchée de la probabilité qu'aucune des boules de l'urne ne sortira à son rang, lorsqu'il y a un grand nombre de boules ... Elle devient $\frac{1}{c}$, lorsque n est infini, c étant toujours le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité.

Setzt man aber $r = 1$ und $\Phi(n)$ gleich der Anzahl solcher Permutationen der Elemente $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, bei denen kein Element auf dem Platze steht, den sein Index angiebt, so ist die Wahrscheinlichkeit w dafür, dass keine gezogene Kugel diejenige Nummer trägt, welche mit der Zahl des Zuges übereinstimmt, bei dem sie herauskommt:

$$w = \frac{\Phi(n)}{n!}.$$

Das Resultat von Laplace kann demnach geschrieben werden

$$\lim \frac{\Phi(n)}{n!} = \frac{1}{e} \qquad (\text{für } n = \infty),$$

und dies ist die durch Herrn Sanio mitgeteilte Formel.

Die besondere Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, bei der $r = 1$ ist, wurde von Dirichlet und später von Kummer (z. B. zur Aufnahme in das mathematische Seminar zu Berlin 1862) ihren Schülern in folgender Gestalt gestellt:

Gegeben sind n Elemente auf n Plätzen; wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer willkürlichen neuen Verteilung der n Elemente auf dieselben n Plätze kein Element seinen Platz wieder erhalte?

Und für $n = \infty$: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn einmal der διάβολος alles durcheinander wirft, kein Ding in der Welt auf seinem Platze bleibe?

Die aus einer solchen Veranlassung entstandene Lösung möge hier mitgeteilt werden, besonders weil die angewandten Schlüsse nicht aus dem Gebiete der Combinatorik heraustreten, soweit es auf Schulen gelehrt wird.

Zur Bestimmung der Zahl $\Phi(n)$ führe man noch eine Zahl $F(n)$ ein, nämlich die Anzahl derjenigen Permutationen der n Elemente $\alpha, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$, bei denen keins der Elemente a_i auf dem Platze i seines Index steht, während das Element α alle Plätze (also auch den ersten) einnehmen darf.

Die erste Stelle unter den $\Phi(n)$ Permutationen muss irgend eins der $n-1$ Elemente $a_2, a_3, \ldots a_n$ inne haben, z. B. a_2. Um alle mit a_2 beginnenden Permutationen zu finden, hat man die $n-1$ Elemente $a_1, a_3, a_4, \ldots a_n$ über die Plätze 2, 3, 4, ... n so zu permutiren, dass kein Element auf einen Platz kommt, dessen Zahl mit seinem Index übereinstimmt. Die Anzahl dieser Permutationen ist $F(n-1)$, und da jedes der Elemente $a_2, a_3, \ldots a_n$ die erste Stelle erhalten darf, so ist

$$\Phi(n) = (n-1)\,F(n-1). \tag{1}$$

Zur Aufstellung einer zweiten Gleichung zwischen den Zahlen $\Phi(n)$ und $F(n)$ bilde man die Permutationen $F(n)$. Zuerst lasse man hierbei das indexlose Element α an seiner ersten Stelle, permutire

dagegen die $n-1$ Elemente $a_2, a_3, \ldots a_n$ nach der Forderung der Nichtübereinstimmung der Indices mit den Stellenzahlen; dies giebt $\Phi(n-1)$ Permutationen. Danach lasse man jedes der $n-1$ Elemente a_i in die erste Stelle einrücken. Steht nun z. B. a_2 auf dem ersten Platze, so gewinnt man die Anzahl aller mit der Stellenzahl in den Indices nicht übereinstimmenden Permutationen von $\alpha, a_3, a_4, \ldots a_n$ durch die Zahl $F(n-1)$. Im ganzen giebt es diese Zahl $(n-1)$ mal, zusammen mit den zuerst gebildeten $\Phi(n-1)$ also:

$$F(n) = \Phi(n-1) + (n-1)F(n-1). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) werde $F(n)$ und $F(n-1)$ eliminirt. Man findet zunächst

$$F(n) = \Phi(n-1) + \Phi(n),$$

oder wenn man n durch $n-1$ ersetzt:

$$F(n-1) = \Phi(n-2) + \Phi(n-1),$$

endlich nach Multiplication dieser Gleichung mit $n-1$:

$$\Phi(n) = (n-1)\{\Phi(n-1) + \Phi(n-2)\},$$

oder auch

$$\Phi(n) - n\Phi(n-1) = -\{\Phi(n-1) - (n-1)\Phi(n-2)\}. \tag{3}$$

Diese Gleichung zeigt, dass — abgesehen vom Vorzeichen — der Zahlwert der Differenz linker Hand von n unabhängig ist. Zur Bestimmung des constanten Wertes derselben setze man n gleich 2, so findet man, da offenbar $\Phi(1) = 0$, $\Phi(2) = 1$ ist, $\Phi(2) - 2\Phi(1) = 1$. Somit folgen aus (3) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Phi(2) - 2\Phi(1) &= 1, \\ \Phi(3) - 3\Phi(2) &= -1, \\ \Phi(4) - 4\Phi(3) &= 1, \\ \cdots & \cdots \\ \Phi(n) - n\Phi(n-1) &= (-1)^n. \end{aligned}$$

Man multiplicire diese Gleichungen der Reihe nach bzhw. mit

$$3.4.5.6 \ldots n, \quad 4.5.6 \ldots n, \quad 5.6 \ldots n, \quad \ldots 1,$$

und addire die so gebildeten neuen Gleichungen, so erhält man mit Rücksicht auf $\Phi(1) = 0$:

$$\Phi(n) = 3.4.5.6 \ldots n - 4.5.6 \ldots n + 5.6 \ldots n + \ldots + (-1)^{n-1} n + (-1)^n,$$

oder

$$\Phi(n) = n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right). \tag{4}$$

Dies ist die gesuchte Anzahl. Für $n = 4$ giebt sie z. B. die von Herrn Sanio angegebene Zahl 9. Damit ist aber auch die gesuchte Wahrscheinlichkeit gefunden, nämlich:

$$w = \frac{\Phi(n)}{n!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!}. \qquad (5)$$

Für $n = \infty$ geht dieselbe in den Wert e^{-1} über.

Während im Vorangehenden die Zahl $\Phi(n)$ mit Hülfe einer Differenzen-Gleichung bestimmt worden ist, hat Laplace a. a. O. die seiner allgemeineren Aufgabe entsprechende Zahl durch directe Abzählung derjenigen Fälle ermittelt, bei denen unter n Ziehungen mindestens eine Kugel bei der mit ihrer Nummer übereinstimmenden Ziehung herauskommt. Die Wahrscheinlichkeit w dafür, dass keine Kugel ihrer Nummer entsprechend gezogen wird, findet er dann natürlich, indem er die für jenen Fall berechnete Wahrscheinlichkeit von eins abzieht; er giebt sie zunächst in der Form:

$$w = \frac{(rn)! - \binom{n}{1} . r . (rn-1)! + \binom{n}{2} . r^2 . (rn-2)! - \dots}{(rn)!},$$

ein Wert, der für $r = 1$ mit dem oben gefundenen übereinstimmt. Zur weiteren Vereinfachung ersetzt Laplace unter Voraussetzung eines grossen n die Facultäten durch bestimmte Integrale, für die er Näherungswerte angiebt; hierdurch gelangt er zu dem vereinfachten Ausdrucke derselben Wahrscheinlichkeit:

$$w = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{2}{rn} - \frac{1}{rn^2}}},$$

der für ein sehr grosses n in $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ oder $\frac{1}{e}$ übergeht, eine Bemerkung, die er in den oben citirten Worten macht.

Zum Schlusse möge noch eine allgemeinere Formel hergesetzt werden, von der die für $\Phi(n)$ entwickelte ein besonderer Fall ist. — Gegeben sind die $m + n$ Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m, a_1, a_2, \dots a_n$. Unter allen Permutationen dieser $m + n$ Elemente die Anzahl $\Phi(m, n)$ derjenigen Permutationen zu finden, bei denen keins der Elemente $a_1, a_2, \dots a_n$ seinen ursprünglichen Platz einnimmt, während die Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ auf alle Plätze gesetzt werden dürfen. Bezeichnet $\binom{n}{k}$ den $k$ten Binomial-Coefficienten der $n$ten Potenz, so findet man:

$$\Phi(m, n) = m!\,n!\left\{\binom{m+n-1}{n-1} + \frac{1}{2!}\binom{m+n-2}{n-2} - \frac{1}{3!}\binom{m+n-3}{n-3}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4!}\binom{m+n-4}{n-4} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\binom{m+1}{1} + \frac{(-1)^n}{n!}\right\}.$$

Mit Hülfe der so definirten Zahlen lässt sich auch die Anzahl der Permutationen von den $m+n$ Elementen $a a a \ldots a b_1 b_2 \ldots b_n$ bestimmen, wo a im ganzen m mal wiederholt ist, so dass kein Element seinen ursprünglichen Platz wieder erhält; diese Zahl ist

$$\binom{n}{m}\Phi(m, n-m).$$

Prof. Dr. Lampe.

2.

Zwei Sätze über Linienschnitte.

Lehrsatz I. Sind auf einer Fläche mehrere in sich selbst zurückkehrende Linienzüge, die sich gegenseitig sowie sich selbst mehrmals schneiden, vorgegeben, findet ferner nirgends eine gleichzeitige Durchkreuzung von mehr als 2 Zügen statt, so zeigt die Figur bei der Abzählung immer eine gerade Anzahl von „Abschnitten" — wenn unter Abschnitt ein von einem Schnittpunkte bis zu einem benachbarten reichendes Linienstück verstanden wird.

Erster Beweis. Von jedem Schnittpunkte aus gehen 4 solcher Abschnitte, — die so erhaltene Anzahl, $4n$, wenn n die Anzahl der Schnittpunkte, ist aber auf die Hälfte zu reduciren, da jeder Abschnitt bei dieser Abzählung 2 mal gezählt wird.

Zweiter Beweis. Man kann jeden Knoten in der folgenden Weise auflösen:)(oder $\asymp$ aus $\times$. Dabei entstehen neue, zusammenhängende Linienzüge (der Umstand, dass sich sämmtliche vorgegebene Linienzüge auf diese Weise auch sofort in einen einzigen vereinigen liessen, sei erwähnt, er ist für unsern Beweis nicht wesentlich). Lässt man dann aus der so erhaltenen Figur durch Wiederherstellung der Knotenstellen die ursprünglich vorgegebene wieder entstehen, so treten bei jeder Wiederherstellung eines Knotens 2 neue „Abschnitte" hinzu, — nach Verknüpfung der n Knotenstellen ist also auch die Zahl $2n$ der Abschnitte erreicht.

Lehrsatz II. Ist auf einer Fläche ein begrenztes Gebiet gegeben, welches von Linien durchzogen ist, die niemals innerhalb des Gebiets einen Endpunkt haben (die also entweder von einem Teile des Randes zu einer andern Stelle hinführen oder in sich selbst zurückkehren), findet ferner nirgends ein gemeinschaftlicher Durchschnitt von mehr als 2 Linienzügen statt, so gilt der Satz:

Schraffirt man, von irgend einem Gebietselement A ausgehend, immer ein durch Scheitelwinkel damit zusammenhängendes benachbartes Gebietselement und erreicht man, auf diese Weise weitergehend, ein entferntes Element B, so wird bei andrer Auswahl der beim Vorwärtsgehen benutzten Elemente, jenes Element B bei der Ankunft auf dem neuen Wege wiederum als durch die fortgesetzte Schraffirung mit A verbunden sich herausstellen.

Dabei ist unter Gebietselement das Innere eines geschlossenen Linienzuges verstanden, wenn es keine Teile von Linienzügen enthält *).

Erster Beweis. Man löse, wie oben, sämmtliche Schnittstellen auf und führe hierauf von A nach B einen Linienzug in der Nähe der vorher zur Fortsetzung der Schraffirung benutzten Knotenpunkte vorbei. Nun ist ersichtlich, dass die auf beiden von A nach B führenden Wegen eintretenden Schnittpunkte gleichzeitig in gerader oder ungerader Anzahl auftreten, denn wäre etwa der zweite Weg in ein vom ersten nicht berührtes Gebiet eingetreten, so stellt sich durch seinen Austritt der richtige Charakter der Schnittpunktsanzahl wieder ein, — die Linien, die eine Stelle des Randes mit einer andern verbinden, lassen eine analoge Schlussfolgerung zu.

Hierauf ersetze man die aufgelösten Knotenpunkte durch die früheren Durchschnitte.

Nach je zwei Schnittpunkten treten die den Wegen folgenden Linienzüge immer wieder in ein schraffirtes Gebiet ein. Da B sich auf dem ersten Wege als schraffirt herausstellt, so zeigt der dem ersten Schraffirungswege folgende Linienzug eine gerade Anzahl von Schnittpunkten; da aber nach dem Obigen auch der den zweiten Weg verfolgende Linienzug eine gerade Anzahl Schnittpunkte zeigt, so stellt sich auch auf dem zweiten Wege B als schraffirt heraus.

Für den Fall, dass die die Figur bestimmenden Linienzüge sich nicht selbst schneiden, kann dieser Beweis durch Weglassung der Auflösung und Wiederherstellung der Knotenpunkte bedeutend ver-

*) Vergl. Listing, Vorstudien zur Topologie, pag. 64.

einfacht werden. Ohne diese specielle Voraussetzung ist aber jener Umweg immer nötig: es ist wohl klar, dass zwei geschlossene Linienzüge sich in einer geraden Anzahl von Punkten schneiden, wenn sie sich selbst nicht schneiden (der eine dieser Züge wäre für unsern Fall der Verein der Wege AB), — dass die Anzahl ihrer gegenseitigen Schnittpunkte auch noch gerade ist für den Fall, dass die Linien sich selbst schneiden, müsste erst eigens wieder bewiesen werden.

Zweiter Beweis. Nach Auflösung der Knotenpunkte erhielt man eine Anzahl grösserer Gebiete, die sich gegenseitig ausschliessen, einschliessen, auch einen Teil des Figurrandes zu ihrem Umfange benutzen können. Nun ordne man in Bezug auf jedes Gebiet dem ausserhalb oder innerhalb desselben liegenden Teile der ganzen Figur das Zeichen $+1$ oder -1 zu, — dem andern Teile das resp. entgegengesetzte.

Jede Stelle der Figur erhält dann einen durch das Product der für sie massgebenden Zeichen bestimmten Charakter $+$ oder $-$, was man durch Schraffirung des behandelten Gebietes andeuten mag. Hierbei kann kein Widerspruch eintreten, da für jedes Gebiet der Charakter nur auf einem Wege, durch die Beziehung auf sämmtliche andere Gebiete erhalten wird. Was aber wesentlich ist: Stellen, welche ursprünglich (bei Ausführung der ersten Schraffirung) als durch Scheitelwinkel zusammenhängend einander als gleichartig zugewiesen waren, sind es auch jetzt, da sie entweder bei der Ausführung der zweiten Schraffirung von selbst mit einander verbunden erscheinen, oder eine zweimalige Ueberschreitung von Linienzügen nötig ist, um von der einen zur andern zu gelangen.

Schliesst man also die Knotenpunkte wieder, so stellt sich damit die vorgegebene Figur, aber nun schon versehen mit einer alle Elemente berücksichtigenden Schraffirung, wieder ein.

Damit ist erwiesen: *Führt man gleich von Anfang die Schraffirung für die ganze Figur durch, immer über Scheitelwinkel weitergehend, so wird* allen *Gebietselementen* eindeutig *ein Charakter* zugewiesen; — von [illegible] gegebene nur als [illegible]

Auch dieser Beweis kann [illegible] Schnittstellen [illegible] dass die [illegible] oder wenn [illegible]

Ist eine Figur [illegible] geschlossenen [illegible]

vollständig, mit einmaliger Berührung jeder Stelle, umfahren werden auf geschlossenen, sich selbst nicht schneidenden Linienzügen.

Ohne diese Voraussetzungen brauchte nämlich noch das im Beweise vorkommende „ausserhalb oder innerhalb liegen" weitläufige Präcisirung.

München, September 1881.

Fritz Hofmann.

3.

Beitrag zur Geometrie der Lage.

Sind $ABC\ldots$, $A_1B_1C_1\ldots$ zwei projectivische Punktreihen mit demselben Träger, so kann man unendlich viele Punktreihen $A_2B_2C_2\ldots$ finden, welche mit $ABC\ldots$ und $A_1B_1C_1\ldots$ involutorisch liegen.

Wir nehmen an, dass die gegebenen Punktreihen auf einem Kegelschnitt liegen, auf welchem wir A_2 Punkt beliebig wählen. Sind b, b', ... beliebige Punkte desselben Kegelschnittes, dann schneiden Bb, Bb', ... Geraden die AA_2 Gerade in u, u', ... Punkten, Cu, Cu', ... den Kegelschnitt in c, c', ...; ebenso B_1b, B_1b', ... Geraden A_1A_2 in v, v', ... Punkten und Cv, Cv', ... den Kegelschnitt in c_1, c_1', ... Punkten. Die Punktreihen $cc'\ldots$, $c_1c_1'\ldots$ sind, wie leicht ersichtlich, projectivisch, A_2 ist einer ihrer Doppelpunkte, der andere Doppelpunkt ist C_2, dass aber die Verbindungsgerade von B mit dem Schnittpunkte U von AA_2, CC_2 den Kegelschnitt in demselben B_2 Punkte trifft, wo die Verbindungsgerade des B_1 mit dem Schnittpunkte V der Geraden A_1A_2, C_1C_2, ist ebenfalls von der obigen Construction ersichtlich.

Die Pascal'schen Linien der einfachen Sechsecke $AA_2A_1BB_2B_1$, $AA_2A_1CC_2C_1$, $AB_1CA_1BC_1$ fallen zusammen, indem die der zwei ersten Sechsecke die UV Gerade ist und die Punkte (A_1B, AB_1), (A_1C, AC_1) nthält, während die des dritten Sechsecks durch die zwei letzteren Punkte geht. Daraus folgt, dass die UV Punkte bei Veränderung des A_2 Punktes eine Gerade beschreiben; dass alle diese involutorischen Punktreihen, welche bei demselben A_2 oder durch Veränderung des A_2 Punktes entstehen, dasselbe reelle oder imaginäre Punktpaar gemeinsam haben, endlich dass dieses gemeinsame Punktpaar der Involutionen mit den Doppelpunkten der $ABC\ldots$, $A_1B_1C_1\ldots$ projectivischen Reihen zusammenfällt.

Sind daher die Doppelpunkte MN der auf derselben Geraden liegenden Punktreihen $ABC\ldots$, $A_1B_1C_1\ldots$ bekannt, so nehme man, um eine Punktreihe $A_2B_2C_2\ldots$ zu construiren, welche mit den ersteren involutorisch liegt, A_2 beliebig an, suche in der durch $AA_2.MN\ldots$ bestimmten Involution die den B, $C\ldots$ entsprechenden Elemente B_2, $C_2\ldots$; $A_2B_2C_2\ldots$ liegt dann auch mit $A_1B_1C_1\ldots$ involutorisch. Bei nicht reellen Doppelpunkten findet man die gewünschte Reihe mittelst eines Kegelschnittes. — Wenn $ABC\ldots$, $A_1B_1C_1\ldots$ projectivische Punktreihen reelle Doppelpunkte haben, wird es zweimal geschehen, dass die zu beiden involutorische Punktreihe $A_2B_2C_2\ldots$ in einen Punkt fällt, nämlich wenn man A_2 in einem der Doppelpunkte annimmt. — Im Falle die gegebenen Punktreihen auf einem Kegelschnitt sind und involutorisch liegen, d. h. die AA_1, BB_1, CC_1 Geraden sich im Punkte W schneiden, ist das Dreieck UVW ein Polardreieck bezüglich des Kegelschnitts. Wenn daher drei Punktreihen paarweise involutorisch liegen, werden nur zwei von den involutorischen Reihen reelle Doppelpunkte haben.

Die bis jetzt behandelte Aufgabe hat sich als unbestimmt erwiesen, es lässt sich daher die Frage stellen: Es sind drei projectivische Punktreihen $ABC\ldots$, $A_1B_1C_1\ldots$, $A_2B_2C_2\ldots$ auf einem Kegelschnitt gegeben, wie construirt man eine vierte, welche mit den gegebenen involutorisch liegt.

Man construirt die Pascal'schen Linien p_2, p_1 der einfachen Sechsecke $AB_1CA_1BC_1$, $AB_2CA_2BC_2$, welche sich im U Punkte treffen, die Geraden UA, UB, UC, ... schneiden den Kegelschnitt in der gewünschten Punktreihe $A_3B_3C_3\ldots$ Da nämlich AA_3, BB_3, ... sich im U Punkte der Geraden p_2 schneiden, so gehen nach dem Früheren die Geraden A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3, ... durch einen W Punkt der p_2 Geraden, und A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3, ... durch einen V Punkt der p_1 Geraden; $A_3B_3C_3\ldots$ liegt daher mit den drei gegebenen Punktreihen involutorisch. — Es ist noch zu bemerken, dass die Pascal'sche Linie des einfachen Sechsecks $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$, da die construirte Punktreihe mit den zwei letzteren der gegebenen Punktreihen involutorisch liegt, durch V, W geht, daher die Aufgabe im Allgemeinen nur eine Lösung zulässt.

Specielle Fälle: a) Wenn die Doppelpunkte der Punktreihen $ABC\ldots$, $A_1B_1C_1\ldots$ und $ABC\ldots$, $A_2B_2C_2\ldots$, daher auch die der Punktreihen $A_1B_1C_1\ldots$, $A_2B_2C_2\ldots$ ein gemeinsames Punktpaar bilden, so ist die Aufgabe unbestimmt, indem jede Punktreihe, welche mit zwei der gegebenen involutorisch liegt, auch mit der dritten derart liegen wird. b) Wenn die gegebenen Punktreihen einen gemeinsamen Doppelpunkt haben, dann fallen alle Elemente der ge-

wünschten Punktreihe in diesen Doppelpunkt. c) Sind von den gegebenen Punktreihen je zwei involutorisch liegend, so hat die Aufgabe auch eine Lösung. Wir werden in diesem Falle vier Punktreihen haben, von welchen je zwei involutorisch liegen. Sind diese vier Punktreihen auf einem Kegelschnitt, dann bilden beliebige vier einander entsprechende Punkte ein Viereck, dessen Diagonaldreieck ein und dasselbe dem Kegelschnitt zugeordnete Polardreieck ist.

Pressburg, Ende September 1883.

Dr. Leop. Klug.

Schemata zu Nr. XXXI.

I	1	7		1	3	7	9		3	9
0			1					2		
3			4					5		
6			7					8		
9			10					11		
12			13					14		
15			16					17		
18			19					20		

II	00	03	06		01	04	07		02	05	08
01				01				03			
07				03				09			
11				07				11			
13				09				17			
17				13				21			
19				19				23			
23				21				27			
29				27				29			
:				:				:			
97				99				99			

Litterarischer Bericht
CCLXXVII.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Grundzüge der Ausgleichungsrechnung. Elementar entwickelt von Dr. Ch. August Vogler, a. o. Professor an der Universität Bonn, o. Lehrer der Geodäsie an der landwirtschaftlichen Akademie Poppelsdorf. Braunschweig 1883. Friedrich Vieweg u. Sohn. 218 S.

Dem Titel ist nur noch hinzuzufügen, dass das Buch für die gewöhnliche Landmessung bearbeitet ist und auf die Anwendung zu diesem Zwecke besonders reichlich eingeht. Bei dieser Bestimmung war offenbar kein Grund bei der Herleitung höhere Rechnung zuzuziehen, vielmehr eine ausschliesslich elementare Behandlung angemessen und wünschenswert. Auf letztere legt der Verfasser Gewicht mit der Behauptung, dass eine solche bis dahin noch nie exact und lückenlos geliefert worden sei, für welche wir ihm die Verantwortung überlassen können. Die Hauptabschnitte des Buchs sind: I. Vermittelnde Beobachtungen gleicher Genauigkeit. II. Mittlerer Fehler von Beobachtungen und Functionen derselben. III. Vermittelnde Beobachtungen ungleicher Genauigkeit IV. Bedingte Beobachtungen. H.

Ueber reciproke Gleichungen. Von B. Adam, Gymnasiallehrer. Separatabdruck der Abhandlung zum Programm des Königlichen Gymnasiums zu Clausthal. 1883. Clausthal 1883. 4⁰. 21 S.

Der Aufsatz ist eine Zusammenstellung bekannter Eigenschaften der reciproken Gleichungen mit einer Unbekannten. Jedes Thema

wird aufsteigend von den niedrigsten bis zu irgend welchen höhern Graden behandelt, manchmal auch das Allgemeine daraus abstrahirt, doch scheint dies nicht durchgängig im Plane zu liegen. Die Darstellung ist weder ein Muster von correctem Ausdruck und Klarheit noch von guter Ordnung zu nennen. So wird z. B. von einer Substitution $x = \frac{1}{x}$ gesprochen (statt $\frac{1}{x}$ für x), Gegenstände citirter Journalartikel als „bekannt" nicht weiter ausgeführt, (als ob das hier ausgeführte neu wäre), wiederholt auf spätere Ausführung verwiesen, wo man dann günstigen Falls das Fehlende mit Suchen herausfindet. Den Schluss bilden 50 Aufgaben mit Lösungen.

Neue Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen. Dritte Fortsetzung (Schluss). Von Simon Spitzer. Wien 1883. Carl Gerold's Sohn. 78 S.

Die erste Fortsetzung ist im 262sten litt. Bericht p. 21, die zweite im 270sten p. 14 besprochen. Der erste Gegenstand der dritten ist die Bemerkung, dass der integrirende Factor z der Gleichung

$$y''' + X_2 y'' + X_1 y' + X_0 y + 0$$

durch die Gleichung

$$z''' - (X_2 z)'' + (X_1 z)' - X_0 z = 0$$

bestimmt wird und mit y in der Relation steht

$$y = Z(\varphi x)^2 e^{-\int X_2 \partial x}$$

wo $z = \varphi(x)$ ein particuläres Integral ist, und demgemäss durch

$$z = \varphi(x) \int Z \partial x$$

die Ordnungszahl um 1 vermindert werden kann. Im übrigen werden mannichfaltige, selbst gewählte Fragen über verschiedene Differentialgleichungen untersucht. Am Schluss constatirt der Verfasser das Zusammentreffen unabhängiger Arbeiten von Halphén aus neuer Zeit mit seinen eignen, über 20 Jahr alten in zwei Punkten, zuerst in einer auf verschiedenem Wege speciell resultirenden Differentialformel, Bull. de la Soc. Math. de France VIII. 62 dann in der Integration einer Gleichung, Compt. Rend. XCII. 781.

Geometrie.

Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde. Von Dr. Victor Schlegel, Oberlehrer am Gymnasium zu Waren, Mitglied der Société mathématique de France. Mit 9 Tafeln. Halle 1883. Wilh. Engelmann (in Leipzig). Aus Nova Acta der Ksl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher Bd. XLIV. p. 341—359.

Der Gegenstand der Betrachtung sind Systeme an einander grenzender Figuren von beliebiger Dimensionszahl. Sie heissen homogen zusammengesetzte Figuren, wenn die Teilfiguren, aus denen sie bestehen, gleichviele Grenzgebilde haben, und die Grenzgebilde zu gleichvielen Teilfiguren gehören. Es sind also die $(n-1)$ dehnigen Netze, in welchen die zusammenhangende Grenze einer regelmässigen $n$dehnung, mit Absehen von der Grösse, bloss gemäss der Anordnung der Teile, abgebildet wird, jedoch mit Wegfall der Bedingungen, welche die Realität dieser regelmässigen $n$dehnung beschränken. Ist die $n$dehnung, deren Grenze sich durch ein solches Netz auf der $(n-1)$ dehnung abbildet, reell, so ist die homogen zusammengesetzte Figur geschlossen und lässt sich nicht nach gleichem Gesetze erweitern, die Anzahl der Teilfiguren ist bestimmt und wird hier stets um 1 kleiner angesetzt als die, welche zur Umschliessung der $n$dehnurg erfordert wird, weil der Verfasser die das System umschliessende Figur, welche die unendliche $(n-1)$dehnung von innen begrenzt, nicht mitzählt. Ist jene $n$dehnung imaginär, so lässt sich das Netz ins unendliche fortsetzen, indem jedoch die entferntern Teile sich mehr und mehr zusammendrängen. Zwischen beiden Fällen ist der Grenzfall der einer unendlichen $n$dehnung, wo das Netz gleichfalls eine Erweiterung ins unendliche, aber eine gleichmässige, zulässt, so dass die Teile regelmässig und congruent sein können. Die genannten Umstände treten schon bei Abbildung der Oberfläche eines Polyeders auf der Ebene sichtlich hervor; es ist daher mit Gewinn für Einfachheit der Rede und Vorstellung die homogen zusammengesetzte Figur in der Ebene zum Ausgangspunkt der Betrachtung und Erklärung gewählt worden. In der Ebene scheiden sich die 3 Fälle gemäss der Formel:

$$\varDelta = 2(n+p) - np \gtreqless 0$$

wo n die Seitenzahl der Polygone, p die Anzahl der um jeden Punkt liegenden Polygone bezeichnet. Für $\varDelta > 0$ erhält man bekanntlich 5 Lösungen, für $\varDelta = 0$ gibt es 3, nämlich

$$n = 6; \qquad p = 3$$
$$n = 4; \qquad p = 4$$
$$n = 3; \qquad p = 6$$

Diese werden einzeln besprochen und sind abgebildet, von $\Delta < 0$ ist die Combination $n = 3$; $p = 7$ als Beispiel abgebildet. Von jenem einfachsten Falle schreitet die Abhandlung fort zu dem System ebener Polygone, deren Ebenen Winkel bilden, also zu den polyedrischen Figuren, dann zu den Polygonsystemen auf krummen Flächen, begrenzt durch kürzeste Linien, mit Unterscheidung positiver, negativer und Nullkrümmung und mit Anwendung auf die Principien des Messens; im 2. Abschnitt zu den aus Polyedern homogen zusammengesetzten Figuren, wo die analogen Fragen im Raume, wie vorher in der Ebene behandelt werden. H.

Ueber harmonische und involutorische Beziehungen, ihre Anwendung auf die Einteilung der Curven zweiten Grades und ihr Vorkommen bei solchen Curven im Falle besonderer Form und Lage. Von Professor C. Hellwig, Oberlehrer am Realgymnasium zu Erfurt. Erfurt 1883. Carl Villaret. 4°. 29 S.

Voraus geht die Erklärung der harmonischen und involutorischen Beziehung mit Herleitung und Aufstellung in der Formel. Es werden 2 Arten Involutionen unterschieden, jenachdem die Punktepare reell oder zum Teil imaginär sind. Dann werden einige Sätze über Kreise und Strecken entwickelt, z. B. Drei durch dieselben beiden Punkte gehende Kreise treffen ihre Centrale in 6 Punkten einer Involution der 2. Art. Der nächste Abschnitt handelt von den harmonischen Punkten bei Curven 2. Grades, von Polare und Tangente und von der Einteilung dieser Curven. Es werden harmonische Pole der Curven erklärt und von dem Satze ausgegangen: Liegen auf einer Secante einer Curve 2. Grades 2 Punkte, welche mit den der Secante angehörenden Curvenpunkten ein harmonisches System bilden, so schreitet bei einer Drehung der Secante um einen jener Punkte der andre, ihm zugeordnete harmonische auf einer geraden Linie fort — dann die elementaren Eigenschaften der Kegelschnitte entwickelt. Der letzte Abschnitt handelt von harmonischen und involutorischen Eigenschaften ähnlicher Curven 2. Grades mit gemeinschaftlicher Axe und Chordale. H.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie für Oberrealschulen. Von Josef Menger, k. k. Professor an der Staats-Oberrealschule in Graz. Mit 228 Original-Holzschnitten. Wien 1882. Alfred Hölder. 337 S.

Das den österreichischen Instructionen von 1880 gemäss bearbeitete Lehrbuch ist in 9 Abschnitte geteilt, deren erster die Elemente der neuern synthetischen Geometrie als Vorbereitung enthält. Die 3 folgenden behandeln die orthogonale Projectionslehre, die Projection auf eine, dann auf 2 Ebenen, dann die Transformation, anschlisesend die Schattenconstructionen, der 5te die Darstellung der Polyeder, der 6te die der Curven nebst Evolventen und Evoluten u. s. w., wobei auch die schiefe Projection des Kreises, der 7te die der krummen Flächen, der 8te deren Durchdringung, der 9te gibt eine kurze Theorie der centralen Projection und Perspective. Eine kleine Anzahl von Uebungsaufgaben folgen auf jeden Abschnitt. Es ist darauf gerechnet, dass beim Unterricht grossenteils Modelle in Anwendung kommen. H.

Leitfaden der analytischen Geometrie für die erste Classe der Realgymnasien und Ober-Realschulen. Von Prof. Dr. Dornheim, Prorector am Gymnasium und Realgymnasium zu Minden. Minden i. Westf. 1883. J. C. C. Bruns. 28 S.

Der Titel ist weit entfernt dem Inhalte zu entsprechen. Letzterer ist vielmehr eine synthetisch bearbeitete Lehre von den Coordinaten in der Ebene mit einiger Anwendung auf Gerade, Kreise und Kegelschnitte. Dieser, sei es aus Bequemlichkeit oder Tendenz, auf Schulen getriebene Misbrauch des Namens ist nicht ohne spätere Folgen für die Schüler: manchem Studirenden bleibt wegen des dadurch genährten Irrtums die Existenz der analytischen Geometrie ganz unbekannt. Das Verfahren in der vorliegenden Bearbeitung hat die anerkennenswerte Eigentümlichkeit, dass nur das Notwendige aus der Theorie vorgetragen, die weitere Ausführung durch reichlich angeführte Aufgaben der Selbsttätigkeit der Schüler überlassen wird. Die Coordinatenlehre ist wol verständlich; doch findet sich mancher incorrecte Ausdruck. Z. B. „Die Coordinaten unendlich vieler Punkte genügen im allgemeinen einer gegebenen Gleichung zwischen x und y.“ Nicht durch das beigefügte Citat, sondern nur durch Umkehrung des Satzes ergiebt sich ein Sinn, nämlich: „Einer gegebenen Gleichung zwischen x und y genügen im allgemeinen die Coord. unendlich vieler Punkte“. Letzteres ist hinsichtlich der Allgemeinheit das Gegenteil des Erstern. Die Gleichung der Geraden stellt diese als halbirende Senkrechte der Verbindung zweier Punkte dar. Die Lehre vom Kreise geht auf Pol und Polare ein. Die Kegelschnitte werden durch Brennpunkt und Directrix bestimmt. Conjugirte Durchmesser bilden die weitern Gegenstände, dann die Discussion der allgemeinen Gleichung 2. Grades. Dann folgt die Bestimm[illegible]ten, der Maxima

und Minima, der Sache, nicht dem Namen nach, durch Differentialrechnung. Ebenso wird schliesslich die Quadratur, ohne von Integralen zu sprechen, durch Darstellung des Integrals als Grenzwert einer Summe, für den Fall, wo y Potenz von x ist, vollzogen.

H.

Kinematik des Strahles. Eine Darstellung der Bewegung des Strahles in der Ebene nach mechanischen Principien. Von D. Ing. Ferdinand Wittenbauer, Docent an der k. k. technischen Hochschule in Graz. Mit 74 Holzschnitten. Graz 1883. Leuschner u. Lubensky. 105 S.

Die Kinematik des Strahles, d. i. der Geraden, wird der Kinematik des Punktes dual an die Seite gestellt. Als Coordinaten dienen der Normalabstand r des Strahles von einem Anfangspunkt, Pol, und seine Neigung φ gegen eine durch ihn gehende Axe. Sie werden mit den sogenannten Liniencoordinaten in Relation gebracht. Die principiell eingeführte Erzeugungsweise der Curven ist die als Enveloppen von Strahlen; doch zeigt sich schon hier, dass eine solche ausschliessliche Betrachtungsweise nicht durchführbar ist; denn es kommen auch Oerter von Punkten in Betracht. Als Beispiele sind die Kegelschnitte behandelt. Bemerkenswerte Beziehungen sind, dass $\frac{\partial r}{\partial \varphi}$ den Abstand des Berührungspunkts vom Fusspunkt der Normale r, ferner $r+\frac{\partial^2 r}{\partial \varphi^2}$ den Krümmungsradius im Berührungspunkte darstellt. Hieraus wird die Evolute, dann die Evolventen bestimmt, die Bedingung der Spitzen und Wendepunkte aufgestellt. Es folgt eine Anwendung auf Cykloiden und Kreisevolventen. Der 2. Abschnitt handelt von der Bewegung des Strahls. Hierzu wird der Drehpunkt und der Drehungswinkel als Ausdruck gebraucht. Aus zwei Bewegungen resultirt eine neue. Der 3. Abschnitt handelt von der Beschleunigung, die ihren analogen Ausdruck hat. Der Abstand des Drehpunkts vom Beschleunigungspunkt und der Ort des letztern haben ihre Bedeutung in der Theorie. Der 4. Abschnitt behandelt Probleme der Bewegung des Strahles im Strahlenbüschel, allgemeine oder krummlinige Bewegung, dann besondere; aus der Bewegung des Strahls auf vorgeschriebener Bahn geht ein Widerstand der Bahn hervor. Der 5. Abschnitt handelt von der Beschleunigungscurve und der Differenzcurve. Letztere ist der Ort des Endpunkts eines Strahls von einem festen Punkte aus in der Länge des oben genannten Beschleunigungsabstands gezogen. Der 6. Abschnitt handelt von der Bewegung des Strahlensystems, der 7te von der relativen Bewegung.

H.

Technik.

Transporteur und Massstab zum Gebrauch beim Unterricht in der Planimetrie und Trigonometrie. (Von Mauritius). 4te, verbesserte Auflage. Coburg (1882). J. G. Riemann.

Was die Buchhandlung liefert, sind folgende 4 Stücke: 1) Ein Rechteck. 224 × 120 Millimeter von gelbem Carton; auf der einen Seite ein Halbkreis von 100 mm Radius, in 180 Grade geteilt, der Grenzdurchmesser fällt in den Rand; an den 3 übrigen Rändern die Verlängerungen der Radien aller Grade; zu beiden Seiten des Halbkreises verticale Tangenten, welche die goniometrischen Tangenten der Winkel bis 45 Grad angegeben; auf der andern Seite unter der Bezeichnung „Transversal-Massstab" ein Rechteck 20 × 10 cm, vertical geteilt durch Parallelen in Centimeter Abstand, nebst 2 Teilungen in Millimeter, die Parallelen geschnitten von schrägen Linien ausgehend von 0 bis 9 nach 1 bis 10 cm, so dass auf ihnen die Millimeter von 1 bis 200 gemessen werden können; daneben die goniometrischen Tangenten der Winkel von 1 bis 81 Grad für einen Radius = 28 mm. 2) Ein Massstab in Form eines rechten Winkels, Teilung in Millimeter, ein Schenkel 220, der andre 123, und zwar auf beiden Seiten gleich. 3) Eine Druckschrift (von 7 Seiten) unterzeichnet: Dr. Mauritius, Professor am Gymnasium Casimirianum — worin der Verfasser empfiehlt, statt der Ausarbeitung der in der Classe behandelten Sätze die Selbsttätigkeit der Schüler mit Controle derselben durch Nachmessen der Figuren in Anspruch zu nehmen. Hierzu soll das genannte Instrument dienen. Ferner enthält die Schrift eine Gebrauchsanweisung für graphisches Rechnen und für Trigonometrie, der jedoch alles fehlt, was zum Verständniss notwendig ist. 4) ein Pappumschlag, auf der Innenseite einige Tabellen: specifische Gewichte, Geschwindigkeiten, Inhaltsformeln, Zahlenangaben für Erde, Sonne und Planeten, deutsches Reichsmass und dessen Reductionen. H.

A. Mang's zerlegbarer Universal-Apparat und zerlegbares Tellurium für mathematische Geographie. Weinheim (1883). F. Ackermann.

Der Universalapparat vereinigt und ersetzt somit bei der Demonstration im Schulunterricht Himmelsglobus, Horizontarium, Tellurium-Lunarium, Planetarium und Präcessionsapparat. Er zeichnet sich durch Einfachheit und besonders durch Beseitigung der die Aufmerksamkeit ablenkenden, die Hauptgegenstände verdeckenden Hülfs-

werke aus. Die Sphäre rotirt von allen Umhüllungen frei um die Himmelsaxe. Sonne und Mond können für jeden Tag des Jahres in ihrer Bahn eingestellt werden; sie umkreisen dann die Erde und geben auf dem federnd aufsetzbaren Horizont direct ablesbar an: Anfangsorte und -Zeiten, den Augenblick des Culminirens und die Mittagshöhe. Durch die Verstellbarkeit der Himmelsaxe und des Horizontes lassen sich alle Ansichten des Himmels in den verschiedenen Breitengraden, besonders für den Pol und Aequator naturgemäss demonstriren und auch die nötigen mathematischen Relationen mit Hülfe der graduirten Himmelskreise und des Zenithzeigers veranschaulichen. Das Tellurium ist ein trennbarer Teil des Apparats, derjenige, welcher hauptsächlich in der mathematischen Geographie in Anwendung kommt

Aus der Beschreibung des Verlegers.

E. Noeggerath in Brieg. Apparat zur Bestimmung trigonometrischer Functionen. Patentirt 1882.

Der Apparat ist dazu eingerichtet, die directe Bestimmung der Werte des Sinus und Cosinus, die Beziehungen dieser Functionen zu einander, die Bestimmung ihrer Vorzeichen, die Deutung der Werte $\sin(R \pm \alpha)$ und $\cos(R \pm \alpha)$ u. s. w. zu demonstriren und zeichnet sich vor andern Apparaten zu gleichem Zwecke durch Einfachheit aus. H.

Elektrotechnischer Verein in Wien.

Laut der Statuten, erschienen im eigenen Verlag, ist der Zweck des Vereins: „die Entwicklung und Förderung der technischen Anwendung der Elektricität und der Herstellung eines innigen Contactes zwischen Theorie und Praxis auf diesem Gebiete; ferner speciell die Förderung heimischer Interessen auf dem Gesammtgebiete der Elektrotechnik; endlich soll der Verein einen Vereinigungspunkt bilden für die österreichischen Elektrotechniker und Freunde der Elektrotechnik“. Die Mittel sollen sein: „Versammlungen der Mitglieder, Vorträge und mündliche Discussionen über wissenschaftliche und technische Fragen der Elektrotechnik, Vorführung neuer Erfindungen und Entdeckungen sowie Besprechung derselben, Veröffentlichung der Protocolle der Vereins-Versammlungen, der gehaltenen Vorträge und anderweitigen die Vereinszwecke fördernden Mitteilungen, womöglich in einer eigenen Vereinsschrift“. Der Verein hält jährlich im Januar eine General-Versammlung. Ein Aufruf des Comite's, Franz Fischer, Wien IV. Karolinengasse 16a, u. A., er-

schienen im Januar 1883 fordert zum Beitritt auf, und weist dabei auf die in diesem Jahre abzuhaltende internationale elektrische Ausstellung hin. H.

Hülfs-Tabellen bei Berechnung des Inhalts von Erdarbeiten beim Bau der Eisenbahnen, Chausseen, Dämme und Canäle bearbeitet von G. Dobiński, Techniker. Krakau (Batorygasse Nr. 1.).

Diese Hülfstabellen dienen dazu, um aus den Höhen der Aufträge oder den Tiefen der Abträge den körperlichen Inhalt der betreffenden Dämme, bzhw. Einschnitte, für jede Kronen- oder Einschnittsbreite und für jede Böschung schnell und genau zu ermitteln. Das ganze Werk besteht aus 5 Bänden; jeder Band enhält 30 Bogen in octavo mit 8 Holzschnitten, bildet für sich ein Ganzes und wird daher auch einzeln abgegeben. Der 1. Band enthält ausser einer Einleitung 2 Tabellen. Die Tabelle I findet unmittelbar Anwendung unter der Voraussetzung, dass die Neigungen der natürlichen Bodenflächen in rechtwinkliger Richtung auf die Längenaxe Horizontale sind, oder so wenig abweichen, dass die daraus entspringende Differenz für den Inhalt unbeachtet bleiben kann. Diese Tafel enthält die Quadratzahlen aller natürlichen Zahlen von 0 bis 60, und zwar von 0,01 zu 0,01 steigend; diese Quadratzahlen bezeichnen die Flächendreiecke für variable Höhen unter Annahme einfüssiger Böschung; es leuchtet aber ein, dass für jedes andere Böschungsverhältniss der entsprechende Inhalt gefunden wird, wenn der Wert für $b = 1$ mit der massgebenden Böschungsverhältnisszahl $b = \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ und 3 füssige Böschungen multiplicirt wird. Die Tabelle II findet Anwendung, wenn die Lage der zu beschüttenden oder abzugrabenden Bodenoberfläche, rechtwinklig auf die Richtung der Längenaxe, nicht als Horizontale angenommen werden kann. Sie enthält die Multiplicationscoefficienten für h^2 bei bestimmten Damm- oder Einschnittsböschungen, $b = \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, 2, 2\frac{1}{2}, 3$ und für variable Terrainverhältnisse. Der zweite Band enthält ausser einer Einleitung die III. Tabelle. Diese die Coefficienten für d^2 bei variablen Terrainverhältnissen und bestimmten Damm- oder Einschnittsböschungen $b = \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \ldots 3$. Der dritte Band enthält ausser einer Erklärung und Gebrauchsanweisung die IV. und V. Tabelle zur Bestimmung der Querflächen. Der vierte Band enthält ausser einer Einleitung die VI. Tabelle; mit Hülfe dieser Tafel können sämmtliche Böschungsseiten für Dämme oder geschlossene Einschnitte, für variable Höhen von 0,01 bis 60,00, Kronen- oder Einschnittsbreiten, unmittelbar abgelesen werden. Der fünfte Band enthält ausser einer Erklärung und Gebrauchsanweisung Tabellen, welche praktische

Anwendung haben, wenn der körperliche Inhalt der Erdmasse gefunden werden soll.

Eine genaue Berechnung, verbunden mit mehrfachen Revisionen und der Correctur des Druckes dieser Tafeln, von mir selbst mit der grössten Sorgfalt ausgeführt, berechtigen mich die angegebenen Zahlenwerte als durchaus zuverlässig zu bezeichnen: somit übergebe ich dieses Werk zum Gebrauche für Ingenieure, Techniker und Eisenbahnbauunternehmer. Der 1. Band wird jetzt gedruckt (Apr. 1883).

G. Dobiński.

Vermischte Schriften.

Atti della R. Accademia dei Lincei anno CCLXXIX, 1881—82. Serie terza. Transunti. Volume VI. Roma 1882. Salviucci.

Der Band enthält an mathematischen und physikalischen Abhandlungen und Noten folgendes.

G. Battaglini: Ueber die quaternären bilinearen Formen.

Brioschi: Ueber den Ursprung gewisser linearer Differentialgleichungen.

E. Villari und Righi: Ueber die Ladung der Cohibenten (Elektrophore).

A. de Gasparis: Neue Reihen zum Ausdruck der heliocentrischen Coordinaten als Functionen der mittleren Anomalie.

Casorati: Ueber die linearen Differentialgleichungen.

R. de Paolis: Ueber den Ausdruck einer binären Form vom Grade n mit einer Summe $n$ter Ordnung. (Bericht).

A. Capelli: Fundamente einer allgemeinen Theorie der algebraischen Formen. (Bericht).

E. Villari: Einfluss der verschiedenen elektrischen Widerstände auf die Dimensionen des Erregungsfunkens der Condensatoren.

Cantoni und Gerosa: Ueber den dynamischen Wert einer Calorie.

Siacci: Fundamentalsatz in der Theorie der kanonischen Bewegungsgleichungen.

H.

Acta Mathematica, Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. I. Stockholm 1883. F. u. G. Beijer. Berlin, Mayer u. Müller. Paris, A. Hermann. 4°. 399 S.

Die Zeitschrift ist besprochen und der Inhalt des 1. Hefts angegeben im 275. litt. Bericht, S. 32. Die 3 übrigen Hefte des 1. Bandes enthalten folgende Abhandlungen.

Th. Reye: Die Hexaeder- und die Oktaeder-Configurationen $(12_6, 16_3)$.

P. Appell: Ueber die einförmigen Functionen eines analytischen Punktes (x, y). 2 Abhandlungen. — Reihenentwickelungen eines begrenzten Flächenstücks durch Kreisbogen.

E. Schering: Zur Theorie der quadratischen Reste.

H. G. Zeuthen: Ueber Gruppen von Sätzen und Formeln der Zählungsgeometrie.

E. Goursat: Ueber ein Theorem von Hermite.

H. Poincaré: Abhandlung über die Fuchs'schen Functionen.

L. Bourguet: Note über die Euler'schen Integrale. — Ueber einige bestimmte Integrale.

E. Picard: Ueber eine Classe unstetiger Gruppen linearer Functionen und über die Functionen zweier unabhängiger Variabeln, welche bei diesen Substitutionen unverändert bleiben.

L. Fuchs: Ueber lineare homogene Differentialgleichungen, zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen.

Ch. Hermite: Ueber eine von Cayley gegebene Relation in der Theorie der elliptischen Functionen.

E. Netto: Zur Theorie der Discriminanten. H.

Encyklopädie der Naturwissenschaften herausgegeben von Prof. Dr. G. Jäger, Prof. Dr. A. Kenngott, Prof. Dr Ladenburg, Prof. Dr. von Oppolzer, Prof. Dr Schenk, Geh. Schulrat Dr Schlömilch, Prof. Dr. G. C. Wittstein, Prof. Dr. von Zech. Breslau. Eduard Trewendt.

Die Herausgabe beginnt mit 1879. Als Redacteur wird Richard Fleischer genannt. Was Motiv und Gesichtspunkte betrifft, müssen wir uns mit wenigen Aeusserungen von Trewendts Jahresbericht

über die Leistungen und Fortschritte der Enc. d. Nat. begnügen. Nach ihm musste sich eine umfassende Darstellung aller Gebiete der Naturwissenschaften „als ein Bedürfniss fühlbar machen". Die Encyklopädie sucht die Resultate der neuesten Forschungen und Fortschritte auf dem Gebiete der Naturwissenschaften in zwar „streng wissenschaftlicher", aber „für jeden Gebildeten verständlicher Weise" übersichtlich geordnet (wol zu bemerken, nur an die Ordnung, nicht an die Abfassung wird diese grosse Forderung gestellt) „in einen grossen Rahmen zu bringen" und steckt sich das Ziel, ein nach einheitlichen Grundsätzen gestaltetes Universalhandbuch der Naturwissenschaften zu schaffen zur Erleichterung und Förderung des Studiums und der Forschung und „zur Bildung einer Basis, auf der die Wissenschaft weiter fortgepflanzt und ausgebaut werden kann (!)". Es sind 8 Zweige der Naturwissenschaft unterschieden und in folgender bunten Ordnung in 3 Abteilungen untergebracht: I. Botanik, Mathematik, Zoologie, II. Mineralogie, Pharmakognosie der Pflanzen, Chemie, III. Physik, Astronomie. Jeder hat einen besondern Redacteur und mehrere Mitarbeiter. Die Bearbeitungen mancher Zweige sind Handbücher, anderer Wörterbücher. Dem Ref. liegt nur ein Bruchstück eines solchen Handbuchs vor, es ist Schlömilch's Handbuch der Mathematik, 4. und 5. Band der Encyklopädie. Ein Teil ist von Schlömilch unter dem Titel „analytische Geometrie", jedoch durchweg synthetisch, bearbeitet und kann die analytische Geometrie unmöglich vertreten; der folgende Teil hat Richard Heger zum Verfasser und enthält die Differential- und Integralrechnung. Auf Leichtfasslichkeit und Strenge ist in den Anfängen sichtlich Mühe verwandt. Im ganzen müssen wir jedoch unser Urteil dahin abgeben, dass eine Bearbeitung eines Zweiges nur Anspruch auf diejenige Wertschätzung haben kann, die ihr als gesondertem Werke um ihrer Vorzüge willen zukommen. Die Zusammengehörigkeit kann den Wert nicht erhöhen, erscheint uns vielmehr als ein Hinderniss in der Auswahl der besten und dem individuellen Bedürfniss am meisten entsprechenden Bearbeitungen. H.

Litterarischer Bericht
CCLXXVIII.

Methode und Principien.

Grundzüge der Elementar-Mechanik. *Gemäss den Anforderungen* **der philosophischen Propädeutik** *als Einführung in die physikalischen* **und technischen Wissenschaften** *für den Unterricht bearbeitet von* **Dr. Alex. Wernicke,** Docent der **Mathematik** und Philosophie **a. d. herzogl. technischen** Hochschule, zgl. **am** herzogl. Gymnasium **zu Braunschweig. Mit** 25 Holzschnitt-Illustrationen. Braunschweig **1883.** C. A. Schwetschke **und** Sohn. 445 S.

Da uns der Titel einige Zweifel einflösst, ob wir es bei diesem Buche mit dem Vortrag einer wol begründeten, anerkannten Doctrin, vielleicht nur in eigentümlicher Auffassung, oder mit einer blossen philosophischen Auslassung über dieselbe zu tun haben, so liegt es nahe, zuerst in der Vorrede Aufklärung über die Idee des Verfassers zu suchen. Diese wieder entwickelt eine so gar [illegible] Logik, dass man wol geneigt sein kann sie ganz bei Seite zu lassen und zu versuchen, ob der Specialinhalt klar genug bearbeitet ist, um die Vorrede entbehrlich zu machen. Denn [illegible] war der Verfasser nur wenig befähigt allgemeine Gedanken [illegible] mit den besondern Gegenständen seiner Wissenschaft [illegible] vertraut, um sie verständlich vorzutragen. Doch auch der Specialinhalt gibt uns den gewünschten Aufschluss nicht. Wir müssen daher das Gegebene ohne Unterschied, ob es etwa nur [illegible] sein mag, nehmen wie es vorliegt, [illegible] Vorwort, [illegible] nach der Bedeutung des mathematisch-naturwis[illegible] richts — [illegible] den Ton des Gan[illegible]

nende Satz: „Da man heute kaum mehr zu leugnen geneigt ist, dass die Voraussetzung einer unbeschränkten Gesetzmässigkeit die erste Bedingung wissenschaftlichen Arbeitens ist, so hat der Atomismus seine culturgeschichtliche Mission erfüllt, und darum ist es an der Zeit mit seiner metaphysischen Voraussetzung ein für alle male zu brechen.“ (Vorher geht die Behauptung, dass die Rolle der atomistischen Weltanschauung bereits ausgespielt sei.) Mit solchen hohlen Phrasen ist schwerlich je ein wissenschaftlicher Schriftsteller aufgetreten. Ein unabänderlich entscheidender Schritt in der wissenschaftlichen Forschung soll geschehen. Motiv: weil man kaum mehr *geneigt* ist etc. Kein Wort davon, wofür man sich zu entscheiden habe; vorläufig soll nur niedergerissen werden. Dann, wenn der Atomismus nur noch als Schema für die Darstellung haltbar sei, heisst es weiter, könne man *untersuchen*, ob es nicht noch andere solche Schemata gebe, welche einen gleichen, vielleicht grössern Nutzen gewähren und welche ausserdem frei sind von „*der gefährlichen Verwandtschaft mit dem Materialismus*“ (!) Also wissenschaftliche Wahrheit gibt es für den Verfasser nicht, sondern nur Tat, und zwar nur destructive. Im Vorwort folgt eine Hinweisung auf eine Bemerkung von Chr. Wolff in Verbindung mit einer Aeusserung von Stern bezüglich auf die Einteilung der Mechanik, dann einige Ratschläge des Verfassers über das Studium und den Schulunterricht: er empfiehlt, dass die philosophische Propädeutik von einem Mathematiker gelehrt werde — gewiss mit gutem Grunde, wenn einmal aristotelische Logik noch als besonderer Unterrichtsgegenstand dazu dienen soll, und man nicht lieber noch weiter gehen und sie ganz beseitigen will; denn in der Tat ist die Schulmathematik selbst die beste und eigentliche philosophische Propädeutik, d. h. sie erweckt zuerst die Idee sich über seine Begriffe gründlich Rechenschaft zu geben, und infolge dessen Wissenschaften philosophisch zu studiren, was doch einmal im aristotelischen Rahmen nicht möglich ist. Andere Ratschläge sind viel zu unbestimmt ausgesprochen, z. B. Erweiterung der arithmetischen und geometrischen Anschauungen, Betonung des Gegensatzes von Apriorischem und Empirischem. Sehr unbestimmt ist die Thesis des Verfassers: Die Physik kann und muss der Vorstellung von Moleculen und Atomen entbehren. Er eifert man weiss nicht wogegen und wofür. Was man gewöhnlich unter Atomen versteht, Punkte mit Masse und Kräften, wendet er selbst unbedenklich in seiner Dynamik an, im wesentlichen gleicherweise wie gewöhnlich, nur ist bei der Einführung eine gewisse Unklarheit im Spiele. Er sagt nämlich, die Masse eines Punktes müsse unendlich klein sein, weil der Körper unendlich viele Punkte und eine endliche Masse habe. „Unendlich viele“ hat aber nur Sinn, wenn [illegible]e Zahl wachsend denken; es können also nur beliebig gedachte

Punkte eines Continuums gemeint sein. Diese gedachten Punkte sind nicht Teile des Körpers, daher ist es falsch die Masse eines Punkts durch Division der Gesammtmasse durch die Anzahl finden zu wollen. Die Masse eines Punkts im Continuum ist stets null, nicht unendlich klein. Da indes die vorliegende Theorie den Punkten Masse beilegt, so handelt sie factisch von Atomen, obgleich die Worte der Einführung nicht damit stimmen. Dass nicht die Annahme, sondern nur die Vorstellung von Atomen entbehrt werden solle, kann wol nicht der Sinn der Thesis sein. Dies wird gewiss genügen um den an die Spitze gestellten Satz, welcher den Atomismus verwirft, als gänzlich hohl und nichtssagend erscheinen zu lassen. Sollte ein so absprechendes Auftreten mehr als leerer Wind sein, so war wenigstens zweierlei erforderlich: erstens musste die entgegengesetzte Ansicht unzweideutig ausgesprochen, zweitens ein hinreichender Erfolg aufgewiesen sein. Von beiden ist keine Rede. Mit dem Inhalte des Buchs steht der Inhalt des Vorworts in keiner sichtlichen Verbindung. Das Buch ist eine sehr reiche Sammlung von Erfahrungen des Verfassers in dessen Studium der Mechanik. Es besteht fast gänzlich aus principieller Kritik, welche die Kenntniss der gesammten Mechanik beim Leser voraussetzt. Die Wortfassung ist grösstenteils klar und exact und, mit Unterstützung durch beigefügte Formeln und Figuren, für Kundige verständlich. [illegible] auf dem Titel [illegible] für Einführung. Unterweisung und Herleitung [illegible] gegen werden an einigen [illegible] Kreis der Betrachtung gezogen. [illegible] das Resultat [illegible] das Beiseitelassen [illegible] es dafür [illegible] Die Mechanik [illegible] Die Physik [illegible] Physikalische M[illegible] chanik. II. [illegible] allgemeine [illegible] biete der Physik.

[illegible]

[illegible]

Bei den enormen Fortschritten, welche die Spectralanalyse in den letzten 15 Jahren gemacht hat, musste ein Zeitpunkt eintreten, wo eine universelle Bearbeitung für den Studirenden, den Lehrer und den Forscher zum unabweisbaren Bedürfniss ward. Der Verfasser, welcher sich dieser Aufgabe unterzog, hat diesen Zeitpunkt sicher nicht zu früh angesetzt. Das Material hat einen Umfang gewonnen, der nicht mehr leicht zu beherrschen ist, und die darin gewonnene Klarheit ist bis zu einem Standpunkt gediehen, wo in nächster Zeit keine wesentlich günstigere Lage zu erwarten steht. Keine der frühern Schriften kann die Stelle einer solchen universellen Bearbeitung genügend vertreten. In unsern Lehrbüchern der allgemeinen Physik wird das so interessante Gebiet der Spectralanalyse ausserordentlich stiefmütterlich behandelt, die neuern Versuchsmethoden und Resultate finden sich fast nirgends angegeben, und die, namentlich durch englische Forscher, gemachten Fortschritte bleiben meist unerwähnt. Von den speciellen Werken über Spectralanalyse, deren es eine recht grosse Anzahl gibt, verfolgen die meisten den Zweck, in ganz populärer Form den Gegenstand zu behandeln; in dieser Richtung hat Roscoe Ausgezeichnetes geleistet. Andere Werke sind zwar wissenschaftlicher gehalten, aber sie betonen dann nur einzelne Capitel oder einzelne Richtungen der Spectralanalyse; so hat das sehr empfehlenswerte Buch von H. W. Vogel nur die praktische Analyse, namentlich die durch Absorptionsspectren im Auge. Auch die sehr starke, neueste Auflage der Schellen'schen Spectralanalyse lässt recht viel zu wünschen übrig. Auf Grund dieser im Vorwort vom Verfasser ausgesprochenen Tatsachen lässt sich das gegenwärtige Lehrbuch als erste dem genannten Zwecke gewidmete Erscheinung betrachten. Anlass zur Bearbeitung war ihm der eigene Gebrauch, Antrieb zur Herausgabe die sich natürlich daraus ergebende Absicht, die dazu erforderte Mühe des Durchstudirens der unzähligen in Zeitschriften verstreuten Abhandlungen dauernd in weiterm Kreise nutzbar zu machen, Gesichtspunkt der Abfassung erstens dem Studirenden in kürzest möglicher Form eine vollständige Uebersicht über die Gesetze, Methoden und Apparate der Spectralanalyse zu geben, wobei zahlreiche Litteraturnachweise ein näheres Eingehen auf einzelne Punkte erleichtern, zweitens demjenigen, der selbständige Forschungen machen und zum weitern Ausbau des Gegenstandes beitragen will, die vollständigst mögliche Kenntniss des bisher Erreichten zu geben. Dieser Bestimmung entsprechend enthält der Vortrag keine analytische Entwickelung, stellt vielmehr alle aus der theoretischen Optik hervorgehenden Begriffe und Gesetze, deren Darlegung mit den ersten Elementen beginnt, unmittelbar als Resultat auf. Die natürlichen Hauptabschnitte sind: die Emission und die Absorption des Lichtes. [illegible] ersten werden nach einander folgende Themata behandelt: die

Aetherwellen, Herstellung leuchtender Dämpfe, Zerlegung des Lichtes durch Brechung, Spectralapparate, Diffraction des Lichtes, Untersuchungsmethoden für das ultrarote und ultraviolette Licht, Hülfsapparate zur Spectraluntersuchung, Geschichte der Spectralanalyse, Gesetze derselben — im zweiten: Absorption durch feste und flüssige Körper, das Kirchhoff'sche Gesetz, Absorption durch Gase und Dämpfe, das Sonnenspectrum, die Constitution der Sonne, die Himmelskörper, Lockyer's Anschauungen über Dissociation der Elemente, quantitative Spectralanalyse. Im dritten Abschnitt werden die Spectren der chemischen Elemente und ihrer wichtigsten Verbindungen einzeln behandelt. H.

Physik.

Ueber die galvanische Polarisation. Von **Emilio Pirani**, Dr. phil. Mit einer Tafel. Berlin 1883.

Zweck dieser Arbeit ist die Untersuchung, ob die chemische Natur der Elektroden einen Einfluss auf die Vorgänge der Polarisation habe. Die Ansichten darüber sind verschieden; namentlich haben Buff, Crova, Ayrton und Perry, Hallock, Exner, Bartoli gefunden, dass bei Sättigung mit Wasserstoff Platin gleich Kupfer wirkt, die Verschiedenheit der Metalle keinen Einfluss auf die Polarisation hat; doch liegen auch Versuche mit entgegengesetztem Resultat vor. Daher findet der Verfasser Anlass, ausdrücklich und allseitig auf die Frage einzugehen, was bis dahin nicht geschehen war. Es wird das angewandte Verfahren beschrieben, nach welchem der augenblickliche Wert der Polarisation mit äusserster Schärfe erkannt werden konnte. Durch Vorversuche überzeugt sich der Verfasser, dass die Annahme einer Mitwirkung thermoelektrischer Erscheinungen ausgeschlossen ist; ferner sucht er im Voltameter dieselben chemischen Processe für Zink als eine, für verschiedene Metalle als andre Elektrode zu erzeugen, ohne indes den gewünschten Aufschluss zu erhalten. Die eigentlichen Versuche führen zu folgenden Resultaten. Die Polarisation ist unter gewöhnlichen Umständen von der Natur der Elektroden abhängig. Diese Abhängigkeit zeigt sich sowol in den Werten bei geschlossenem Strome wie in dem Verlaufe der Abnahme nach Oeffnen des Stromes. Sie besteht auch bei Erwärmung der Flüssigkeit, ist also nicht auf Bildung von Wasserstoffsuperoxyd oder Ozon zurückzuführen. Ein Wasserstoffvorrat an der Anode, der den sich entwickelnden Sauerstoff bindet, hebt jene Abhängigkeit nicht auf. Trennung der Elektroden, also Hinderung des Hinüberdiffundirens

der elektrolytischen Gase, hebt die Abhängigkeit nicht auf; ebensowenig Trennung der Elektroden durch eine Zwischenzelle, in der sich siedende Flüssigkeit befindet. Abschluss gegen atmosphärische Luft durch Benzol bringt keine Aenderung hervor. Messung unter völligem Luftabschluss und stetem Auspumpen der elektrolytischen Gase ergeben immer noch eine Abhängigkeit von der Natur der Elektroden. Alle diese Vorsichten vermochten nicht ein Uebereinstimmen in dem Verhalten der verschiedenen Metalle hervorzubringen. Der fragliche Einfluss existirt demnach. Die vielen Zahlenergebnisse, welche am Schlusse in Tabellen aufgestellt sind, werden nun mit denen früherer Arbeiten verglichen, und zu diesem Zwecke manche besondere Versuche angestellt, worüber der übrige Teil der Schrift berichtet. H.

Die modernen Theorien der Chemie und ihre Bedeutung für die chemische Mechanik. Von Dr. Lothar Meyer, ord. Prof. der Chemie an der Universität Tübingen. Vierte, umgearbeitete Auflage. Drittes Buch: Dynamik der Atome. Breslau 1883. Maruschke u. Berendt. 225 S.

Die 2 vorhergehenden Bücher, I. die Atome, II. Statik der Atome, sind im 263. litt. Bericht S. 34. besprochen. Das dritte ist erst in vierter Auflage hinzugekommen. Die darin behandelten Gegenstände sind: der chemische Umsatz und seine Ursachen; chemischer Umsatz durch mechanische Erschütterung; die Wärme als Ursache und Folge des chemischen Umsatzes; chemische Massenwirkung; chemischer Umsatz durch Licht; chemischer Umsatz als Ursache und Folge der Elektricität; die Stabilität der chemischen Verbindungen. Dieselben Grundsätze, die in den vorhergehenden Teilen galten und an der bezeichneten Stelle ausgesprochen worden sind, charakterisiren auch den neuen Teil. Das Buch bleibt gleicher Weise fern einer Ansammlung experimenteller Tatsachen, deren Erklärung der Zukunft vorbehalten bleibt, als einer Aufstellung neuer Hypothesen. Die Gestaltung der Theorie ist das ausschliessliche Interesse; hierin geht der Verfasser mit äusserster Vorsicht soweit, als es nach neuestem Standpunkt mit Sicherheit möglich ist. Insofern mag es genügen, die bearbeiteten neuen Themata genannt zu haben. H.

Elektrisches Formelbuch. Mit einem Anhange enthaltend die elektrische Terminologie in deutscher, französischer und englischer Sprache. Von Dr. P. Zech, Prof. der Physik am Polytechnikum in Stuttgart. Mit 15 Abbildungen. Wien, Pest, Leipzig 1883. A. Hartleben. (Elektrotechnische Bibliothek. [illegible]d X.). 223 S.

Das Buch enthält die Elektricitätslehre in alphabetischer Ordnung der behandelten Themata, alle nötige Erklärung sowol als die Formeln. Es ist dazu bestimmt alles das zu geben, was der Elektrotechniker an bekannten Formeln braucht, wenn er eine Aufgabe der Elektrotechnik auf mathematischem Wege lösen will, und soll ihm das Nachschlagen an verschiedenen zerstreuten Orten ersparen. Auf eine durchweg gleiche Bezeichnung derselben Gegenstände ist Bedacht genommen worden, diese Bezeichnung aber an jeder Stelle erklärt. Das Verzeichniss der benutzten Litteratur nennt die Werke von 17 Autoren und 6 Zeitschriften. Dem Formelbuch geht die Erklärung sämmtlicher Einheiten voraus. Die Terminologie ist alphabetisch in allen 3 Sprachen zugleich, so nämlich, dass die ins Alphabet passenden Wörter fett gedruckt sind, die übrigen aber nicht als Entree in Anwendung kommen. H.

Die elektrischen Mess- und Präcisions-Instrumente sowie die Instrumente zum Studium der elektrostatischen Elektricität mit besonderer Rücksicht auf ihre Construction. Ein Leitfaden der elektrischen Messkunde von Arthur Wilke. Mit 59 Abbildungen. Wien, Pest, Leipzig 1883. A. Hartleben. (Elektrotechnische Bibliothek. Band VIII.). 247 S.

Es werden die Grundsätze und Methoden des Messens erörtert, die Reductionsformeln aufgestellt und die Apparate beschrieben und abgebildet, Methoden und Apparate natürlich mit Auswahl der besten, neben denen die zahlreichen übrigen keine Wichtigkeit haben. Im Buche geht voraus das Illustrationsverzeichniss, das alphabetische Verzeichniss der Gegenstände, das der Namen der Autoren und die Lehre von den Einheiten. Es behandelt dann nach einander: Allgemeines über die elektrischen Messungen, die Messung der Stromstärke, des Widerstandes, der elektromotorischen Kraft, der Ladungsfähigkeit, die Constanten der galvanischen Batterie, die Leitungen, elektrischen Aufwand und Leistung, die Messung der statischen Elektricität, Aufstellung und Behandlung der elektrischen Messinstrumente, und im Anhang die absoluten Masse der elektrischen Grössen.
H.

Handbuch der statischen Elektricität. Von E. Mascart, Professor am Collège de France, Director der meteorologischen Centralanstalt in Paris. Deutsche Bearbeitung von Dr. Ignaz G. Wallentin, k. k. Professor am Staatsgymnasium im IX. Bezirke Wien's, chem. Privatdocent für mathematische Physik an der technischen Hochschule in B[illegible] Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Erster Band. I. Abtheilung. Wien 1883. A. Pichler's Witwe u. Sohn. 539 S.

Das Werk erscheint in 2 Bänden zu je 2 Abteilungen. Das Original, dessen Inhalt hier mit reichlichen Vermehrungen in deutscher Sprache ausgegeben wird, ist 1876 unter dem Titel: „Traité d'électricité statique" erschienen. Nach dem Urteile des Bearbeiters kann dasselbe als ein treffliches Lehrbuch sowol des experimentellen als auch des theoretischen Teiles der Elektrostatik bezeichnet werden. Prof. Mascart hat darin nicht nur die neueren Arbeiten, sondern auch jene früherer Experimentatoren berücksichtigt: insbesondere waren es die Coulomb'schen Versuche, denen er seine volle Aufmerksamkeit widmete und in einer anziehenden Form vorführte. Hauptsächlich in den ersten Capiteln hat der Autor ein ziemlich vollständiges Bild des Entwickelungsganges der wissenschaftlichen Elektricitätslehre geschaffen; überall tritt die historische Seite des Gegenstands deutlich hervor, und diesem Umstande ist es auch zuzuschreiben, dass z. B. in den Abschnitten über die Elektrometer und Elektrisirmaschinen noch Apparate eingehend beschrieben werden, die vor langer Zeit in Verwendung standen, heute aber kaum mehr gebraucht werden dürften. Der Bearbeiter ist überzeugt, dass auch derartige Darstellungen dem Fachmanne nicht unwillkommen sein werden. Er hat sich vor längerer Zeit, angezogen durch die vielfachen Vorzüge des Originals, entschlossen, dasselbe ins Deutsche zu übertragen. Viele Zusätze wurden eingeschaltet, der theoretische Teil der Elektrostatik vielfach erweitert und umgearbeitet; doch sei in letzterer Beziehung bemerkt, dass er immer nur die physikalische Seite der Theorie vor Augen hatte und auf die vielen schönen Untersuchungen, die fast rein mathematischer Natur sind (z. B. in der Theorie der Elektricitätsverteilung auf Conductoren), weniger Gewicht legte. Besonders sind es die Theorien der Potentialtheorie, die er oft von mehreren Gesichtspunkten aus betrachtete. Die Lehre von den Kraftlinien, von der Emission und Absorption des Kraftflusses leitet meist zu einer überraschend einfachen und eleganten Lösung der betreffenden Probleme. Bei der Bearbeitung dieses Teiles hat er seine Studien der Werke von Maxwell, Thomson, Clausius, Grinwis u. a. benutzt. Dass die von Mascart und Joubert kürzlich herausgegebenen leçons sur l'électricité et le magnétisme vielfach der Bearbeitung zugrunde gelegt wurden, dürfte sicherlich in der Tendenz Mascart's liegen, der dem Bearbeiter die Einschaltung von Zusätzen, welche dem letzteren wesentlich schienen, ausdrücklich gestattet hat. Diese Zusätze sind im Vorwort sämmtlich bezeichnet. Der erste Band, von welchem die 1. Abteilung vorliegt, enthält die Grundgesetze der statischen Elektricität, die Theorie der elektrostatischen

Phänomene mit Einschluss einer ausführlichen Theorie der Dielektricität, die in dem Originale fehlt, die Beschreibung und Theorie der elektrostatischen Messapparate und deren Anwendung zur Bestimmung der in der Elektrostatik vorkommenden Grössen. Den Schluss des ersten Bandes wird eine eingehende Darstellung der Methoden zur Auswertung des specifischen Inductionsvermögens der Dielektrika bilden. H.

Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus. Von James Clerk Maxwell, M. A. Autorisirte deutsche Uebersetzung von Dr. B. Weinstein. In zwei Bänden. Zweiter Band. Mit zahlreichen Holzschnitten und 7 Tafeln. Berlin 1883. Julius Springer. 624 S.

Der erste Band ist im 275. litt. Bericht S. 29. besprochen. Der zweite Band enthält als dritten und vierten Teil den Magnetismus und Elektromagnetismus. Im 3. Teil wird behandelt: die elementare Theorie des Magnetismus, magnetische Kraft und magnetische Induction, magnetische Solenoide und magnetische Schalen, inducirte Magnetisirung, specielle Probleme der magnetischen Induction, Weber's Theorie der magnetischen Induction, magnetische Messungen, Erdmagnetismus — im 4. Teil: elektromagnetische Kraft, Ampère's Theorie der Wirkung elektrischer Ströme auf einander, Induction der elektrischen Ströme, Induction eines Stromes auf sich selbst, Bewegungsgleichungen eines Systems mit einander verbundener Agentien, dynamische Theorie des Elektromagnetismus, Theorie der linearen elektrischen Ströme, Untersuchung eines elektromagnetischen Feldes durch seine Wirkungen auf eine Strombahn, allgemeine Gleichungen des elektromagnetischen Feldes, elektrische Einheiten und ihre Dimensionen, Energie und Zwang in einem elektromagnetischen Felde, platte Körper (Schalen) im elektromagnetischen Felde, parallele Ströme, Kreisströme, elektromagnetische Instrumente, elektromagnetische Beobachtungen, Vergleichung von Rollen, elektromagnetische Widerstandseinheit, Vergleichung der elektrostatischen mit den elektromagnetischen Einheiten, elektromagnetische Theorie des Lichtes, Wirkung des Magnetismus auf das Licht, Erklärung des Ferromagnetismus und des Diamagnetismus durch moleculare Ströme, Theorien einer Wirkung in die Ferne. Der Uebersetzer hat häufig Zwischenrechnungen ausgeführt, die im Original nicht stehen.

H.

Licht und Wärme. Von E. [illegible] Vorte[illegible] und 126 Figuren in Holzstich. Leipzig [illegible] Freytag. [illegible] F. Tempsky. 312 S.

Das Buch erscheint als XII. Band in der von dem genannten Verlag unter dem Titel: „Das Wissen der Gegenwart“ herausgegebenen „Deutschen Universal-Bibliothek für Gebildete“. Es gehört zu den zahlreichen populären Schriften über wissenschaftliche Gegenstände, die sich die Verbreitung von Kenntnissen in einem Publicum, das dem betreffenden Studium fernsteht, zur Aufgabe machen, unterscheidet sich aber rühmlich von der Mehrzahl dieser Schriften, welche auf Erzeugung eines eingebildeten Wissens mit geringer Mühe gerichtet sind, dadurch, dass es in vollem Ernste den Leser in das Verständniss einzuführen sucht. Die Ansprüche an mathematische Vorbildung sind sehr gering, geringer als die Volksschule sich diese Bildung zum Ziele setzt: sie beschränken sich auf diejenigen Begriffe und Kenntnisse, die im gemeinen Leben und im Umgange unter Gebildeten überall in Anwendung kommen. Dagegen wird erstlich vorausgesetzt ein stetiges, nicht von irrigen Vorstellungen voreingenommenes Denken, da sich der Vortrag auf Correction und Nachhülfe für Schwache nicht einlässt, und zweitens der beharrliche Wille der Erklärung zu folgen. Wie oft die Grenzen des letztern bei den meisten Lesern hier überschritten werden, müssen wir dahin gestellt sein lassen. Das Buch umfasst die Umrisse des gesammten heutigen Lehrgebäudes dargestellt durch Erklärung der instructivsten Punkte ohne viel Detail. Die Erklärung stützt sich hauptsächlich auf gut gewählte Beispiele und wendet alle Mittel der Verdeutlichung bald in grösserer Ausführlichkeit, wo es eben nötig ist, bald in einfachem, entsprechend kurzem Ausdruck, mit Anwendung leicht zu übersehender Abbildungen, an. Auch für Kundige mag wol das Buch in Anbetracht des darin entfalteten methodischen Geschicks von Interesse sein. H.

Vermischte Schriften.

American Journal of Mathematics. Edited by J. J. Sylvester. Published under the Auspices of the Johns Hopkins University. *Πραγμάτων ἔλεγχος οὐ βλεπομένων*, Volume V. Baltimore 1882. (Agents Cushing and Bailey).

Der 5. Band enthält folgende Abhandlungen:

J. J. Sylvester: Ueber Subinvarianten, d. i. Halb-Invarianten für binäre Quantics von unbegrenzter Ordnung. — Tafeln der erzeugenden Functionen, reducirt und repräsentativ für gewisse ternäre Systeme binärer Formen. — Eine constructive Partitionstheorie, geordnet in 3 Acte, einen Zwischenact und einen Schlussact.

Faa de Bruno: Einige Anwendungen der Theorie der binären Formen auf elliptische Functionen. — Ueber die Entwickelung der rationalen Functionen.

Benj. Alvord: Kreis- und Kegelschnitt.

W. P. Durfee: Tafeln der symmetrischen Functionen 12. Grades. — Die Aufstellung symmetrischer Functionen in Tafeln.

Th. Craig: Note über die Gegenfussfläche eines Ellipsoids. — Ueber eine ΘFunctions-Formel.

A. Cayley: Eine Abhandlung über die abelschen und ΘFunctionen.

W. E. Story: Ueber die nichteuklidische Geometrie. — Ueber nichteuklidische Eigenschaften der Kegelschnitte.

F. Franklin: Ueber kubische Curven.

J. Hammond: Ueber die Lösung der Differentialgleichung von „Quellen“.

G. S. Ely: Bibliographie der bernoullischen Zahlen. — Einige Noten über bernoullische und eulersche Zahlen.

J. Hagen: Ueber Division von Reihen.

E. W. Davis: Ein Ausdruck für die Coordinaten eines Punkts auf einer Zweiknotencurve 4. Grades als rationale Functionen der elliptischen Functionen von variabelem Parameter.

A. W. Hale: Tafeln zur Erleichterung der Bestimmung empirischer Formeln.

Dominica Turazza: Von einem neuen Theorem bezüglich auf die Rotation eines Körpers um eine Axe. H.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

CLXVI.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Bergk, Th., 5 Abhandlungen zur Geschichte der griech. Philosophie u. Astronomie. Hrsg. v. G. Hinrichs. Leipzig, Fues. 4 Mk.

Schellen, H., d. elektromagnet. Telegraph in den Hauptstadien s. Entwicklung etc. 6. Afl. 3. Lfg. Braunschweig, Vieweg & S. 3 Mk.

Methode und Principien.

Jacobson, J., die Axiome d. Geometrie u. ihr „philosoph. Untersucher" Herr Benno Erdmann. Königsberg, Beyer. 1 Mk. 60 Pf.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Adam, V., Taschenbuch d. Logarithmen f. Mittelschulen etc. 10. Afl. Wien, Bermann & Altmann. geb. 1 Mk. 20 Pf.

Gauss, G., 5stell. vollst. logarithm. u. trigonometr. Tafeln. 18. Afl. Halle, Strien. 2 Mk.

Janke, F., Sammlg. algebraischer Aufgaben. Bernburg, Bacmeister. 3 Mk.

— Auflösungen dazu. Ebd. 15 Pf.

Kleyer, A., vollst. gelöste Aufg.-Sammlg. a. allen Zweigen d. Rechenkunst etc. 68—75. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Schellen, H., Aufgaben f. d. theoret. u. prakt. Rechnen. 1. Tl. 17. Afl. Münster, Coppenrath. 2 Mk.

— dass. Materialien dazu f. den Gebrauch d. Lehrers. 9. Afl. Ebd. 4 Mk.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Adam, R., der Rechenlehrer. Neue Anleitg. zum method. Unterricht im Rechnen. 1. Tl. 7. u. 8. Lfg. Berlin, Th. Hofmann. à 50 Pf.

Litterarischer Bericht
CCLXXIX.

Lehrbücher, Sammlungen und Tabellen.

Lehrbuch der Arithmetik zum Gebrauch an niedern und höhern Lehranstalten und beim Selbststudium. Von B. E. Richard Schurig. In drei Teilen. Erster Teil: Spezielle Zahlenlehre. (Zugleich ein Handbuch für Volksschullehrer.) Leipzig 1883. Friedrich Brandstetter. 286 S.

Das vorliegende Lehrbuch hat, weniger nach dem Vorwort als nach dem Ausfall der Bearbeitung zu urteilen, die Bestimmung, ein Beitrag oder Entwurf zu einer ideellen Methode zu sein. Es ist seiner Abfassung sehr zustatten gekommen, dass der Verfasser keinen Grund gefunden hat besondere Rücksichten auf Gewohnheiten der Schüler, deren Trägheit zum Denken, begrenzte Ziele der Unterrichtsanstalten und mancherlei fremdartige Motive bei der Einführung einfliessen zu lassen. Sie lehnt sich an kein fertiges, in Ansehen stehendes Werk an, sondern lässt sich allein durch die allgemeinen Gesichtspunkte und Forderungen des Unterrichts leiten. Andrerseits ist sie soweit entfernt mit Nichtbeachtung oder Verwerfung der bisherigen Leistungen die Arbeit der Aufsuchung der besten Methode von vorn anzufangen, dass sie nicht nur den erreichten Standpunkt der methodischen Gestaltung in vollem Masse einnimmt, sondern sich nicht einmal durch eigenartigen Lehrgang von den gewöhnlichen Lehrbüchern wesentlich unterscheidet. Was sie charakterisirt und ihren Vorzug ausmacht, ist nur die auf alle sich dem Rechner darbietenden Fragen, praktische wie doctrinäre, sorgfältig eingehende erschöpfende Behandlung des Lehrstoffs. In Betreff der doctrinär-

Fragen ist auf exacte Lösung und einfachen correcten Ausdruck viel Fleiss verwandt. Der Verfasser sagt im Vorwort, dass, wenn Manches in logischer Forderung für den Schüler zu weit zu gehen scheine, wenigstens der Lehrer über alle einschlagende Punkte sich Klarheit aneignen müsse. Die praktischen Fragen erstrecken sich auf Rechnungsschema, abgekürzten Algorithmus, Rechnungsvorteile, Mnemotechnik u. s. w. Die Ausführlichkeit in beiderlei Dingen, obschon ohne Wortüberfluss, hat den grossen Umfang des Buches zuwege gebracht, so dass schon die Lehre von der Addition ohne Brüche, ohne negative Zahlen, ohne Decimal-Algorithmus einen beträchtlichen Raum einnimmt. Der vorliegende 1. Teil ist überschrieben: „Specielle Zahlenlehre", sofern er sich nicht die Theorie der Buchstabenrechnung zur Aufgabe macht; doch ist er dem Hauptinhalt nach ebenso allgemein theoretisch wie letztere und wendet auch vielfach Buchstaben zur Formulirung und Beweisführung an. Er handelt von Addition, Subtraction, Multiplication und Division der ganzen Zahlen, gemeinen und Decimalbrüchen, als absoluten Zahlen, erst am Schlusse von positiven und negativen. Der einleitende erste Paragraph beschränkt sich hierauf nicht, sondern gibt eine begriffliche Uebersicht über die gesammte Arithmetik. Es ist hervorzuheben, dass die noch bis heute in die meisten Lehrbücher der Arithmetik gedankenlos traditionell aufgenommene falsche Definition des Rechnens als Verbindung von Zahlen hier der richtigen Platz gemacht hat: das Rechnen wird nicht nur als Transformation definirt, sondern auch durchweg als solche aufgefasst und behandelt. Der natürlichen Entstehung der Operationen mit successiver Erweiterung des Zahlbegriffs entspricht implicite der Vortrag, doch macht er nicht darauf aufmerksam, verhüllt eher die Beziehung.

Während aber das Lehrbuch fast in allen Punkten sich tadelfrei erweist und manche Vorzüge besitzt, ist ein Capitel darin voll von den gröbsten Fehlern, nämlich die Lehre von den unendlichen Grössen. Diese Lehre in ein Lehrbuch aufzunehmen, welches die Zahl durchweg als eine unveränderliche behandelt, war nicht der mindeste Grund, auch kommt in der Tat keine Anwendung der falschen Sätze vor. Der Verfasser hat die Lehre vom Unendlichen gänzlich misverstanden und stellt seinen Irrtum in solcher Weise bloss, dass er von jedem Schüler mit seinen eigenen Worten geschlagen werden kann. Das Unendliche wird mit den Worten eingeführt: „Addirt man Einheiten ohne Aufhören, so dass ihre Zahl eine unbegrenzte ist, so erhält man die Zahl „unendlich gross" die mit ∞ abgekürzt wird." Wer es versuchen will, ob er sie erhält, addire also sein Lebenlang! Hier ist es unverhüllt ausgesprochen, dass ∞ eine Zahl sei. Die Irrtümer und Widersprüche, welche die nun folgenden Aufstellungen unter

dieser Voraussetzung enthalten, aufzuweisen hat kein Interesse; es ist nur zu verwundern, wie man heutzutage noch einer solchen Unkenntniss begegnen kann, wie sie z. B. in dem Satze: „Unendlich kleine Grössen unter sich allein verglichen stehen im endlichen Verhältniss“ — hier zutage tritt. Nur was der Verfasser über die Null sagt, wollen wir noch kurz besprechen. Er erklärt sie erst, bevor er vom Unendlichen handelt, und ohne Beziehung dazu, als Zeichen für „Nichts“, bemerkt aber dazu, dass diese Bestimmung nicht wissenschaftlich sei. Gegen die Erklärung ist nun weder vom vulgären noch vom wissenschaftlichen Standpunkt etwas einzuwenden, sofern die Arithmetik nur von Quantitäten handelt, was auch bei der benannten Zahl gilt. Null ist in der Tat identisch mit Nichts als Quantität; man darf nur den Satz nicht dahin verdrehen, Null sei keine Quantität; denn das hiesse, Null sei etwas andres als eine Quantität. Doch diese Undeutlichkeit ist's nicht, was der Verfasser meint. Er lehrt vielmehr, die Null musse als unendlich klein aufgefasst werden. Er lässt also das Richtige, das er versteht, fahren, greift nach dem, was er nicht versteht und verfällt auch zugleich in den berüchtigten Irrtum, die Verwechselung von Function und Grenzwert. Auffallend ist es, dass er die [illegible] durch Zurückverfolgung der Zahlenreihe [illegible] ignorirt. Vielleicht war es ihm [illegible] Negativen eber angeregt [illegible]

Leitfaden für den [illegible] höheren Unterrichtsanstalten [illegible] a. o. Honorarprofessor am [illegible] am Wettiner Gymnasium zu [illegible] Mit 165 — [illegible] 33 in den Text [illegible] Trewendt. [illegible]

Der [illegible] im 274 [illegible] Geometrie [illegible] winkels [illegible] Winkel [illegible] ebene [illegible] nachgew[illegible] erklärt [illegible] Systems [illegible]

Stellung der normalen vorausgehen zu lassen, obgleich in der Planimetrie aus deductiven Gründen gewöhnlich das umgekehrte geschieht. Das genannte Verfahren sanctionirt diese Scheidung und Anordnung zweier natürlicher Abschnitte der Lehre von der Lage der Ebenen und Geraden, welche in manchen Lehrbüchern mit Beeinträchtigung der Uebersicht in einander geschoben sind. In dem Abschnitte über Normalprojectionen ist soviel aus der descriptiven Geometrie aufgenommen, dass sich leichte Constructionen anschliessen lassen, und im Zusammenhange damit später die constructive Lösung von Aufgaben angedeutet. Die in 13 Paragraphen behandelten Gegenstände sind der Reihe nach: Durchschnitt einer Ebene mit Geraden und Ebenen; Flächenwinkel, Normalen einer Ebene; Normalprojectionen; Abstände von Punkten und Ebenen; sphärisches Dreieck; Polyeder; Kubatur der Prismen und Pyramiden; der Kugel und andrer Körper; Oberfläche des Rotationscylinders, des Rotationskegels und der Kugel; im Anhang: quadratische Punkt- und Strahleninvolution; Kreiskegel; Kegelschnitte; Ellipse als Normalprojection des Kreises.

Der 4. Teil ist, obgleich er nur synthetische Geometrie enthält, misbräuchlich „analytische Geometrie“ benannt; er behandelt die Lehre von den Coordinaten in der Ebene nebst Anwendung auf Kegelschnitte und geht bei letztern auch auf Pol und Polare ein. Der Fortschritt ist durchweg vom einfachsten Besondern zum Allgemeinen, also synthetisch. H.

Die Elemente der Planimetrie in ihrer organischen Entwickelung. Lehrbuch für jede Schule. Von Dr. E. Schindler, Professor am Joachimsthal'schen Gymnasium zu Berlin. In vier Stufen. I. Stufe: Die wirkliche Grösse der Grund-Gebilde der Planimetrie. II. Stufe: Die wirkliche Grösse der Umfänge der Figuren. III. Stufe: Die scheinbare Grösse der ebenen Gebilde. Die Fläche der Figuren. IV. Stufe: Die messbaren Beziehungen der Figuren. — Die Entwickelung der Analyse. Berlin 1883. Julius Springer. 71 + 63 + 132 + 173 S.

Das Lehrbuch gehört zu den Versuchen die geometrische Unterrichtsmethode zu reformiren, die jedoch nicht bessernd und fördernd auf dem erreichten Standpunkte weiter arbeiten, sondern auf unmittelbare Neugestaltung nach den besondern Gedanken der Verfasser gerichtet sind. Solche Versuche verraten nur, dass die Verfasser kein Verständniss für die Forderungen besitzen, welche alle bisherigen Bearbeiter an den Unterricht gestellt haben, abgesehen natürlich von dem Falle, dass ein Reformator allen Vorgängern an Befähigung sehr

überlegen wäre. Wie es nun beim gegenwärtigen Erzeugniss mit der Befähigung des Verfassers steht, davon gibt der erste Satz eine Probe: „Die Wahnehmungen der Naturgegenstände heissen Körper und die verschiedenartigen Wahrnehmungen der Sinnesorgane Eigenschaften der Körper". Die Eigenschaften sind hiernach auch Körper! Zwischen Substanz und Attribut macht die Formulirung des Satzes keinen Unterschied. Um sich zu überzeugen, dass diese Confundirung nicht aus blossem Ungeschick im Ausdruck entspringt, sondern wirklich unentwickeltes Denkvermögen zugrunde liegt, braucht man nur eine Stelle im Vorwort zu vergleichen, wo der Verfasser folgendermassen schliesst: Weil Sinneswahrnehmungen stets das Product von Körper-Einwirkungen auf die Sinnes-Organe sind, so muss ein Punkt, weil wahrnehmbar, ebenfalls ein Körper sein. Der Schluss selbst ist schon ein Zeichen von mangelnder Logik. Namentlich geht aber daraus hervor, dass der Verfasser wahrnehmbare Eigenschaften für Körper erklären muss. Ueber Flächen und Linien, die dem Obigen zufolge Körper sind, sagt er näher eingehend, dass ihre Dicke unendlich klein sei, betrachtet aber die mathematische Linie als identisch mit der körperlichen Bleilinie. Fragt man nun, wie er im Stande ist auf solchem Grunde den Inhalt der elementaren Geometrie bündig herzuleiten, so findet man bald, dass er sich eine solche Aufgabe gar nicht stellt. Zum grossen Teil handelt es sich bloss um Begriffserklärungen und technische Vorschriften zur Construction. Kommt mitunter ein Satz vor, so wird Urteil und Grund, ohne Rücksicht ob letzterer ausreichend sei, imperatorisch zudictirt. Die „organische Entwickelung", welche auf dem Titel steht, bleibt ein unerfülltes Versprechen. Dieselbe Phrase, über deren Sinn keine Auskunft erteilt wird, wiederholt sich im Vorwort oft. Dieses enthält Manches, was nicht geradezu unrichtig ist, doch macht sich der Verfasser auch kein Bedenken, das Richtige mit offenbar Unrichtigem zu mischen, wenn es gilt den Wert seines Erzeugnisses zu erhöhen. So muss z. B. Euklids Geometrie die analytische heissen, damit er als dessen Gegner die Bezeichnung synthetisch für die seinige in Beschlag nehmen kann. Im ganzen können wir unser Urteil nur dahin abgeben, dass das Buch den Hauptzwecken des mathematischen Unterrichts gänzlich fremd ist, für Verstandesbildung nicht das geringste leistet und nur geeignet ist Unklarheiten zu verbreiten.

Hoppe.

Erwiderung, betreffend Bardey's Aufgabensammlung.

In einer Controverse mit Herrn Dr. Bardey hatte er mich zu dem brieflich gegebenen Vorwurf gezwungen, dass seine (Bardey's) Sammlung von Aufgaben der Arithmetik viele solche enthalten, die

gleich oder formengleich mit denen des älteren Heis (Aufgaben-Sammlung der Algebra) seien. Darauf schrieb Herr Bardey: nicht er habe Heis ausgenutzt, es habe vielmehr Heis seine schönen Aufgaben (erschienen 1869) aus seinem (Bardey's) Buche (erschienen 1871!) entnommen.

Nun veröffentlichte Herr Bardey sogar in der X. Auflage seiner Sammlung im Anhange an das Vorwort folgendes:

„Da mir von Herrn Sinram der Vorwurf gemacht ist, ich habe „viele Aufgaben von Heis entlehnt, so muss ich auch die Sache hier „klar stellen. Wissentlich ist nur Nr. 103 (S. 154) entlehnt, unter „derselben steht: Heis Aufgabensammlung. Von Nr. 289 (S. 108) „und 56 (S. 120) bemerkte ich erst 20 Jahre nach der Notirung, „dass sie im Heis ständen."

Der Vorwurf, den ich Herrn Bardey gemacht habe, stützt sich auf folgende Tatsachen.

In kurzer Zeit fand ich unter den in einigen Capiteln enthaltenen 2300 Aufgaben von Bardey über 300 solche, die mit Heis übereinstimmen, von denen einige hier zum Beleg aufgeführt werden sollen:

Heis 23. Aufl. 1869		Bardey 1. Aufl. 1871		Heis		Bardey	
				pg.	nr.	pg.	nr.
pg.	nr.	pg.	nr.		30		85
13	40	92	89		48		91
	76	99	292		50γ		105
	72β		344		14		118
157	105	125	34		72α	215	25
154	83	137	37		55		42
152	67	142	73		59β		43
187	34	152	101		63	219	14
189	48β	153	126		74β	221	14
193	94α	157	57		72α		13
229	217β	188	13	283	15 sq.	236	1 sq.
	225		12		1 ...		12 ...
		194	13		7		33 ...
	227		30		20		35 ...
	228		31		3		37 ...
	44	198	20		25		39 ...
	60		96		27		47 ...
	61		97		17 ...		53 ...
	62		98		2 ...		68 ...
258	31	212	69		34		94
	53		72		36 ...		88 ...

Einzeln betrachtet würde manche Uebereinstimmung noch eine zufällige sein können. In folgenden Beispielen, so wie manchen andern, möchte dies schwer zu glauben sein:

Heis		Bardey		
pg.	nr.	pg.	nr.	
133	39	92	87	$1,111 - 0,1111x = 0,3333$
	77	99	289	$\frac{1}{1,4142 - \frac{1}{x}} = 1,4142$
139	149	110	56	$\sqrt[10]{10} = \sqrt[x]{1,37129}$

Dass Hr. Bardey auch andre Aufgabensammlungen, z. B. die von Meyer Hirsch und Martus ausgenutzt hat, werden diejenigen finden, die einen Vergleich anstellen wollen. So stehen im Bardey von pg. 213 bis 224, also auf 12 Seiten, 23 Aufgaben aus dem Martus, z. B.

Martus 1. Aufl. 1864	Bardey 1. Aufl. 1871	
nr.	pg.	nr.
848	213	105
890	220	29
895	224	34
894		35

Hiermit schliesse ich diese von Hrn. Bardey mir abgenötigte Arbeit, indem ich die Entscheidung darüber, ob der Vorwurf, den ich Hrn. Bardey gemacht habe, begründet war, dem Urteile der Herren Fachgenossen anheim stelle.

Hamburg, im Oct. 1883. Th. Sinram.

Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Zum Gebrauche für Schule und Praxis bearbeitet von F. G. Gauss. Stereotyp-Druck. Siebente Auflage. Halle a. S. 1882. Eugen Strien. 145 S.

Das Buch enthält auf 19 Seiten die 5stelligen gemeinen Logarithmen der Zahlen 1 bis 10000 und auf 2 S. die 7stelligen von da bis 11009; dann auf 1 S. Angaben über gewisse Kreisbogen; dann auf 58 S. die 5stell. Logarithmen der Sin., Tang., Cotang. und Cos. der Winkel durch alle Minuten, mit kleinerer Teilung für die kleinsten Winkel; dann auf 12 S. die 5stell. Log. zur Berechnung der Summe oder Differenz zweier Zahlen aus ihren Logarithmen; dann die 5stell. natürlichen Log. der Zahlen bis 1109 und die 8stell.

Vielfachen des Modulus der brigg. Logarithmen und seines reciproken Wertes; dann auf 11 S. die 4stell. Sin., Cos., Tang. und Cotang., Sehnen und Bogenhöhen; dann einige 5stell. Bogenlängen; dann eine kleine Tafel über die Relation der Radien, Kreise und Kreisflächen; dann die 4stell. Quadratzahlen durch die 100tel von 1 bis 10; dann die 4stell. Kubikzahlen, Kugeloberflächen und Kugeln von 1 bis 50; dann die Dimensionen der Erde in Toisen und Meter nebst Logarithmen; dann die Lehre vom metrischen Mass-, Gewichts- und Münzsystem; dann Vergleichung verschiedener Masse; dann physikalische Zahlenangaben; dann noch 2 Auszüge. Es folgen die nötigen Erläuterungen. Die Differenzen nebst allen Zehnteln zum Interpoliren sind bei allen regelmässigen Tafeln zur Seite angegeben.

Im Nachwort verwirft der Herausgeber schlechthin bis auf specielle Ausnahmen alle Anwendung von mehr als 5stelligen Logarithmentafeln. Seine Gründe sind höchst oberflächlich und einseitig. Wenn er aus dem Genauigkeitsgrad von Messungen direct auf das Bedürfniss der Rechnung schliesst, so hat er nur gewisse Zwecke und Berufszweige vor Augen. Der Schluss ist nicht einmal für alle praktischen Rechnungen richtig, an die theoretischen hat er bei den „wissenschaftlichen" gar nicht gedacht.

Wir stimmen dem Herausgeber darin bei, dass für die Schule ausschliesslich der Gebrauch von 5stelligen Logarithmentafeln passend ist, aber nicht weil der Schüler mehrstellige später nie anzuwenden brauchte, sondern weil sie zur E r l e r n u n g des Gebrauchs vollkommen hinreichend sind, bei mehrstelligen nur Zeit und Mühe verschwendet wird. Die Schulen als Bildungsanstalten würden ihre Bestimmung ganz verfehlen, wenn sie den Schüler, statt ihn durch gehöriges Verständniss zum Gebrauch aller zweckmässig eingerichteten Tafeln zu befähigen, zum Gebrauche einer bestimmten Tafel abrichten wollten.

Was sonst im Nachwort zur Rechtfertigung getroffener Wahl gesagt ist, ist ziemlich selbstverständlich; was aber darin nicht gesagt ist, möchte doch noch zu mancher Frage Anlass geben. Warum hat der Herausgeber die Seiten der Logarithmentafel durch eine untergesetzte Tafel verkürzt, die mit ihrem Hauptgebrauche nichts zu tun hat, und, zum Teil infolge davon, für die Haupttafel so kleine Ziffern angewandt, dass man sie nur bei vollem Tageslicht ohne Mühe erkennt? In beiden Dingen ist er Bremiker nachgefolgt, der leider von dem deutlichen Druck der alten Vega'schen Tafeln abgegangen ist. Im Gegenteil hat August die Forderung der Deutlichkeit für wichtig genug gehalten um zugunsten grösserer Ziffern das Format der neuen Ausgabe zu vergrössern. Es ist dies ein Vorzug, welcher dessen Tafeln zur Einführung in Schulen soviel tauglicher macht als

die Gauss'schen, dass neben jenen kaum noch ein Grund zur Herausgabe dieser ersichtlich ist, der aber auch dem Rechner bei andauernder Arbeit eine bedeutende Zeitersparniss bringt. Letztern Unterschied merkt freilich derjenige nicht, der die Deutlichkeit nach dem ersten Anblick einer Seite schätzt; er wird erst fühlbar, wenn man oft von der Rechnung zum Buch und wieder zurückblicken und sich vor Fehlsehen der Ziffern hüten muss. H.

Bremiker's logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit sechs Decimalstellen. Neu bearbeitet von Dr. Th. Albrecht, Professor und Sectionschef im Königl. Preuss. Geodätischen Institut. Zehnte Stereotyp-Ausgabe. Berlin 1883. Nicolai. 598 S.

Die 8. Stereotypausgabe, besorgt von C. Bremiker, erschienen 1881, ist im 269. litt. Bericht S. 7. besprochen. Die 10te erscheint mit einer bedeutenden Vermehrung im trigonometrischen Teile, indem sie innerhalb der ersten 5 Grade durch alle Secunden durchgeführt ist, in der Form der 7stelligen Tafel ganz gleich. Die Tafel der Additions- und Subtractionslogarithmen ist unverändert geblieben. Die Angaben astronomischer Constanten sind vermehrt. H.

Mechanik.

Developments in the kinetic theory of solids, liquids and gases. By H. T. Eddy, C. E. Ph. D. Cincinnati. (Read before the Section of Chemistry and Physics, April 26, 1883.) Scientific Proceedings of the Ohio Mechanics' Institute. R. B. Warder, Editor. Vol. II. p. 82—97.

Die Zeitschrift ist unter verschiedene Departements und Sectionen geteilt. Die Section für Mechanik steht vielleicht dem mathematischen Interesse noch am nächsten; doch sind auch die aus ihr hervorgehenden Aufsätze fast ausschliesslich auf die Ingenieur-Praxis gerichtet; daher mag der oben citirte Aufsatz hier zur Besprechung gewählt sein als einer, welcher sich der Theorie zuwendet, freilich mehr um sie zu verwerten als um sie zu fördern. Er besteht aus 2 Abschnitten. Der erste untersucht die Gestaltung der Gleichung der lebendigen Kraft unter der Annahme, dass jedes Molecül eines Gases aus 2 Atomen besteht, und zwar soll er zeigen, dass in Fällen partiellen Zwanges, der noch keine vollen Grade der Freiheit der Bewegung aufhebt, die Energie nicht mehr unter die Coordinaten gleich verteilt, sondern durch jenen Zwang beeinflusst ist, wie der Verfasser in einem frühern Aufsatze: „An extension of the theorem of the virial, etc.“ l. c. p. 26—43 — behauptet hat. Der Wider-

spruch, den diese Aufstellung scheinbar ergebe, beruhe auf einem Irrtum, was sich an jenem einfachsten Falle am besten erkennen lasse. Sind die 2 Atome in starrer Verbindung, so hat das Molecül eine Freiheit von 5 Grad, nämlich 3 Translationen und 2 Rotationen. Schreibt man nun jeder dieser Bewegungen eine Energie $= \frac{1}{2}pv$ zu (p spec. Druck, v Volum), so wird die lebendige Kraft $= \frac{5}{2}pv$. Rechnet man statt dessen die Bewegung jedes Atoms unter dem Einfluss einer Kraft, die den Abstand constant erhält, einzeln, so findet der Verfasser als Wert der lebendigen Kraft $\frac{3}{2}pv + \frac{1}{2}\Sigma rR$, wo r den constanten Abstand, R den Mittelwert der Spannung bezeichnet, für welchen er den Ausdruck $\frac{1}{2}mr(\varphi'^2 + \psi'^2)$ einsetzt, wo φ', ψ' die Winkelgeschwindigkeiten um zwei zu r normalen Axen sind. Mit Anwendung der im frühern Aufsatze erhaltenen Resultate ergibt sich Uebereinstimmung zwischen den Resultaten von beiderlei Rechnung. Jetzt werden die Atome in unendlich starke elastische Verbindung versetzt, so dass r durch Centrifugalkraft in $r + 2\delta r$ übergeht. Es zeigt sich, dass die lebendige Kraft der innern Bewegung nahezu $= \frac{1}{2}pv\frac{\delta r}{r}$, also proportional der Oscillationsweite ist. Wäre die Elasticität in r nicht der ersten Potenz der Entfernung aus der Gleichgewichtslage, sondern einer höhern oder niedern proportional, so würde nur der Coefficient $\frac{1}{2}$ bzhw. grösser oder kleiner ausfallen, die Proportionalität mit δr hingegen fortbestehen. Das Resultat ist dasselbe, wenn das Molecül aus beliebig vielen Atomen besteht. Es widerspricht aber dem, was Boltzmann und Watson durch die Methode der verallgemeinerten Coordinaten gefunden haben. Letztere gibt das Gesetz der Verteilung der Geschwindigkeiten, die Gleichung der lebendigen Kraft einen Mittelwert. Zur Vergleichung würde aus jener Bestimmung der Mittelwert zu ziehen sein. Hier aber handelt es sich einesteils erst darum die in jeder Bestimmung enthaltene Constante durch Versuche zu ermitteln, anderenteils darf das Gesetz der Verteilung der kinetischen Energie nicht für jeden Freiheitsgrad als gleich angesehen werden, auch hier sind unter verschiedener Annahme Versuche anzustellen. Es war die Aufgabe des Gegenwärtigen zu zeigen, dass die Verteilung der kinetischen Energie von den Kräften abhängt, während man sie bisher als davon unabhängig betrachtet hat.

Der zweite Teil des Aufsatzes handelt von Versuchen die Strahlung der Wärme zu erklären, wenn man an der Hypothese festhält, dass nicht die Molecüle, sondern nur innerhalb derselben die Atome um Gleichgewichtslagen vibriren, jene vielmehr auf einander keine Wirkung üben. Hierbei ist keine Rede von einem Unterschied zwischen Gas und Aether. Es kommt daher die gewöhnliche Ansicht, dass die Wärmestrahlung mit der Lichtstrahlung durch das elastische Aethermedium hervorgebracht wird, gar nicht zur Sprache. Unter

der Voraussetzung, dass es im ganzen Raume nur indifferente Molecüle gibt, werden nun alle Inconvenienzen durchgegangen, die einer Erklärung durch Translation sowol als durch Atomvibration entgegenstehen. Nachdem der Verfasser beides verworfen hat, glaubt er noch einen Schritt weiter gehen zu müssen und entwickelt die Ansicht, dass die Annahme einer Vibration innerhalb jedes Atoms Erfolg verspreche. H.

Vermischte Schriften.

Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Seriei tertiae vol. XI. Upsala 1883. Ed. Berling.

Von den 2 Heften des jetzt vollendeten Bandes ist das erste 1881 erschienen. Der Band enthält 3 mathematische Abhandlungen, nämlich:

A. Berger: Ueber einige Anwendungen der Γ Function auf die Zahlenlehre.

A. Berger: Ueber eine Anwendung der Classenzahlen der quadratischen binären Formen für eine negative Determinante.

Ernst Pfannenstiel: Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit 2 unabhängigen Veränderlichen.

Unter den 6 übrigen Abhandlungen gehört eine zur localen Meteorologie, zwei zur Zoologie, eine zur Pflanzenphysiologie, eine zur Chemie, und eine zum Studium afrikanischer Sprachen. H.

Science. Published weekly at Cambridge, Mass. U. S. A., by Moses King. Vol. I.

Dies neue Journal ist dem wissenschaftlichen Verkehr in Amerika gewidmet. Es gibt Nachricht über alle wesentlichen Fortschritte und Entdeckungen in den einzelnen Wissenschaftszweigen, und geht auf Technisches nur ein, soweit es die Gegenstände erfordern. Rein mathematische Entdeckungen erhalten eine gleiche Berücksichtigung. Es wird herausgegeben von The Science Company, deren Präsident: Daniel C. Gilman in Baltimore, Md. Vicepräsident: Alexander Graham Bell in Washington, D. C. Es beginnt am 9. Febr. 1883. Die wöchentliche Lieferung enthält mindestens 26 breite Octav-Seiten. Jährlich erscheinen 2 Bände mit circa 1500 Seiten. H.

Johns Hopkins University Circulars. Published with the approbation of the Board of Trustees. Vol. II. Baltimore 1883. 4°.

Diese Zeitschrift, von der etwa monatlich eine Numer erscheint, gibt Nachricht über die Tätigkeit der Universität, zum geringern Teil über Litteratur. Betreffend die Mathematik werden ausser den Vorlesungen die Vorträge in der mathematischen Gesellschaft aufgeführt.

H.

Nordisk Revy, tidning för vetenskaplig kritik och universitets angelegenheter, under medverkan af Proff. O. J. Alin, etc. utgifven af Docenten Adolf Noreen, Upsala.

Der Herausgeber bezweckt mit dieser Zeitschrift durch gegenseitige Kritik der Gelehrten der nordischen Reiche einen regeren wissenschaftlichen Verkehr unter denselben anzubahnen, indem er dem Mangel an letzterm die Schuld beimisst, dass Skandinavien an wissenschaftlichen Erzeugnissen andern Nationen nicht gleich stehe. Also nicht um eine specifisch nationale Wissenschaft zu begünstigen, sondern um einen Mangel zu ergänzen, werden hier ausschliesslich nordische Erzeugnisse recensirt. H.

Berichtigung.

Im litter. Berichte des 70. Bds. d. Archivs S. 12 bespricht Herr Prof. Hoppe mit einigen Worten das unter meiner Redaction erschienene „Handbuch der Mathematik“ (Breslau, Trewendt) und sagt u. A.

> „Ein Teil ist von Schlömilch unter dem Titel „analytische Geometrie“ bearbeitet etc.“

Dieser unrichtigen Angabe gegenüber erkläre ich, dass kein Teil des Handb. d. M. von mir, und dass speciell der Abschnitt „analyt. Geom.“ von Herrn Prof. Dr. Heger hier bearbeitet worden ist. Die Titel geben dies deutlich genug zu erkennen.

Dresden, Oct. 83.

Dr. O. Schlömilch,
Geh. Schulrath im K. S. Cultusministerium.

Der Titel des Buches ist:

Handbuch der Mathematik herausgegeben von Geh. Schulrath Dr. Schlömilch unter Mitwirkung von Dr. Reidt und Prof. Dr. Heger.

Die ersten Abschnitte: Arithmetik und Algebra, Planimetrie, Stereometrie, Trigonometrie — sind von Reidt, die folgenden: Darstellende Geometrie, „analytische Geometrie“, Differential-, Integralrechnung, Ausgleichungsrechnung, Renten- etc. Versicherung — von Heger bearbeitet. Red.

Litterarischer Bericht
CCLXXX.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Abriss der [illegible] Von Dr. [illegible] **Bacharach** [illegible] realschule in Würzburg [illegible] 78 S.

Die Theorie [illegible] die Berechnung [illegible] den Anfang [illegible] auf den Begriff [illegible] Körpers [illegible] Begriff [illegible] allgemeinen [illegible] Autoren [illegible] die Differential[illegible] gänzt [illegible] sind neue [illegible] Riemann [illegible] sinesq. [illegible] rücksicht[illegible] andrer [illegible] Flächenp[illegible] wendungen [illegible] u. a. m. [illegible] samte Theorie [illegible] zelnen [illegible]

Teil [illegible]

liches Verhältniss zu stellen in befriedigender Weise gelöst, während sie den Inhalt, soweit er nur durch eingehende Rechnung erkannt werden kann, durch Nachweis aller erwähnten Arbeiten ersetzt. Sie reiht sich demnach als ein wertvoller Beitrag an diejenigen Monographien an, welche nach dem erst in neuer Zeit gefassten Plane einer künftigen Geschichte der Mathematik durch Bearbeitung der Geschichte einzelner Probleme als Grundlage zu dienen fähig sind, und deren bereits eine kleine Anzahl seit gegebener Anregung der Idee erschienen sind. H.

System der Chronologie. Unter besonderer Berücksichtigung der jüdischen, römischen, christlichen und russischen Zeitrechnung, sowie der Osterrechnung. Als Beitrag zur Culturgeschichte insbesondere für Historiker, Philologen, Theologen und Freunde der Astronomie, sowie für Gebildete aller Stände gemeinverständlich dargestellt von F. J. Broekmann, Oberlehrer am Kgl. Gymnasium zu Cleve. Stuttgart 1883. Ferdinand Enke. 112 S.

Da das umfassende Werk Jdeler's: „Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie“ — nur Wenigen zugänglich ist, ein anderes umfassendes Werk über Chronologie nicht existirt, so soll das gegenwärtige kleine Buch einem grössern Publicum als ein Hülfsmittel dienen um mit der successiven Entstehung der Zeitrechnung der civilisirten Völker bekannt zu werden. Es behandelt nach einander: die Zeitrechnung der Hebräer, die der Römer, wozu noch die julianische gerechnet ist, die gregorianische Reform, die christliche Osterrechnung, die byzantinische oder russische Kalender- und Osterrechnung, den republicanischen Kalender der Franzosen, die Frage über das Geburtsjahr Christi und die Zeitrechnungsperioden und giebt am Schlusse 4 Tabellen. Der Verfasser macht nicht den Anspruch damit etwas vollendetes, abschliessendes geboten zu haben. Wir würden auch ohne dies an ein Buch von so geringem Umfange keine weitgehenden Anforderungen stellen. Doch kann man wol von dem was überhaupt als Hülfsmittel dargeboten wird, erwarten, dass wenigstens in einer Beziehung damit etwas dauerndes, befriedigendes geschaffen worden sei. Es würde genügen, wenn nur die heterogenen Elemente der geschichtlichen Darstellung gehörig geschieden und das Ganze übersichtlich geordnet wäre. An einem Bilde der Verworrenheit und Uneinigkeit, soviel deren auch existirt haben mag, kann dem Leser wenig gelegen sein. In dieser Beziehung hätte [illegible] etwas besseres schaffen lassen. Die Darstellung der G[illegible] alten Zeit, welcher der Verfasser überhaupt geringe V[illegible] zulegen scheint, deutet am wenigstens darauf [illegible] gest[illegible] hätte. Er beginnt mit der gegenw[illegible]

Juden, bestimmt dann die Zeit ihrer definitiven Regelung, geht dann auf den Pentateuch zurück und fährt dann in irgend welchem Teile dieses 3000 jährigen Zeitabschnitts fort, bald anscheinend referirend, bald anscheinend forschend, bald eine astronomische Erklärung, bald einen Excurs auf die Neuzeit einschaltend, stets Neues bringend, was er in der Tat in einer deutlichen, exacten, gefälligen und einnehmenden Sprache vorträgt. An alledem vermissen wir eine Disposition des Stoffs, aus der zu ersehen wäre, was man wissen müsste, wieviel davon bekannt ist, und welche Fragen übrig bleiben. Die Bestimmung des Buchs für soviel verschiedene Classen von Lesern, wie auf dem Titel steht, lässt vermuten, dass der Verfasser wol keine von diesen Classen im Auge gehabt und an deren Fragen gedacht hat, vielmehr bloss von seinen Studien geleitet worden ist. Wie sollte man sich z. B. die Behauptung, S. 3., anders erklären: von der Schaltmethode der Juden aus ältester Zeit sei nirgends die Rede, doch sei soviel sicher, dass je nach der Erwartung der Gerstenernte ein Tag, mehrere, eine Woche, ein Monat zwischen den Jahren eingeschaltet worden sei? Eine solche Aufstellung, die mit der Bestimmung, dass das Jahr mit dem Monat, der Monat mit dem Neumonde beginnt, in offenbarem Widerspruche steht, soll dem Leser genügen, und ob für etwas spätere Zeit doch wol noch Zeugnisse vorhanden sind, bleibt ganz unerwähnt. In der Geschichte der neuen, julianischen und gregorianischen Zeitrechnung, namentlich bezüglich auf die Osterrechnung, welcher darin eine bedeutende Stelle eingeräumt wird, war es mehr als in der frühern Geschichte geboten die Sacherklärung von der Entwickelung und den Verschiedenheiten, überhaupt von jeder Art historischen Angaben deutlich zu trennen, weil sonst entweder beide Elemente Lücken behalten oder die Uebersicht verloren geht. Hier ist beides ziemlich gleichzeitig behandelt, zwar in leidlichem Zusammenhange und in besserer Ordnung dargestellt, doch unbekümmert, welche Fragen übrig bleiben. Was das Buch an positivem Inhalt gibt, für sich allein betrachtet, kann sehr wol befriedigen; die im Vorstehenden gemachten Ausstellungen sind Besserungsvorschläge; dass sie sich nicht auf Einzelnes beziehen, ändert daran nichts: die Norm der Auffassung ist eben das Besserungsfähige; vom Einzelnen würde erst nachher die Rede sein können.

H.

Willebrordus Snellius. Door P. van Geer. (Overgedrukt uit het „Album der Natuur", Jaarg. 1884.). Leiden 1883. 17 S.

Es [illegible] das [illegible]ige, was vom Leben der Snellius Vater und Sohn [illegible] Der Vater, Rudolf Snel van Roijen, genannt Rud[illegible] [illegible], geboren 1546 in Oudewater,

empfieng seine erste Ausbildung in Utrecht, besuchte die Universitäten Jena, Wittenberg und Heidelberg, war magister artium in Marburg, beschäftigte sich hier hauptsächlich mit Philosophie und unterrichtete im Griechischen, Lateinischen und Hebräischen. Später zog er nach Italien und gieng in Pisa und Florenz zum Studium der Medicin über, von wo er erst nach 16 Jahren in sein Vaterland (Holland) zurückkehrte. Er liess sich in Oudewater nieder und heiratete, zog aber bald nach der neugegründeten Universität Leiden, studirte daselbst Medicin, ward Lector, dann ausserordentlicher Professor für Mathematik und Hebräisch. Bei ihm hörte Prinz Moritz. Er stand in freundschaftlichem Briefwechsel mit dem Landgrafen von Hessen, zog eine zeitlang dahin und kehrte 1601 als ordentlicher Professor nach Leiden zurück, wo er 1613 starb. Er war Zeitgenosse der Theologen Gomarus und Arminius, befreundet mit letzterem, daher im Streite beider wahrscheinlich auf dessen Seite. Er hinterliess mathematische und naturwissenschaftliche Schriften, die jedoch nicht aufgefunden worden sind. Sein einziger Sohn war Willebrord, geboren 1591 in Leiden. Dieser entschied sich von Jugend an für Mathematik und gab im 17ten Lebensjahre sein erstes Werk heraus, nämlich über den Almagest des Ptolemaeus. Er lernte in Würzburg Adrianus Romanus, in Prag Tycho Brahé und Kepler kennen und war Freund des letzteren. Er studirte ferner in Paris. Nach Durchwanderung der Schweiz kehrte er nach Leiden zurück, wo er 13 Jahre als Nachfolger seines Vaters Professor der Mathematik bis zu seinem Tode 1626 war. Ausserdem ist von seinem Leben nichts bekannt; nur aus einmaliger Erwähnung eines Sohnes ist zu ersehen, dass er verheiratet war. Von seinen Werken sind zwei bei Lebzeiten seines Vaters erschienen: das eine in 3 Teilen über ein Manuscript von Pappus, das andre über die Werte der Geldsorten der Griechen, Römer und Israeliten. Aus der Zeit, wo er in Leiden angestellt war, ist sein erstes Werk betitelt Cyclometricus, worin er das Verhältniss von Kreis und Durchmesser, kürzer als Ludolf van Ceulen, aber noch in äusserst mühevoller Weise, ohne Gebrauch von Logarithmen, auf 34 Stellen berechnet. Dann folgte sein Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie, erst nach seinem Tode von einem seiner Zuhörer herausgegeben; es enthält die Berechnung einer Sinus- und Tangententafel ohne Logarithmen und die Sinusproportion am Dreieck, ausserdem praktische Anwendung; in der sphärischen Trigonometrie werden die Relationen des Neben- und Poldreiecks zugezogen. Ferner findet sich von ihm beschrieben ein Komet von 1518 nebst dem Rohtmann'schen Kometen von 1585. Seinen Schriften über die Beobachtungen an der Kasseler Sternwarte wird wenig Wert beigelegt. Auch verharrte er gegenüber Coppernicus auf der Ptolemä[illegible]en Anschauung. Ferner hat er über Nautik und die Eigen-

schaften der Loxodrome geschrieben. Einen dauernden Ruf hat sein Werk „Eratosthenes Batavus", erschienen 1617, über Bestimmung der Grösse der Erde, unter Annahme der Kugelgestalt, erworben. Sie beruht auf Gradmessung, die er durch ein über Holland ausgedehntes Dreiecksnetz selbst ausführte. Der berechnete Meridian ist etwa um $\frac{1}{30}$ zu klein. Auf seine Anregung wurden dann die Dreiecksnetze über andere Länder ausgedehnt. In demselben Werke findet sich auch die mit Unrecht nach Pothenot benannte geodätische Aufgabe gestellt und gelöst. Es wird hier darauf aufmerksam gemacht, dass in diesem Archiv T. II. S. 210 Verdam die Priorität des Snellius nachweist, dass trotzdem in einem spätern Artikel desselben Archivs wieder von der Pothenot'schen Aufgabe die Rede ist. Es wird erklärt, wie es gekommen sei, dass das von Descartes zuerst aufgestellte Gesetz der Lichtbrechung dem Snellius zugeschrieben sei. Allerdings hat dessen Zuhörer Hortensius ausgesagt, dass Snellius das Gesetz an der Universität gelehrt habe, doch findet sich in Snellius Schriften nichts davon. Es werden dann die ferneren Untersuchungen über die Urheberschaft durchgegangen, und die Gründe zusammengestellt, welche für die des Snellius sprechen, und zwar in dem Sinne, dass Descartes bei seinem dreimaligen Aufenthalt in Holland die Entdeckung von Snellius empfangen habe. H.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Tomo XV. Roma 1883. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Der Inhalt ist folgender.

Antonio Favaro: Ueber das Leben und die Werke von Bartolomeo Severo, Schweizer Mathematiker des 17. Jahrhunderts.

Ch. Henry: Ueber die zwei ältesten französischen Lehrbücher des Algorithmus und der Geometrie. Beide, altfranzösisch, sind hier nach den Manuscripten gedruckt.

E. Narducci: Ueber zwei ungedruckte Abhandlungen vom Abacus enthalten in zwei Codices Vaticani des 12. Jahrhunderts. Beide, lateinisch, einer von Turchillus, der andre anonym, sind hier gedruckt.

Joseph Perrott: Ueber eine spanische Arithmetik des 6. Jahrhunderts.

Moritz Steinschneider: Ergänzung zur Notiz über die dem Peter III. von Aragonien zugeschriebenen astronomische Tafeln.

S. Günther: Der Briefwechsel zwischen Gauss und Sophie Germain. Ins Italienische übersetzt von A. Sparagna.

D. Bierens de Haan: Historisch wissenschaftliche niederländische Bibliographie der wichtigsten Werke, deren Verfasser im 16. 17. und 18. Jahrhundert geboren sind, über die mathematischen und physikalischen Wissenschaften und deren Anwendungen.

P. Riccardi: Giacomo Manzoni. Studien analytischer Bibliographie. Zweite Studie, über die ersten Erfinder der Drucklettern im Dienste der Sculptur, der Miniatur und der Schrift; Bücher und Exemplare von Charakteren, eingeschnitten oder gedruckt bis zur Mitte des 16. Jahrhunderts; deren Verfasser. Mit 8 xylographirten Tafeln. Bologna 1882 bei Caetano Romagnoli, Herausgeber der königl. Commission für die Sprachregelung.

B. Boncompagni: Ueber die Acten von der Geburt und dem Tode des Pierre Simon Laplace. Es folgen die Acten gedruckt.

E. Narducci: Ueber einen ungedruckten Commentar von Rémi d'Auxerre zum „Satyricon" des Martianus Capella und andre Commentare zu demselben. Bruchstück der Arithemetik des Martianus Capella. Commentar von Rémi d'Auxerre zu dieser Arithmetik.

A. Favaro: Die Galileianischen Autographien im Archiv Marsigli in Bologna.

A. Genocchi: Musterung der Schriften über die Deviation der Pendel und den Foucault'schen Versuch.

Ch. Henry: Die mathematischen Kenntnisse von Jacques Casanova de Seingalt.

B. Boncompagni: Ueber das Leben und die Arbeiten von Antoine Charles Marcellin Poullet-Delisle.

Aristide Marre: Ueber acht ungedruckte Briefe des P. Claude Jaquemet de l'Oratoire. Es folgen die acht Briefe.

Pubicationsverzeichnisse im 2. 4. 6. 8. 10. und 12. Hefte.

Zwei der genannten Abhandlungen sind besonders herausgegeben. Es sind die folgenden. H.

Atti di nascita e di morte di Pietro Simone Marchese di Laplace pubblicati da B. Boncompagni. Roma 1883. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. 4⁰. 22 S.

Es werden 65 Schriften aufgeführt, in welchen eine Angabe über Laplace's Geburt oder Tod oder über beides vorkommt. Im Geburtsjahr 1749 stimmen sie überein, dagegen werden 4 verschiedene Tage angegeben, der 23. 22. 27. und 28. März. Aus dem Register der Taufen, Trauungen und Beerdigungen, aufbewahrt in der Mairie de Beaumont en Auge, wird ersehen, dass P. S. Laplace am 23. März geboren, am 25. März getauft ist, Sohn von Pierre Laplace und seiner Gattin Marie Anne Sochon. Das Document ist wörtlich mitgeteilt. Auf Grund desselben ist die Angabe in 26 jener Schriften richtig, in 17 Schriften und 5 Auflagen eines Conversationslexikons irrig. Ebenso findet sich übereinstimmend das Todesjahr 1827 angegeben, der Tag hingegen als der 5. 6. und 7. März und der 5. Mai. Das Civilstandsarchiv der Cancellei des Tribunals der Präfectur des Seine-Departements zeigt, dass der 5. März der Todestag ist. In 28 Schriften und 2 Auflagen des Brockhaus'schen Conversationslexikons sowie einigen Auflagen anderer ist die Angabe richtig, in 16 Schriften und 5 Auflagen von Encyklopädien irrig. H.

Intorno a vari comenti fin qui inediti o sconosciuti al „Satyricon" di Marziano Capella memoria di Enrico Narducci seguita dal comento di Remigio d'Auxerre al libro VII. „De Arithmetica" della stessa opera. Roma 1883. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. 4°. 78 S.

Martianus Mineus Felix Capella hat vor 439 n. Chr. wahrscheinlich in Carthago gelebt und daselbst 9 Bücher geschrieben, 2 betitelt „De nuptiis Philologiae et Mercurii", die übrigen „De septem artibus liberalibus", nämlich Grammatik, Dialektik, Rhetorik, Geometrie, Arithmetik, Astronomie und Musik. Es folgt eine reiche Sammlung von Litteratur bezüglich auf diese Schriften; dann ein Bruchstück aus der Arithmetik. Es ist eine Ursprungsphilosophie, welche mit der successiven Bildung der Zahlenreihe die Entstehung der Urbegriffe und Weltelemente verknüpft. Hierzu folgen die Texterklärungen von Rémi d'Auxerre. H.

Zero. B. Boncompagni. Estratto dal Giornale degli Eruditi e Curiosi di Padova. V. II. f. 36. 4 S.

Es sind Stellen aus alten Manuscripten zusammengesucht, welche das Wort zero und gleichbedeutende, das Zeichen und die Bedeutung betreffen. In einem Manuscript von Magister Jacob von Florenz lehrt derselbe, dass zeuero = zero nicht null bedeute, sondern Freiheit lasse für beliebige Bedeutung; an andrer Stelle, dass das

Zeichen 0 unentbehrlich sei um Zehner, Hunderte, Tausende zu schreiben. In einem Lehrbuch der Arithmetik, wahrscheinlich 1346 geschrieben, findet sich eine Stelle, wo von 9 Figuren die Rede ist, durch welche alle Zahlen bezeichnet werden, nebst einer andern Figur, welche nicht null bedeute, sondern irgend eine der 9 Figuren, und welche lateinisch zero, griechisch cifra oder circhulo, von niemandem aber null genannt werde. Leonardo von Pisa spricht von der Ergänzung der 9 Figuren durch das Zeichen 0, arabisch zephirum genannt. Giovanni Targioni Tozzetti fügt zu seinem Bericht hierüber hinzu, der Ursprung des Toscanischen Wortes zero sei unbekannt. Franz Woepcke nennt zero eine Modification von zephirum. Vincent leitet zero vom hebräischen zer her, welches Kreis, Goldmünze, Krone bedeute, Nesselmann vom arabischen sahrâ sifr, das heisst leeres Feld, auch finde sich das Wort zero im spätern Latinismus. Der Verfasser hat es in keiner lateinischen Schrift, auch nicht im Glossar von Ducange gefunden. Dozy und Engelmann leiten zero vom arabischen cifr ab. Devic im ethymologischen Wörterbuch sagt, dass in den alten Lehrbüchern des Calculus das Wort sifr in zephirum verändert sei. H.

Galileo „Middleburgo“ e i figliuoli di Jansen. B. Boncompagni. Estratto dal Giornale degli Eruditi e Curiosi di Padova. V. II. f. 37. 1883. 3 S.

In einer Bibliothek zu Rom ist ein Exemplar einer Schrift: „De vero telescopii inventore“ von Petro Borello gefunden worden, welche das vom Magistrat der Stadt Middelburg auf Seland im März 1655 angeordnete Verhör zweier Zeugen, Johannes Zacharides und Sara Goedarda, ersterer Verfertiger von Fernröhren in Middelburg, letztere, wie es scheint, dessen Schwester, wiedergibt. Ersterer sagt aus, dass sein Vater Zacharias Joannides (Janssen) zuerst Fernröhre nach eigner Erfindung im Jahre 1590 verfertigt habe, dass diese bis 1618 nie länger als 16 Zoll waren, dass zwei solche Fernröhre dem Fürsten Moritz von Nassau und dem Erzherzog Albert dargeboten worden seien, dass 1618 er selbst und sein Vater die Verfertigung längerer Fernröhre erfanden, dann von wem sie zuerst nachgebildet worden seien. Die mehrfach zweideutigen, mit dem Vorigen nicht wol vereinbaren, daher nur Schwäche der Erinnerung bekundenden und von keiner Seite beachteten Aussagen der Zeugin beziehen sich bloss auf die langen Fernröhre. Am Schlusse wird noch aus einer Schrift: „Spectacle de la Nature“ von Pluche die Erzählung entnommen, wie Jansen's Kinder beim Spielen mit Glaslinsen die Erscheinung bemerkten, welche den Vater auf die Idee der Fernröhre führte. H.

Il Romagnosi e l'elettro magnetismo da cui la scoperta del telegrafo. B. Boncompagni. Estratto dal Giornale degli Eruditi e Curiosi. V. II. N. 34. 1883. 1 S.

Es werden zwei Zeugnisse dafür aufgebracht, dass Giovanni Domenico Romagnosi keinen Anteil an der Erfindung des Telegraphen hat, wie ihm in dem genannten Journal zugeschrieben worden ist.

H.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Neue Anwendungen der Wahrscheinlichkeits-Rechnung in der Statistik insbesondere bei Vertheilung der Ehen nach dem Lebensalter der Ehegatten. Von Luigi Perozzo. Deutsch bearbeitet von Oscar Elb. Dresden 1883. E. L. Knecht. 4°. 33 S.

Als neu wird bezeichnet die Anwendung der graphischen Darstellung auf statistisch bestimmte Functionen zweier Variabeln, mit Hinweis auf die Möglichkeit sie auch auf Functionen dreier Variabeln auszudehnen. Sie hatte bisher nur stattgefunden in Bezug auf das Fehlen der Wurfgeschosse nach den nach zwei Dimensionen verschiedenen Richtungen hin. Es ist nun an den vom Königreich Italien 8 Jahre hindurch geführten Tabellen über die Anzahl der geschlossenen Ehen in Abhängigkeit vom Alter des Mannes und der Frau die Bemerkung gemacht worden, dass die darstellenden Flächen beider Functionen sehr nahe übereinstimmen, sowol für das ganze Land als für einzelne Teile. Nach Vergleichung mit andern statistischen Resultaten, ergab sich überall ein gleiches Gesetz. Diese Uebereinstimmung ist offenbar darum höchst auffällig, weil die natürlichen Data für beide Functionen wesentlich verschieden sind. Die Schüsse haben einen gegebenen Zielpunkt, den zu treffen in der Absicht liegt, mithin der Wahrscheinlichkeit nach ein gegebenes Maximum, um welches herum sie ohne deutliche Grenzen variiren. Die Ehen haben im Gegenteil nur gegebene Grenzen in der Heiratsfähigkeit und der Lebensdauer, ein scharf bestimmtes Centrum hat hier keinen ersichtlichen Grund. Es wäre daher zu erwarten, dass die darstellende Fläche für die Geschosse eine Spitze über dem Zielpunkt, die für die Ehen eine Kuppel zeigen würde. Letztere Fläche ist am Schlusse der Abhandlung in Centralprojection abgebildet und erhebt sich von allen Seiten immer steiler gegen eine Spitze über einem Punkte der Basis, dessen Coordinaten sind: 28 Jahr als Alter des Mannes, 23 der Frau. Zur Vergleichung ist erstere Fläche nicht beigefügt; da sich indes eine solche Gestalt weit eher bei den Geschossen voraus-

setzen liess, so wird man geneigt sein eine Bestätigung des Satzes über die Uebereinstimmung beider Flächen anzuerkennen. Wenn jedoch die Bemerkung noch näher bestimmt und behauptet wird, das Maximum entspreche dem mittleren Lebensalter, so kann dies offenbar nur sehr ungenau zutreffen, da das mittlere (durchschnittliche) Alter des weiblichen Geschlechts wol höher, keinenfalls aber um $\frac{1}{3}$ geringer sein kann als das des männlichen. Es wird ferner bemerkt, dass die Curven des constanten Functionswerts auf beiden Flächen nahezu Ellipsen sind, doch mit dem Unterschied, dass deren Projectionen auf die Basis bei den Geschossen concentrisch sind, bei den Ehen nicht. Von letztern wird gesagt, die grosse Axe gehe durch das Maximum und laufe unter 45° zu den beiden Hauptaxen der Lebensalter der Männer und Frauen, d. h. sie durchlaufe alle Combinationen der Lebensalter, in welchen die Differenz zwischen dem Alter des Mannes und der Frau constant und gleich derjenigen ist, welche zwischen den mittleren Lebensaltern zur Zeit der Verheiratung besteht. Ausserdem bespricht die Schrift manche andere Fragen und gibt Tabellen, Formeln und Diagramme über Beobachtungen.

H.

Physik.

Die Physik im Dienste der Wissenschaft, der Kunst und des praktischen Lebens. Unter Mitwirkung von Dr. J. von Bebber, Abteilungsvorstand auf der deutschen Seewarte in Hamburg; C. Grawinkel, kais. Postrat in Frankfurt a. M.; Dr. E. Hartwig, Assistent an der Univ.-Sternwarte in Strassburg; Dr. E. Lommel, Professor an der Universität zu Erlangen; Dr. F. Melde, Professor an der Universität zu Marburg; Dr. J. Rosenthal, Professor an der Universität zu Erlangen; Th. Schwartze, Ingenieur in Leipzig; Dr. A. von Urbanitzky, Assistent an der technischen Hochschule zu Wien; Dr. H. W. Vogel, Professor an der technischen Hochschule zu Berlin; Dr. J. G. Wallentin, Professor am Obergymnasium im IX. Bezirk in Wien; herausgegeben von Dr. G. Krebs, Oberlehrer an der Musterschule (Realgymnasium) zu Frankfurt a. M. Stuttgart. Ferdinand Enke. I. Lieferung 1883. 112 S.

Das Werk soll in circa 5 Lieferungen erscheinen. In der ersten Lieferung sind die 3 Themata behandelt: die Photographie, die Spectralanalyse und die meteorologischen Stationen. Ueber jeden dieser Gegenstände wird von der Geschichte, der physikalischen Erklärung und der technischen Ausführung soviel mitgeteilt als zu einer deutlichen, richtigen und zusammenhangenden Vorstellung notwendig ist.

H.

Vermischte Schriften.

Acta Mathematica, Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. II. Stockholm 1883. F. u. G. Beijer. Berlin, Mayer u. Müller. Paris, A. Hermann. 4⁰.

Der Inhalt des II. Bandes ist folgender:

E. Goursat: Ueber eine Classe von Functionen, die durch bestimmte Integrale dargestellt sind.

P. Appell: Ueber eine Classe von Functionen zweier unabhängigen Variabeln.

C. Crone: Ueber eine Gattung symmetrischer Curven 6. Classe.

H. Poincaré: Ueber die Functionen zweier Variabeln.

E. Picard: Ueber Functionen zweier unabhängigen Variabeln, die den Modularfunctionen analog sind.

H. Valentiner: Zur Theorie der Raumcurven.

Hj. Mellin: Ueber die transcendente Function $Q(x)$.

M. Elliot: Ueber eine lineare Gleichung 2. Ordnung mit doppelt periodischen Coefficienten.

L. Bourguet: Ueber die eulerschen Integrale und einige andre einförmige Functionen. — Ueber die eulerschen Functionen.

Ch. Hermite und R. Lipschitz: Ueber einige Punkte in der Theorie der Zahlen.

G. Cantor: Ueber eine Eigenschaft des Systems aller reellen algebraischen Zahlen. — Ein Beitrag zur Theorie der Gesamtheiten. — Ueber die trigonometrischen Reihen. — Erweiterung eines Theorems der Theorie der trigonometrischen Reihen. — Ueber die unendlichen und linearen Gesamtheiten von Punkten. I—IV. — Grundlagen einer allgemeinen Theorie der Gesamtheiten. — Ueber verschiedene Sätze der Theorie der Gesamtheiten von Punkten, die in einem stetigen Raume von n Dimensionen liegen. Erste Mitteilung.

J. Bendixson: Einige Sätze der Theorie der Gesamtheiten.

H.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne publié par P. Mansion, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Docteur spécial en sciences mathématiques, etc. et J. Neuberg, Professeur à l'Athénée royal et à l'Ecole des mines de Liège. Avec la collaboration de plusieurs Professeurs Belges et étrangers. Tome troisième. Gand 1883. Ad. Hoste. Paris, Gauthier-Villars.

Der 3. Band enthält folgende Abhandlungen und Noten:

Th. Verstraeten: Ueber einen Punkt des Unterrichts in der descriptiven Geometrie.

E. Césaro: Principien des symbolischen Calculs. — Geometrische Note. — Bemerkungen über eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe.

Ed. Lucas: Beweis des Satzes von Clausen und Staudt betreffend die bernoullischen Zahlen. — Der Cravattenknoten.

J. Neuberg: Anwendungen der Determinanten. — Einige Sätze von E. Catalan aus der elementaren Geometrie. — Fläche des Dreiecks nach Ed. Lucas.

E. Catalan und P. Mansion: Ueber das Princip der Homogeneität.

Goedseels: Sätze von Hachette und Chasles über die Berührungsebenen der Regelflächen.

C. B. S. Cavallin: Ueber gewisse geometrische Mittel und den Umfang der Ellipse.

B. Boncompagni: Ueber 2 in der „Mathesis" ausgesprochene Sätze.

Muir und Césaro: Ueber den Umfang der Ellipse.

Kiehl und Neuberg: Elementar mathematische Aufgaben.

Gélin: Anzahl der verschiedenen Arten ein convexes Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke zu zerlegen.

Barbarin: Aufgaben über die Kreise.

Delboeuf: Trisection des Winkels mittelst der gleichseitigen Hyperbel. (Reproduction).

Main: 46 Ausdrücke für den Dreiecksinhalt.

Ancion: Ueber die Methode der Isoperimeter nach André und Rouché.

P. Mansion: Die Methodologie von Dauge. — Ueber die von J. Plateau entdeckten neuen singulären Punkte der ebenen Curven. — J. Plateau und W. L. Glaisher's Beweis eines Satzes von Crelle.

Legrand: Schnitt einer Geraden und einer Fläche 2. Grades.

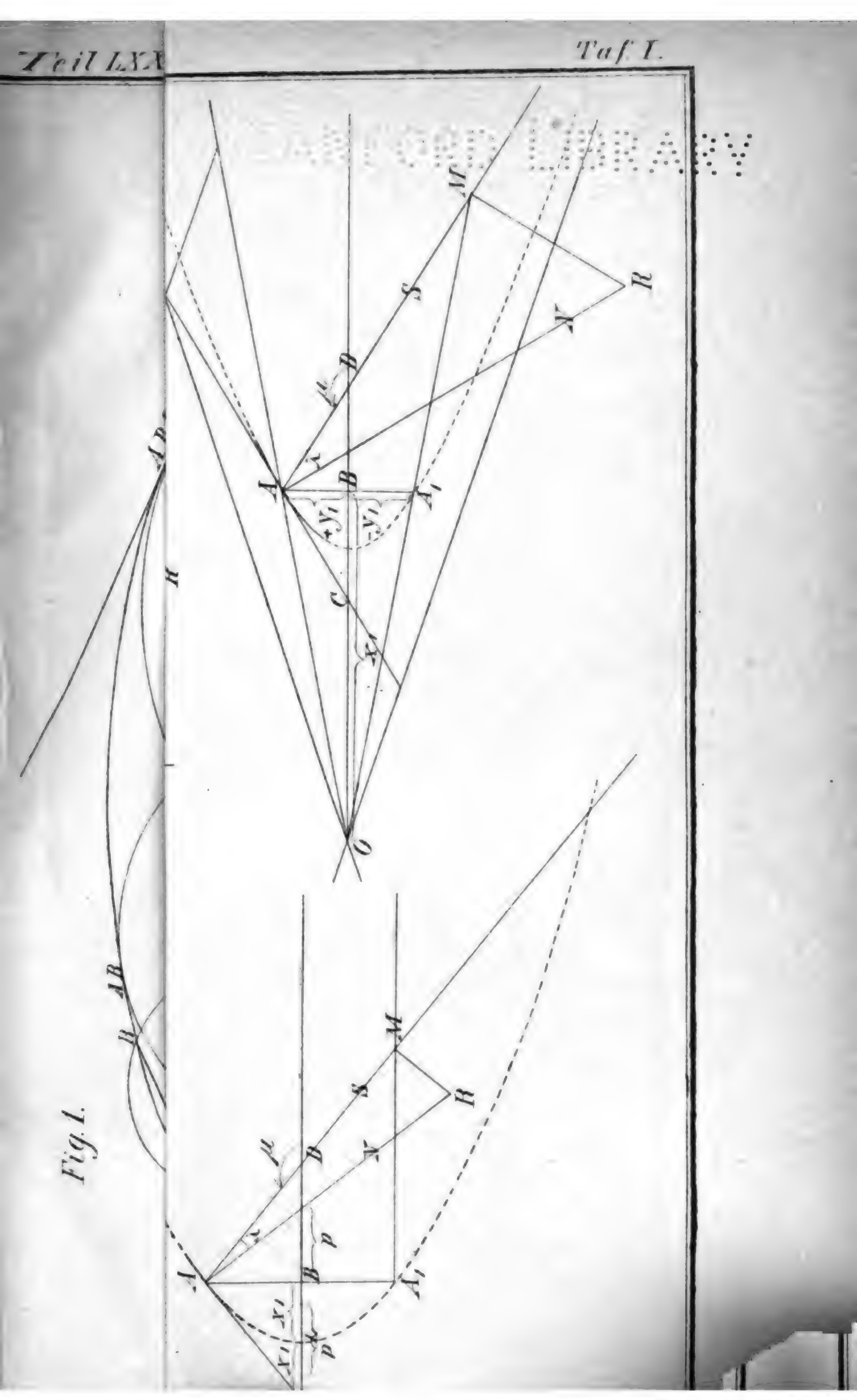
Teixeira: Ueber die Theorie der Imaginären.

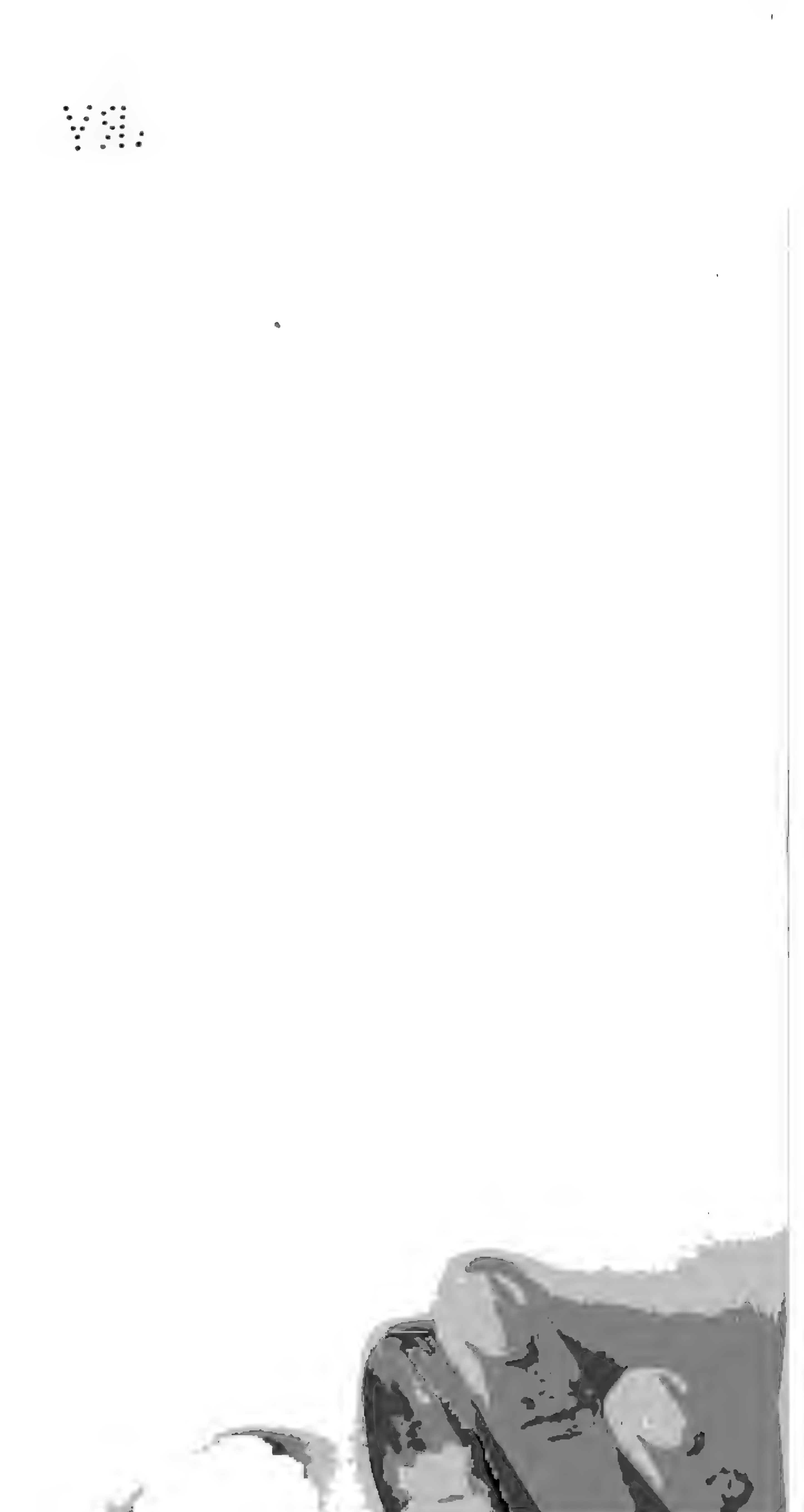
Ph. Gilbert: Aufgabe vom Maximum. — Ueber eine Eigenschaft des Ellipsoids.

Lisleferme: Construction der Tangente an gewisse Curven.

Barrieu: Note über den grössten gemeinsamen Divisor und das kleinste gemeinsame Vielfache.

H.


Fig. I.



M

F T

2 2, 3

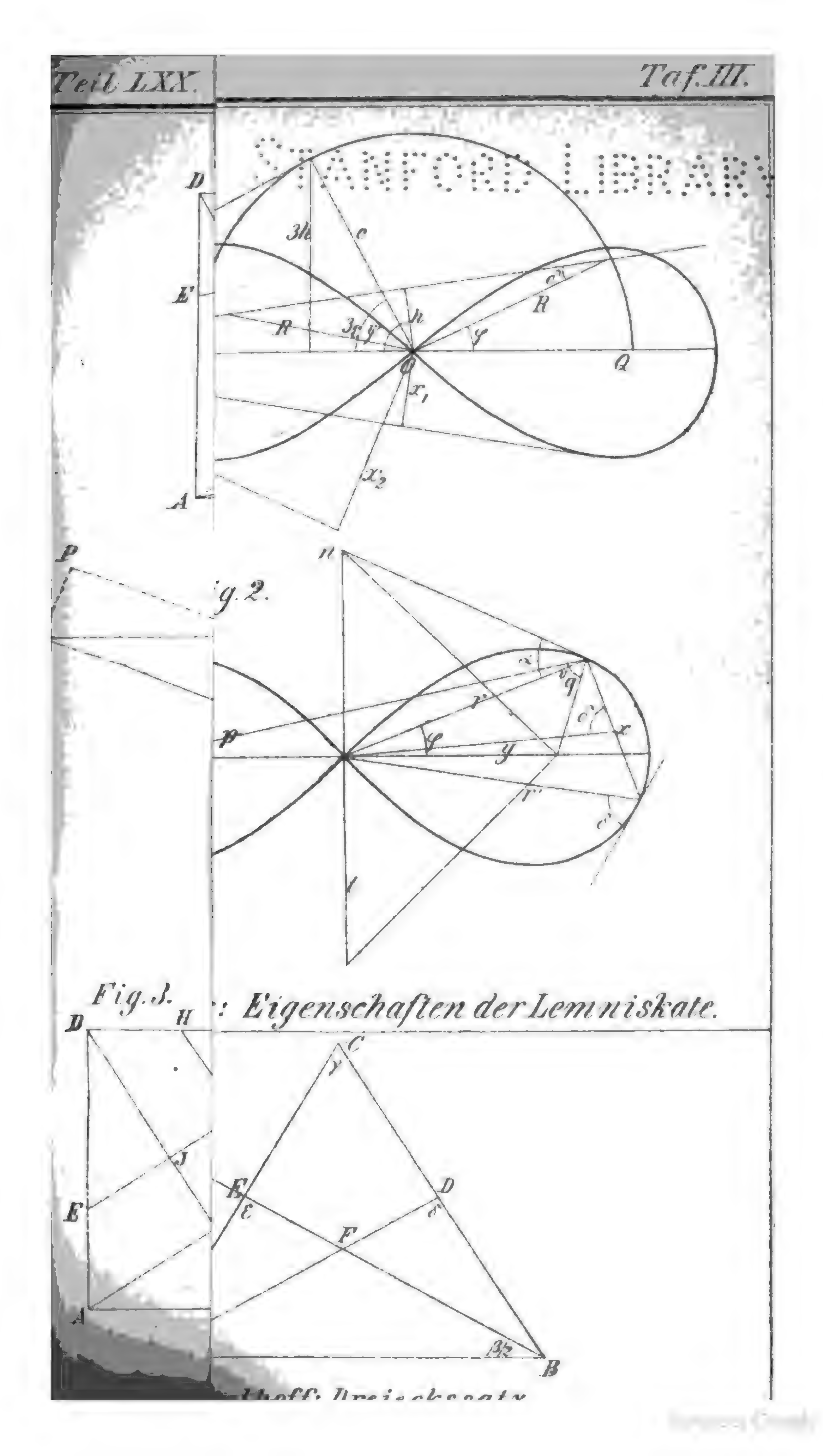
D 1 M

A 1 1,

Osculationskreis.

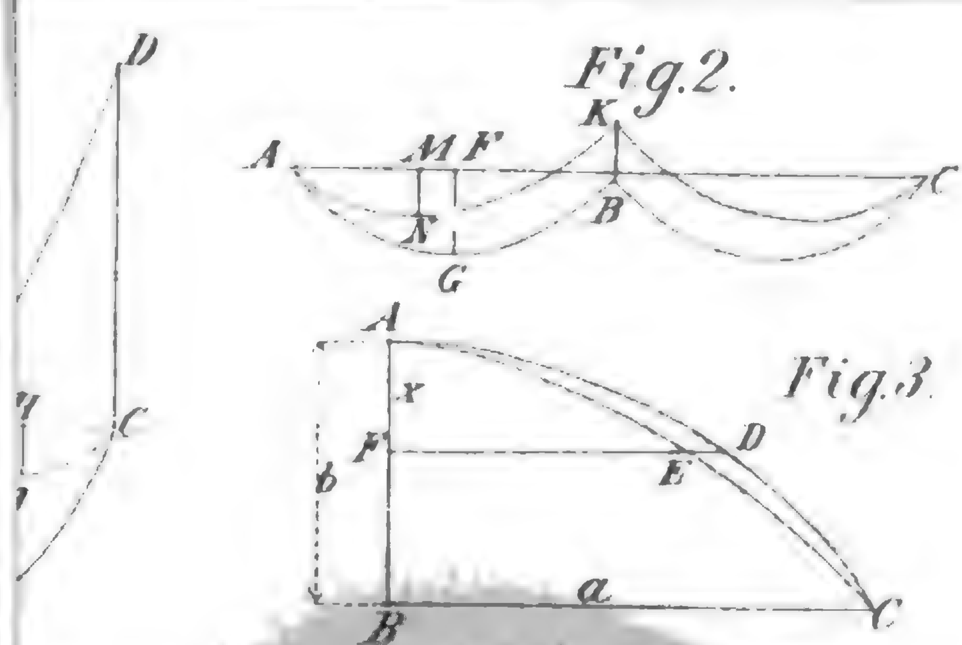
F. W. Kunike,




D
3h
c
E
R
3ε
φ
h
ε
R
φ
O
Q
x_1
x_2
A
n
g. 2.
P
p
x
v
q
r
ε
x
φ
y
r
ε
Fig. 3.
: Eigenschaften der Lemniskate.
D
H
C
γ
J
E
E
ε
D
δ
F
A
3γ
B



s: Berechnung der Excentricität.



II: Methode des Interpolirens
mit 2. Differenzen.



Fig. 3.

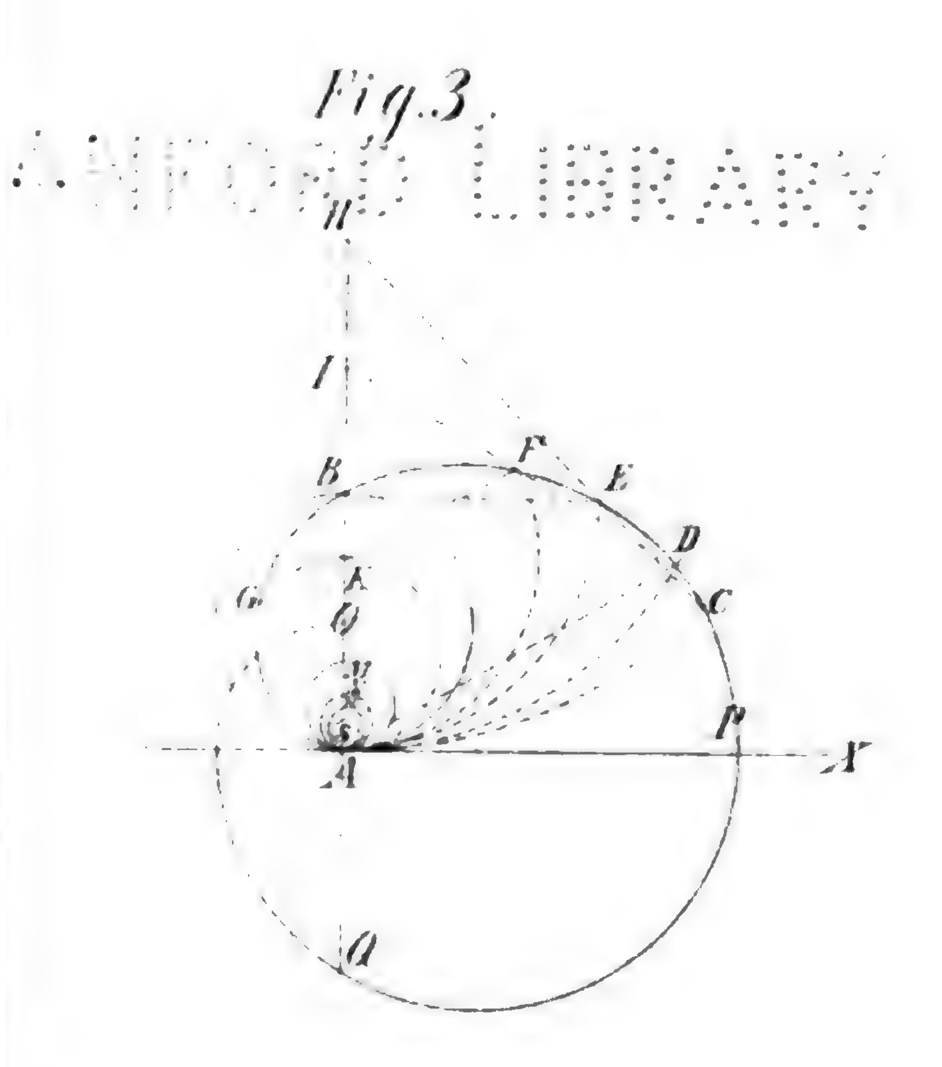
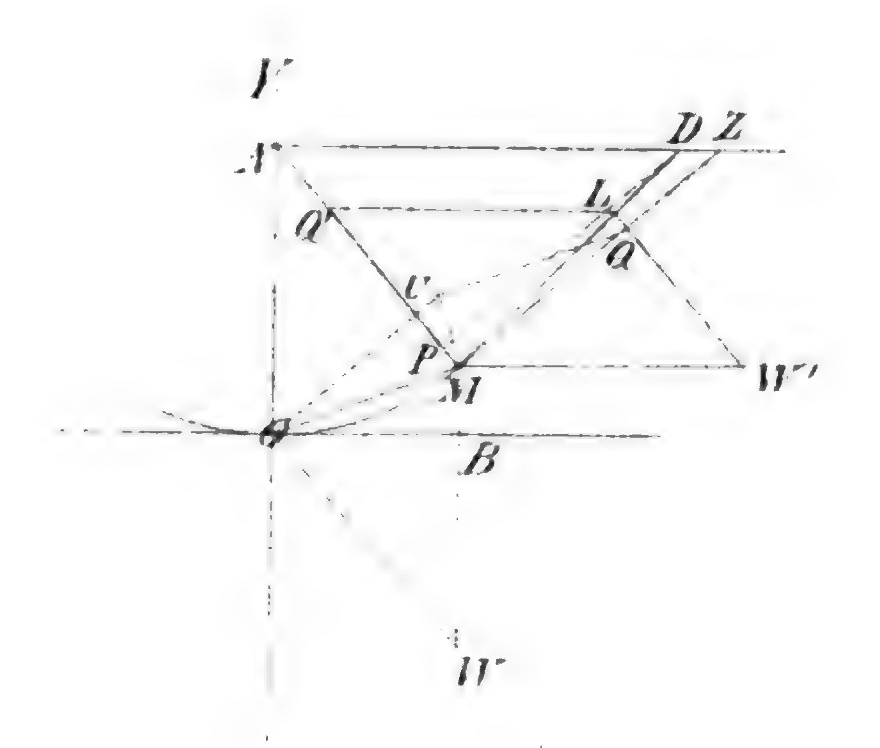
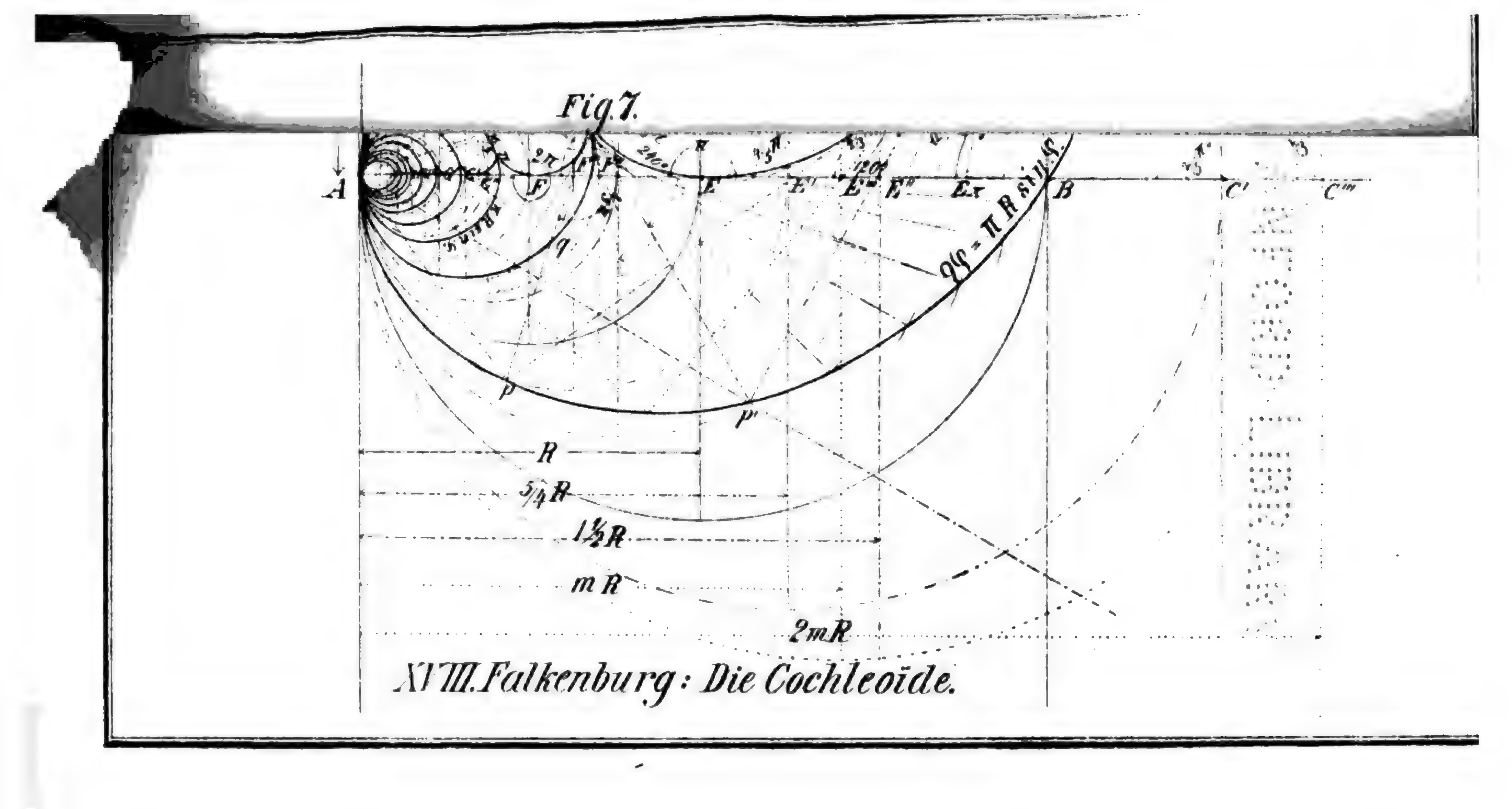


Fig 6.





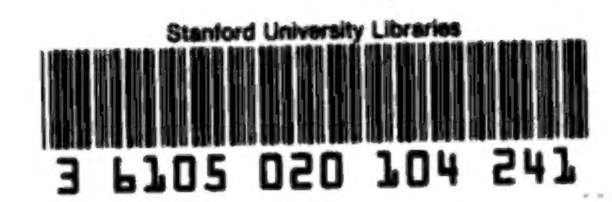


XVIII. Falkenburg: Die Cochleoïde.

XVII. Hims.

Fig. 2.




Stanford University Libraries
3 6105 020 104 241

